

1 Непрекидност функције

Дефиниција 1.1. Кажемо да је функција $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна у тачки $a \in D$ ако и само ако:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D)(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Дефиниција 1.2. За функцију $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ кажемо да је непрекидна слева, односно десна, у тачки $a \in D$ ако је

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a), \quad \text{односно} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a).$$

Став 1.1. Функција $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ је непрекидна у тачки $a \in D$ ако и само ако је непрекидна десна и непрекидна слева у тачки $a \in D$, тј.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x).$$

Теорема 1.1. Елементарне функције непрекидне су на свом домену.

Пример 1.1. Показати да функције $\operatorname{sgn} x$ и $|\operatorname{sgn} x|$ имају прекид у тачки $x = 0$.

Решење: Посматрајмо функцију $y = \operatorname{sgn} x$ која је дефинисана са:



Лако је утврдити да важи следеће:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sgn} x = -1 \neq \operatorname{sgn}(0) = 0 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sgn} x.$$

Сходно томе, функција $\operatorname{sgn} x$ није непрекидна у тачки $x = 0$. Потпуно аналогно се показује да функција $|\operatorname{sgn} x|$ има прекид у тачки $x = 0$.

□

Дефиниција 1.3. За функцију кажемо да је непрекидна ако је непрекидна у свакој тачки домена.

2 Диференцијабилност функције

Дефиниција 2.1. Први извод функције $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ у тачки $x \in (a, b)$ је лимес

$$y' = f'(x) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

уколико гранична вредност постоји. Ако је $f'(x)$ коначан, кажемо да је функција f диференцијабилна у тачки x .

Дефиниција 2.2. Нека је f дефинисана у интервалу $[x, x + \varepsilon)$, за неко $\varepsilon > 0$. Ако постоји

$$f'_+(x) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

кажемо да функција f има десни извод у тачки x . Аналогно, уколико је f дефинисана у интервалу $(x - \varepsilon, x]$, за неко $\varepsilon > 0$, и ако постоји

$$f'_-(x) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

кажемо да функција f има леви извод у тачки x .

Став 2.1. Функција f је диференцијабилна у тачки x ако постоје и леви и десни извод у тачки x и ако су међусобно једнаки.

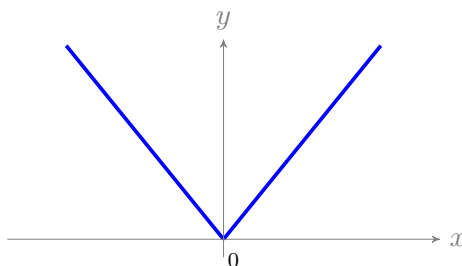
За функцију f кажемо да је диференцијабилна на интервалу (a, b) уколико је диференцијабилна у свакој тачки посматраног интервала. И још, f је диференцијабилна ако је диференцијабилна на свом домену.

Став 2.2. Ако је функција f диференцијабилна у тачки x , онда је она и непрекидна у тој тачки. Обрнуто не важи.

Пример 2.1. Показати да је функција $f(x) = |x|$ непрекидна на свом домену, али да није диференцијабилна.

Решење: Приметимо да је функција f задата са:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x, & x > 0. \end{cases}$$



Функција f очигледно је непрекидна на $\mathbb{R}$.

Приметимо да је $f'(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$.

Како можемо пронаћи вредност израза $f'(x)$ за x из скупова $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$, следи да је функција f диференцијабилна на истим. Испитајмо још диференцијабилност функције у тачки 0.

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h - 0}{h} = 1. \\ f'_-(0) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0) - f(0-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{0 - h}{h} = -1. \end{aligned}$$

Како је $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, функција f није диференцијабилна у тачки 0, дакле ни на свом домену. $\square$

Теорема 2.1. Претпоставимо да функције f и g имају изводе у тачки x . Тада функције $f + g$ и $f \cdot g$ имају извод у тачки x . При томе је:

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) \quad \text{и} \quad (f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Уколико је још и $g(x) \neq 0$, тада и функција f/g има извод у тачки x и важи:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

Последица. Уколико функција f има извод у тачки x , онда и функција $c \cdot f$, где је c константа, има извод у тачки x и важи:

$$(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x).$$

Теорема 2.2. Нека функција f има извод у тачки x и нека функција g има извод у тачки $f(x)$. Тада функција $g \circ f$ има извод у тачки x и при томе важи:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

	Функција $f(x)$	Извод $f'(x)$	Важи за
1.	$c = \text{const}$	0	$x \in \mathbb{R}$
2.	x	1	$x \in \mathbb{R}$
3.	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R}, x > 0$
4.	a^x	$a^x \ln a$	$a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R}$
5.	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, a \neq 1, x > 0$
6.	$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
7.	$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
8.	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
9.	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
10.	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$ x < 1$
11.	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$ x < 1$
12.	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
13.	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
14.	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$x \in \mathbb{R}$
15.	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$x \in \mathbb{R}$
16.	$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$x \in \mathbb{R}$
17.	$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$x \neq 0$
18.	$\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$x \in \mathbb{R}$
19.	$\operatorname{arch} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2-1})$	$\pm \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x > 1$
20.	$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$	$\frac{1}{1-x^2}$	$ x < 1$
21.	$\operatorname{arcth} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{x-1} \right)$	$\frac{1}{1-x^2}$	$ x > 1$

Табела 1: Таблица извода елементарних функција

У табели (1) се налазе изводи елементарних функција, које треба добро научити, јер ћемо их надаље јако често користити у задацима.

Задатак 2.1. Пронаћи прве изводе следећих функција:

$$1. f(x) = \frac{1}{11x^2} + \frac{x^6}{6} + \ln x, \quad f(x) = (x^2 - 5x + 7)e^x + \frac{\ln x}{x+2024}, \quad f(x) = \sin(3x^3) - e^{x^3-1}.$$

$$2. f(x) = \ln^2(3^x + \cos x), \quad f(x) = x(\sin \ln x + \cos \ln x), \quad f(x) = x^x, \quad f(x) = (\operatorname{ch} x)^{\sin^2 x - \cos x^2}.$$

Решење: 1. Имамо следеће:

•

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left(\frac{1}{11x^2} + \frac{x^6}{6} + \ln x \right)' = \left(\frac{1}{11x^2} \right)' + \left(\frac{x^6}{6} \right)' + (\ln x)' \\
 &= \left(\frac{1}{11} x^{-2} \right)' + \left(\frac{x^6}{6} \right)' + (\ln x)' = \frac{1}{11} (-2)x^{-2-1} + \frac{6x^5}{6} + \frac{1}{x} \\
 &= -\frac{2}{11x^3} + x^5 + \frac{1}{x};
 \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left((x^2 - 5x + 7)e^x + \frac{\ln x}{x + 2024} \right)' = ((x^2 - 5x + 7)e^x)' + \left(\frac{\ln x}{x + 2024} \right)' \\
 &= (x^2 - 5x + 7)'e^x + (x^2 - 5x + 7)(e^x)' + \frac{(\ln x)'(x + 2024) - (\ln x)(x + 2024)'}{(x + 2024)^2} \\
 &= (2x - 5)e^x + (x^2 - 5x + 7)e^x + \frac{\frac{1}{x}(x + 2024) - (\ln x) \cdot 1}{(x + 2024)^2} \\
 &= (x^2 - 3x + 2)e^x + \frac{\frac{1}{x}(x + 2024) - \ln x}{(x + 2024)^2};
 \end{aligned}$$

- Користећи правило за извод сложене функције, добијамо да је

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (\sin 3x^3 - e^{x^3-1})' = (\sin 3x^3)'(3x^3)' - (e^{x^3-1})'(x^3 - 1)' \\
 &= 9x^2 \cos 3x^3 - 3x^2 e^{x^3-1}.
 \end{aligned}$$

2. Прва два примера урадити за вежбу (као извод сложене функције).

Подсетимо се трансформације

$$f^g = e^{g \ln f}, \quad f > 0.$$

Ова трансформација показује се корисном у наредним примерима.

- Прво ћемо функцију $f(x) = x^x$ пребацити у погоднији облик, а затим ћемо применити правило за извод сложене функције, па имамо

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' \\
 &= e^{x \ln x} \cdot \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) = x^x (\ln x + 1);
 \end{aligned}$$

- Као у претходном примеру, прво функцију $f(x) = (\operatorname{ch} x)^{\sin^2 x - \cos x^2}$ пребацимо у погоднији облик, а потом примењујемо правило за рачунање извода сложене функције.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left((\operatorname{ch} x)^{\sin^2 x - \cos x^2} \right)' = \left(e^{(\sin^2 x - \cos x^2) \ln \operatorname{ch} x} \right)' \\
 &= e^{\sin^2 x - \cos x^2 \ln \operatorname{ch} x} ((\sin^2 x - \cos x^2) \ln \operatorname{ch} x)' \\
 &= e^{(\sin^2 x - \cos x^2) \ln \operatorname{ch} x} ((\sin^2 x - \cos x^2)' \ln \operatorname{ch} x + (\sin^2 x - \cos x^2)(\ln \operatorname{ch} x)') \\
 &= e^{(\sin^2 x - \cos x^2) \ln \operatorname{ch} x} \left((2 \sin x \cos x + 2x \sin x^2) \ln \operatorname{ch} x + (\sin^2 x - \cos x^2) \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \right) \\
 &= (\operatorname{ch} x)^{\sin^2 x - \cos x^2} \left((2 \sin x \cos x + 2x \sin x^2) \ln \operatorname{ch} x + (\sin^2 x - \cos x^2) \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \right).
 \end{aligned}$$

□

3 Лопиталова правила

Теорема 3.1 (Лопиталова правила). Нека су $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ и $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилне функције, при чему је $g'(x) \neq 0$ за свако $x \in (a, b)$ и нека постоји $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$.

Тада, уколико је $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$ или $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \infty$, важи $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Слично, уколико је $\lim_{x \rightarrow b^-} g'(x) = B \in \overline{\mathbb{R}}$ и важи неки од услова $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$ или

$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = \infty$, имамо да је $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = B$.

Дакле, када имамо неодређене изразе облика $\frac{0}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ или ∞ , можемо користити Лопиталово правило, док када имамо неодређене изразе облика $0 \cdot \infty$, $+\infty - (+\infty)$, $-\infty - (-\infty)$, 1^∞ , $(+\infty)^0$, 0^0 , прво ћемо их трансформацијама свести на неки од облика $\frac{0}{\infty}$ или $\frac{0}{0}$, па тек онда применити Лопиталово правило.

Задатак 3.1. Показати да се на граничну вредност

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x}$$

не може применити Лопиталово правило.

Решење: Прво приметимо да $x + \sin x \rightarrow +\infty$ и $x + \cos x \rightarrow +\infty$, када $x \rightarrow +\infty$. Сходно томе, има смисла посматрати следећу граничну вредност:

$$L' = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x + \sin x)'}{(x + \cos x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}.$$

Како не постоје $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$, следи да не постоји L' . Но, то што не постоји L' не значи да не постоји L . Наиме,

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\cos x}{x}} = 1. \quad \square$$

Приметимо да Лопиталова правила дају *довољне*, али не и неопходне услове за постојање граничних вредности.

Задатак 3.2. Одредити граничну вредност $L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\ln \sin x}$.

Решење: Неодређени израз је облика $\frac{-\infty}{-\infty}$, па стога посматрамо следећу граничну вредност

$$\begin{aligned} L' &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{(\ln \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin x} \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x \cos x} \\ &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sin x)'}{(x \cos x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{\cos x - x \sin x} = \frac{1}{1 - 0 \cdot 0} = 1. \end{aligned}$$

Како постоји L' , постоји и L и важи $L' = L = 1$. □

Задатак 3.3. Одредити граничну вредност $L = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$.

Решење: Приметимо да је неодређени израз облика $0 \cdot (-\infty)$. Стога трансформишемо израз $f \cdot g$ на израз облика $\frac{g}{1/f}$ који ће бити погодан за примену Лопиталовог правила.

$$L \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{(1/x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0. \quad \square$$

Задатак 3.4. Одредити $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} x (\ln \sqrt{x+1} - \ln \sqrt{x})$.

Решење: Оставља се читаоцу за вежбу. □

Задатак 3.5. Одредити $L = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$.

Решење: Тражена гранична вредност је једнака граничној вредности

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1 - \ln x}{(x - 1) \ln x}.$$

Приметимо да се на овај начин неодређени израз облика $\infty - \infty$ трансформише на неодређени израз облика $0/0$, па је:

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}. \quad \square$$

Напомена. Подсетимо се трансформације $f^g = e^{g \ln f}$, $f > 0$. Ова трансформација показује се корисном у наредним примерима.

Задатак 3.6. Одредити граничну вредност $L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$.

Решење: Израз је облика ∞^0 . У складу са претходном напоменом

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sin x \ln(1/x)}.$$

Посматрамо граничну вредност израза у експоненту:

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln(1/x).$$

Ово је израз облика $0 \cdot (-\infty)$, па се на познати начин добија

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(1/x))'}{(1/\sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \cdot \frac{1}{x^2}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = 0.$$

Тражена гранична вредност је једнака $L = e^0 = 1$. □

Задатак 3.7. Одредити граничну вредност $L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}}$.

Решење: Израз је облика 1^∞ , па га најпре трансформишемо.

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x} \ln \cos \sqrt{x}}.$$

Посматрамо граничну вредност израза у експоненту:

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \ln \cos \sqrt{x}.$$

Ово је израз облика $+\infty \cdot 0$, па се на познати начин добија

$$\begin{aligned} L_1 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln \cos \sqrt{x})'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\cos \sqrt{x}} (-\sin \sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x} \cos \sqrt{x}} \\ &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sin \sqrt{x})'}{(2\sqrt{x} \cos \sqrt{x})'} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} - \sin \sqrt{x}} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt{x}}{2 \cos \sqrt{x} - 2\sqrt{x} \sin \sqrt{x}} \\ &= - \frac{1}{2 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 0} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Тражена гранична вредност је једнака $L = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$. □

4 Тејлоров и Маклоренов полином

Посматрамо функцију $f(x)$ која је диференцијабилна у интервалу (a, b) . Њен извод $f'(x)$ је функција променљиве x , дефинисана на (a, b) . Ако је та функција диференцијабилна у некој тачки $x \in (a, b)$, онда ћемо њен извод $(f'(x))'$ назвати *другим изводом* функције $f(x)$ у тачки x и означавати га са $f''(x) = f^{(2)}(x)$. На исти начин се могу дефинисати и $f^{(3)}$, $f^{(4)}$, $f^{(5)}$, итд. Нека је дефинисан $(n-1)$ -ви извод функције $f(x)$, за неко $n \in \mathbb{N}$.¹ Тада се њен n -ти извод дефинише са:

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'.$$

Уз то, уколико функција f има n -ти извод кажемо да је иста n пута диференцијабилна.

Претпоставимо да функција $x \mapsto f(x)$ има у тачки x_0 све изводе закључно до степена n . Апроксимирамо функцију $f(x)$ полиномом n -тог степена.

Дефиниција 4.1. Нека је f диференцијабилна n -пута у тачки x_0 . Полином n -тог степена

$$T_n(x) := f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

се назива *Тејлоровим полиномом функције $f(x)$ у околини тачке x_0* . Посебно, уколико је $x_0 = 0$, полином

$$M_n(x) := f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

називамо *Маклореновим полиномом функције $f(x)$* .

Смисао Тејлоровог полинома огледа се у апроксимацији функције полиномом у околини тачке x_0 . Ова апроксимација делује локално, дакле ван те мале околине полином и функција се веома разликују.

Наводимо основне Маклоренове формуле са остатком у Пеановом облику. У даљем тексту ове формуле сматрамо табличним.

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), x \rightarrow 0, n \in \mathbb{N}.$
2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}), x \rightarrow 0, n \in \mathbb{N}.$
3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), x \rightarrow 0, n \in \mathbb{N}.$
4. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n), x \rightarrow 0, n \in \mathbb{N}.$
5. $(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n), x \rightarrow 0, n \in \mathbb{N}.$

Напомена (Биномни коефицијент).

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha!}{n!(\alpha-n)!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, \alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Задатак 4.1. Наћи Маклоренов полином петог степена за функцију $f(x) = \arctg x$.

Решење: Имамо да је:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad f'''(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3},$$

¹Нулти извод функције f је сама функција f , то јест $f^{(0)}(x) = f(x)$.

$$f^{(4)}(x) = -\frac{24x^3 - 24x}{(1+x^2)^4}, \quad f^{(5)}(x) = \frac{120x^4 - 240x^2 + 24}{(1+x^2)^5}.$$

Како је

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!} + \frac{f^{(5)}(0)}{5!} + o(x^5), \quad x \rightarrow 0$$

важи следећа једнакост

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5), \quad x \rightarrow 0.$$

□

Задатак 4.2. Наћи Маклоренов полином другог степена за функцију

$$f(x) = x + \ln \frac{2-3x}{3+2x}.$$

Решење: Довољно је одредити Маклоренов полином другог степена функције $g(x) = \ln \frac{2-3x}{3+2x}$. Наиме

$$f(x) = x + g(x) = x + M_2(x)_g + o(x^2) = M_2(x)_f + o(x^2), \quad x \rightarrow 0.$$

Рачунањем извода добија се

$$g'(x) = \frac{13}{6x^2 + 5x - 6} \quad \text{и} \quad g''(x) = -\frac{13(12x + 5)}{(6x^2 + 5x - 6)^2},$$

па добијамо Маклоренов полином другог степена за функцију g .

$$M_2(x)_g = \ln \frac{2}{3} - \frac{13}{6}x - \frac{65}{72}x^2.$$

На крају, тражени Маклоренов полином је

$$M_2(x)_f = \ln \frac{2}{3} - \frac{7}{6}x - \frac{65}{72}x^2.$$

□

Задатак 4.3. Одредити Маклоренову формулу као и Маклоренов полином четвртог степена за функцију

$$f(x) = \ln(1 - x + x^2).$$

Решење: Како $-x + x^2 \rightarrow 0$ када $x \rightarrow 0$, користећи Маклоренову формулу за функцију $\ln(1+x)$ имамо следеће:

$$\begin{aligned} f(x) &= (-x + x^2) - \frac{(-x + x^2)^2}{2!} + \frac{(-x + x^2)^3}{3!} - \frac{(-x + x^2)^4}{4!} + o(x^4) \\ &= -x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + o(x^4), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Одговарајући Маклоренов полином је

$$M_4(x) = -x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4.$$

□

Задатак 4.4. Наћи Маклоренов полином шестог степена функције $f(x) = \frac{1+x^3}{1-x^3}$, а затим из-

рачунати $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left(\frac{1+x^3}{1-x^3} - 1 \right)$.

Решење: Како $-x^3 \rightarrow 0$ када $x \rightarrow 0$, користећи Маклоренову формулу за функцију $(1+x)^\alpha$ имамо следеће:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1+x^3}{1-x^3} = (1+x^3)(1+(-x^3))^{-1} \\ &= (1+x^3) \left(1 + \binom{-1}{1}(-x^3) + \binom{-1}{2}(-x^3)^2 + o(x^6) \right) \\ &= (1+x^3) \left(1 + x^3 + \frac{(-1)(-2)}{2!}x^6 + o(x^6) \right) \\ &= (1+x^3)(1+x^3+2x^6+o(x^6)) \\ &= 1+x^3+2x^6+x^3+o(x^6) \\ &= 1+2x^3+2x^6+o(x^6), \quad x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Приметимо да све чланове степена већег од 6 можемо занемарити, тј. они потпадају под $o(x^6)$, јер нам треба развој само до шестог степена. Дакле, Маклоренов полином шестог степена тражене функције је

$$M_6(x) = 1 + 2x^3 + 2x^6.$$

Даље, користећи добијено рачунамо тражени лимес

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left(\frac{1+x^3}{1-x^3} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} (1 + 2x^3 + 2x^6 + o(x^6) - 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} (2x^3 + o(x^3)) = \lim_{x \rightarrow 0} (2 + o(1)) = 2. \end{aligned}$$

□

Задатак 4.5. Израчунати $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - 1 - x}{x^2}$.

Решење: Користећи Маклоренову формулу за функцију $(1+3x)^{1/3}$ добијамо:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x-x^2+o(x^2)) - 1 - x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2+o(x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1+o(1)}{1} = -1. \end{aligned} \quad \square$$

Задатак 4.6. Израчунати

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} - e^{\sqrt{1-x^2}}}{x^4}.$$

Решење: Означимо тражену граничну вредност са L . Јасно је да треба одредити Маклоренов развој четвртог степена функције у бројиоцу (због четвртог степена у имениоцу). Рачунамо водећи рачуна о томе да треба чувати све чланове степена мањег од 5. Имамо:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)} - e^{1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)}}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e \cdot e^{-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)} - e \cdot e^{-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)}}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4) \right) - e \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^4) \right)}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e}{6}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e}{6} + o(1) \right) = \frac{e}{6}. \end{aligned} \quad \square$$

Задатак 4.7. Израчунати $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x-x^2} \sin x \ln(1+5x) - 5x^2}{x^3}$.

Решење: Лаким рачуном добијамо да је:

$$e^{2x-x^2} = 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3), \quad x \rightarrow 0,$$

$$\sin x \ln(1+5x) = 5x^2 - \frac{25}{2}x^3 + o(x^3), \quad x \rightarrow 0.$$

Множењем ових развоја добија се:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 - \frac{5}{2}x^3 - 5x^2 + o(x^3)}{x^3} = -\frac{5}{2}. \quad \square$$

Задатак 4.8. Наћи Маклоренов полином другог степена функције $f(x) = (1 + \cos x)^{1-\cos x}$. Користећи се тим резултатом израчунати

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \cos x)^{1-\cos x} - 1}{\ln^2(1+x)}.$$

Решење: Уочимо да важи следећа једнакост:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{(1-\cos x) \ln(1+\cos x)} = e^{\left(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \ln\left(2 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)} \\ &= e^{\left(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \left(\ln 2 + \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\right)} = e^{\left(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \left(\ln 2 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)} \\ &= e^{\frac{\ln 2}{2} x^2 + o(x^2)} = 1 + \frac{\ln 2}{2} x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

Маклоренов полином другог степена једнак је

$$M_2(x) = 1 + \frac{\ln 2}{2} x^2.$$

Сада одредимо граничну вредност L .

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{\ln 2}{2} x^2 - 1 + o(x^2)}{(x + o(x))^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln 2}{2} x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{\ln 2}{2}. \quad \square$$

Задатак 4.9. Применом Маклоренових развоја израчунати

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \operatorname{tg} x) \ln(x+3)}{x - \sin x}.$$

Решење: Како је $\operatorname{tg} x = \sin x \cdot (\cos x)^{-1}$, имамо:

$$\begin{aligned} (\cos x)^{-1} &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right)^{-1} \\ &= 1 - \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) + \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)^2 + o(x^5) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{12}x^4 + o(x^5), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Према томе,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right)^{-1} \\ &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)\right) \cdot \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{48} + o(x^5)\right) \\ &= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6), \quad x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Стога користећи Маклоренове формуле добијамо следеће:

$$\begin{aligned}
 L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \operatorname{tg} x) \left(\ln 3 + \ln \left(1 + \frac{x}{3} \right) \right)}{x - \sin x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x - x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) \left(\ln 3 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{81} + o(x^3) \right)}{x - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{\ln 3}{3} x^3 + o(x^3)}{\frac{1}{6} x^3 + o(x^3)} = -2 \ln 3. \quad \square
 \end{aligned}$$

Задатак 4.10. Одредити $a, b, c \in \mathbb{R}$ тако да важи једнакост:

$$\sin(x + \pi/3) + \ln(e + x) = ax + b + cx^2 + o(x^2), \quad x \rightarrow 0.$$

Решење: Нека је $f(x) = \sin(x + \pi/3) + \ln(e + x)$. Тада је:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \ln e + \ln \left(1 + \frac{x}{e} \right) \\
 &= \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 - \frac{x^2}{2} \right) + 1 + \frac{x}{e} - \frac{x^2}{2e^2} + o(x^2) \\
 &= \frac{2 + \sqrt{3}}{2} + \frac{2 + e}{2e} x - \frac{2 + 2e^2\sqrt{3}}{4e^2} x^2 + o(x^2).
 \end{aligned}$$

$$\text{Дакле } a = (2 + \sqrt{3})/2, \quad b = (2 + e)/(2e), \quad c = -(2 + 2e^2\sqrt{3})/(4e^2). \quad \square$$

5 Ток и график функције

На основу градива са предавања, знамо да за дату функцију испитујемо следећа својства:

1. област дефинисаности функције f ,
2. парност/непарност/периодичност,
3. нуле и знак функције (уколико је то могуће),
4. асимптоте и понашање на рубу домена,
5. интервали монотоности и екстремне вредности,
6. интервали конвексности и превојне тачке,
7. скицирамо график функције.

Овај редослед је само пример, може се радити и другачијим редом ако нам више одговара.

Задатак 5.1. Испитати ток и нацртати график функције

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - x.$$

- Решење:**
1. *Домен:* Функција је дефинисана за $x^2 - 1 \geq 0$, па је $D_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.
 2. *Парност и непарност:* Домен је симетричан, па има смисла проверити да ли функција поседује неку од ових особина.

$$f(x) \neq f(-x) = \sqrt{x^2 - 1} + x \neq -f(x).^2$$

²Није сврсисходно писати шта функција није, већ шта она јесте. У складу са тим нећемо писати да функција није ни парна ни непарна.

3. *Нуле и знак:* Важи да је $f(x) = 0$ акко је $\sqrt{x^2 - 1} = x$. Ова једначина има решење ако је $x \geq 0$ и $x^2 - 1 = x^2$. Како такво решење не постоји, следи да функција f нема нула. Даље,

$$f(x) > 0 \quad \text{акко} \quad \sqrt{x^2 - 1} - x > 0 \quad \text{акко} \quad \sqrt{x^2 - 1} > x.$$

Посматрана неједначина се решава на следећи начин:

- (а) Ако је $x \leq -1$, неједначина је тривијално испуњена.
 (б) Ако је $x \geq 1$, неједначина је еквивалентна са $x^2 - 1 > x^2$, која нема реалних решења.

На крају, добијамо знак функције:

$$f(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -1] \quad \text{и} \quad f(x) < 0 \iff x \in [1, +\infty).$$

4. *Асимптоте:* Искористимо овде Маклоренове развоје:

$$\sqrt{x^2 - 1} - x = |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - 1 = |x| \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{1/2} - x.$$

Како $1/x^2 \rightarrow 0$ када $x \rightarrow \pm\infty$, користећи се Маклореновом формулом за функцију $(1 + x)^\alpha$ имамо:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 1} - x &= |x| \left(1 - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) - x \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right), & x \rightarrow +\infty, \\ -2x + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right), & x \rightarrow -\infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Дакле, права $y = 0$ је десна хоризонтална асимптота, а права $y = -2x$ је лева коса асимптота функције³. Како је функција f дефинисана у тачкама -1 и 1 , не испитујемо граничне вредности у истим. Важи $f(1) = -1$ и $f(-1) = 1$.

5. *Први извод:*

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}} = -\frac{f(x)}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Приметимо да је $f'(x) = 0$ акко је $f(x) = 0$. Како f нема нула, то их нема ни f' , тј. f нема стационарних тачака. Како је $\text{sgn}(f') = -\text{sgn}(f)$ имамо:

$$f \uparrow \iff f'(x) > 0 \iff f(x) < 0 \iff x \in [1, +\infty).$$

$$f \downarrow \iff f'(x) < 0 \iff f(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -1].$$

6. *Други извод:* $f''(x) = -(x^2 - 1)^{-3/2}$. Очигледно је $f''(x) < 0$ за свако $x \in D_f$, па је функција f конкавна на целом домену.

7. *График функције:*

³До истог резултата долази се стандардним рачунањем коефицијената k и n , али је поступак нешто дужи.

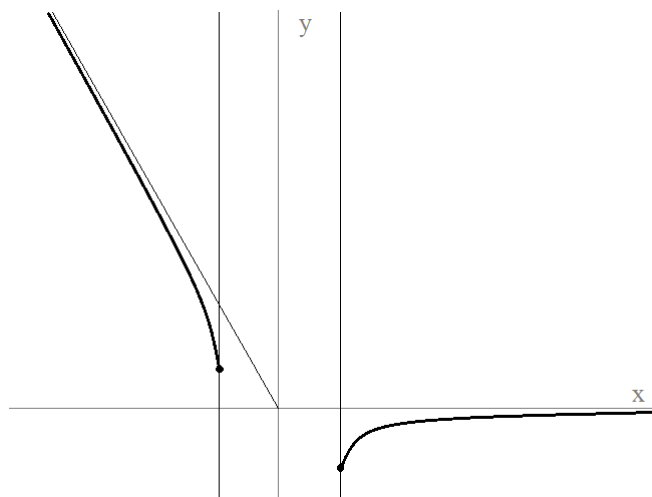


График функције $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - x$. $\square$

Задатак 5.2. Испитати ток и нацртати график функције

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{(x-1)(x+3)}}.$$

Решење: 1. *Домен:* Функција f је дефинисана ако је $(x-1)(x+3) > 0$, па је

$$D_f = (-\infty, -3) \cup (1, +\infty).$$

2. *Парност и непарност:* Како домен D_f није симетричан, не испитујемо парност и непарност (односно функција f није ни парна ни непарна).
3. *Нуле и знак:* Тачка $x_0 = -1 \notin D_f$, па функција нема нула. Знак функције не зависи од имениоца који је увек позитиван, па имамо да је

$$f(x) > 0 \text{ акко } x+1 > 0 \text{ акко } x > -1.$$

На крају, важи следеће разматрање:

$$f(x) > 0 \iff x \in (1, +\infty) \text{ и } f(x) < 0 \iff x \in (-\infty, -3).$$

4. *Асимптоте:*

Даље испитујемо понашање функције на крајевима домена. Кад $x \rightarrow \pm\infty$ можемо искористити Маклоренове развоје:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x+1}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}} = \frac{x+1}{|x|} \left(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ f(x) &= \frac{x+1}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}} = \frac{x+1}{|x|} \left(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \begin{cases} \left(1+\frac{1}{x}\right) \left(1-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 1+o(1), & x \rightarrow +\infty, \\ -\left(1+\frac{1}{x}\right) \left(1-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -1+o(1), & x \rightarrow -\infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Посматрајмо следећу граничну вредност:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{|x| \sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}}} = 1.\end{aligned}$$

Дакле праве $y = -1$ и $y = 1$ су редом лева и десна хоризонтална асимптота функције f . Надаље, како је

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{|x| \sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}}} = -1,\end{aligned}$$

слиди да је права $y = -1$ хоризонтална асимптота функције f када $x \rightarrow -\infty$. Даље, рачунамо граничне вредности на крајевима домена:⁴

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty.$$

Сходно томе, права $x = -3$ је лева, а права $x = 1$ је десна вертикална асимптота функције f . Даље,

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3} - \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}}{(\sqrt{x^2 + 2x - 3})^2} = -\frac{4}{(\sqrt{x^2 + 2x - 3})^3}.$$

5. *Први извод:*

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3} - (x+1) \cdot \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2 + 2x - 3}}}{(\sqrt{x^2 + 2x - 3})^2} \\ &= -\frac{4}{(\sqrt{x^2 + 2x - 3})^3}.\end{aligned}$$

Како је $f'(x) < 0$ за свако $x \in D_f$, функција је опадајућа на интервалима $(-\infty, -3)$ и $(1, +\infty)$. Приметимо да ни за које $x \in D_f$ вредност функције f' није једнака нули, па f нема кандидате за локалне екстремуме.

Како је вредност израза $\sqrt{x^2 + 2x - 3}$ увек позитивна, знак првог извода је увек негативан, то јест функција f опада на домену D_f .

6. *Други извод:* Након краћег рачуна добија се:

$$f''(x) = 12 \cdot \frac{x+1}{(\sqrt{x^2 + 2x - 3})^5}.$$

⁴Функција f није дефинисана у -3 и 1 , али како је $D_f = (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$, тачки -3 можемо „прићи” само са леве, а тачки 1 само са десне стране. Тражење десног лимеса у тачки -3 , односно левог у тачки 1 нема смисла, те представља грешку у изради задатка, а не вишак.

Приметимо да тачка $x_0 = -1$ не припада домену, као и да знак другог извода зависи само од знака бројиоца. Одавде изводимо закључак да је f конкавна на интервалу $(-\infty, -3)$, а конвексна на интервалу $(1, +\infty)$.

Уочимо да $f''(x) = 0$ ако и само ако $x + 1 = 0$, то јест $x = -1$. Како се $x = -1$ не налази у домену, f нема кандидате за превојне тачке.

Приметимо да је $\sqrt{x^2 + 2x - 3}$ увек позитивно, па вредност другог извода зависи само од израза $x + 1$, тј. функција је конвексна акко

$$f''(x) > 0 \quad \text{акко} \quad x \in (1, +\infty).$$

Слично, функција f је конкавна акко

$$f''(x) < 0 \quad \text{акко} \quad x \in (-\infty, -3).$$

7. График функције:

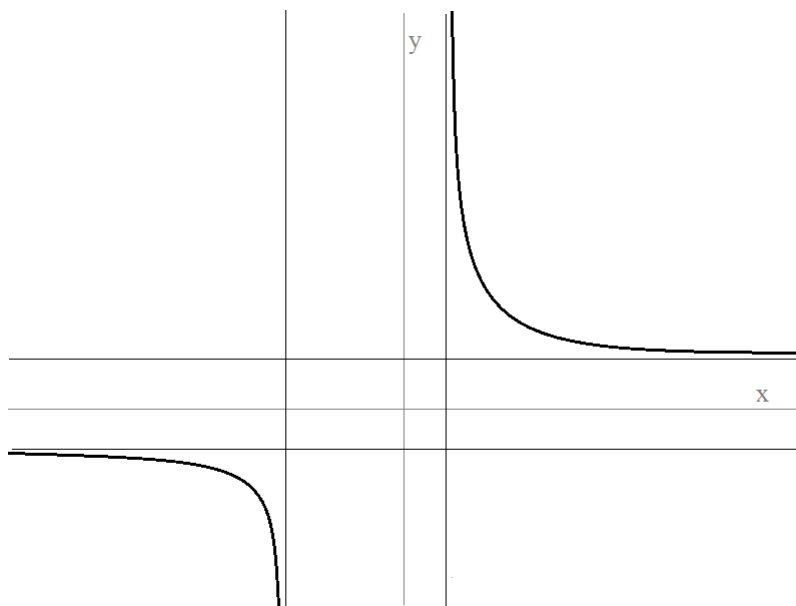


График функције $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{(x-1)(x+3)}}$. $\square$

Задатак 5.3. Испитати ток и нацртати график функције

$$f(x) = (2 - x^2)e^{-x}.$$

Решење: 1. *Домен:* Функција је дефинисана за свако $x \in \mathbb{R}$.

2. *Парност и непарност:* Функција f није ни парна, ни непарна.

3. *Нуле и знак:* Експоненцијална функција увек је позитивна, па је $f(x) = 0$ акко је $x^2 = 2$, тј. $x = \pm\sqrt{2}$. Знак функције је знак израза $2 - x^2$ и $f(x) > 0$ акко је $2 - x^2 > 0$, тј. $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. На исти начин, $f(x) < 0$ акко $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$.

4. *Асимптоте:*

Даље, кад $x \rightarrow +\infty$ два пута применимо Лопиталово правило за случај " ∞/∞ ".

Добијамо:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2}{e^x} = 0,$$

па је права $y = 0$ десна хоризонтална асимптота функције. Са друге стране,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - x^2)e^{-x} = -\infty,$$

па f нема леву хоризонталну асимптоту. Како је и $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, закључујемо да не постоји ни лева коса асимптота.

5. *Први извод:*

Како је

$$f'(x) = (x^2 - 2x - 2)e^{-x}$$

Важи $f'(x) = 0$ акко је $x^2 - 2x - 2 = 0$. Тачке $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$ су стационарне тачке. Функција расте за $x \in (-\infty, x_2)$ и $x \in (x_1, +\infty)$ и опада за $x \in (x_2, x_1)$. У тачки x_1 f има локални минимум, а у тачки x_2 локални максимум.

6. *Други извод:*

Приметимо да је $f''(x) = x(4 - x)e^{-x}$. Као и код првог извода нуле и знак за f'' су нуле и знак параболe $y = 4x - x^2$. Конвексна је на интервалу $(0, 4)$ и конкавна на $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$, док су $P_1(0, 2)$ и $P_2(4, -12e^{-2})$ превојне тачке функције.

7. *График функције:*

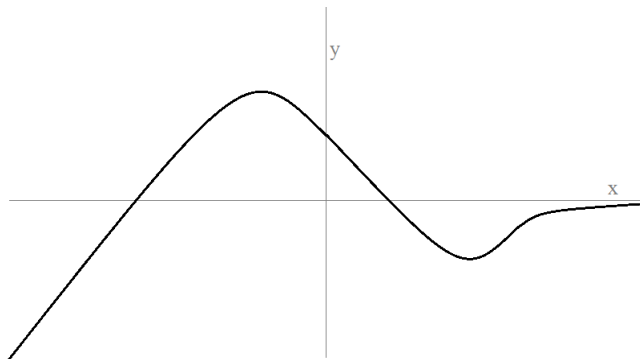


График функције $f(x) = (2 - x^2)e^{-x}$. $\square$

Задатак 5.4. Испитати ток и нацртати график функције

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2 - 1}.$$

Решење: Функција f је дефинисана ако је $x^2 - 1 \neq 0$, па је,

$$D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty).$$

Како је $f(-x) = f(x)$, функција је парна и стога је довољно испитати рестрикцију функције f на $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.⁵ Нуле и знак функције $t \mapsto \operatorname{arctg} t$ су нуле и знак аргумента t . Дакле, f нема нула и важи

$$f(x) > 0 \iff \frac{1}{x^2 - 1} > 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

На исти начин $f(x) < 0$ за $x \in (-1, 1)$. Даље је

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2 - 1} = \operatorname{arctg} 0 = 0.$$

Сходно томе, $y = 0$ је десна хоризонтална асимптота. Даље,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2 - 1} = -\frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{\pi}{2},$$

па следи да f нема вертикалних асимптота. Означимо са φ_1 и φ_2 углове под којим график функције прилази тачки $(1, \frac{\pi}{2})$ са леве, односно са десне стране. Даље, имамо да је

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x^2 - 1}\right)^2} \cdot \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{2x}{(x^2 - 1)^2 + 1}.$$

⁵Функција f је симетрична у односу на y -осу. Приметимо да је $f(0) = -\pi/4$.

Како је за $x > 0$, $f'(x) < 0$, функција опада на интервалима $(0, 1)$ и $(1, +\infty)$. У стационарној тачки $x_0 = 0$, f достиже локални максимум $M(0, -\frac{\pi}{4})$. Одредимо углове φ_1 и φ_2 .

$$\lim_{x \rightarrow 1^\pm} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2 + 1} = -2 \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2 = -\arctg 2.$$

Након краћег рачуна и сређивања израза добија се

$$f''(x) = \frac{3(2x^4 - 2x^2 - 2)}{((x^2 - 1)^2 + 1)^2}.$$

Израз у бројиоцу представља биквадратну једначину. Њене нуле могу се наћи сменом $x^2 = t$, где је $t \geq 0$. Добијамо да су једина решења једначине $x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}}$, као и да се једначина може записати о облику

$$2x^4 - 2x^2 - 2 = 2 \left(x^2 - \frac{1+\sqrt{7}}{3} \right) \left(x^2 - \frac{1-\sqrt{7}}{3} \right).$$

Израз у другој загради је строго позитиван за свако x , па је функција конвексна на интервалу $(-\infty, x_2) \cup (x_1, +\infty)$ и конкавна на $(x_2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, x_1)$. Проласком кроз тачке x_1 и x_2 други извод мења знак, па су $P_1(x_1, f(x_1))$ и $P_2(x_2, f(x_2))$ превојне тачке функције f .

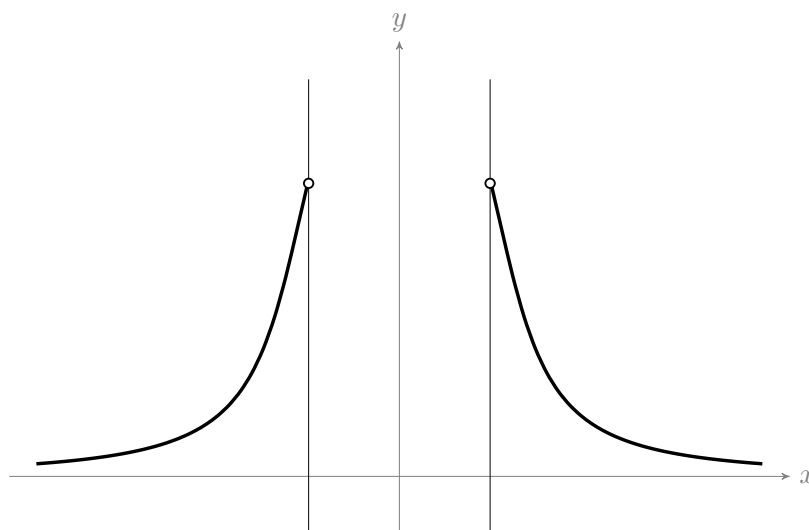


График функције $f(x) = \arctg \frac{1}{x^2 - 1}$. $\square$

Задатак 5.5. Испитати ток и нацртати график функције

$$f(x) = \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|.$$

Решење: 1. *Домен:*

Функција f је дефинисана акко је $x-1 \neq 0$ и $x+1 \neq 0$.

$$D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty).$$

2. *Парност и непарност:*

Функција је непарна будући да важи

$$f(-x) = \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| = \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|^{-1} = -\ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = -f(x).$$

График функције симетричан је у односу на координатни почетак. Даље размотримо нуле и знак функције.

3. Нуле и знак:

Утврдимо да важи следеће:

$$f(x) = 0 \iff \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = 1 \iff \left(\frac{x-1}{x+1} = 1 \vee \frac{x-1}{x+1} = -1 \right).$$

Јасно је да је тачка $N(0,0)$ нула функције f . Уз то, важи

$$f(x) > 0 \iff \left| \frac{x-1}{x+1} \right| > 1 \iff \left(\frac{x-1}{x+1} > 1 \vee \frac{x-1}{x+1} < -1 \right).$$

$$\frac{x-1}{x+1} > 1 \iff -\frac{2}{x+1} > 0 \iff x \in (-\infty, -1).$$

$$\frac{x-1}{x+1} < -1 \iff \frac{2x}{x+1} < 0 \iff x \in (-1, 0).$$

Одавде имамо знак функције f ,

$$f(x) > 0 \quad \text{акко} \quad x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0),$$

$$f(x) < 0 \quad \text{акко} \quad x \in (0, 1) \cup (1, +\infty).$$

4. Асимптоте:

На рубу домена важи:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = \ln 1 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^\pm} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^\pm} f(x) = -\infty.$$

Следи да је права $y = 0$ хоризонтална асимптота, а праве $x = 1$ и $x = -1$ су вертикалне асимптоте функције f .

5. Први извод:

Пре одређивања првог извода приметимо да због особине апсолутне вредности за било коју функцију g , важи

$$(\ln |g(x)|)' = \frac{g'(x)}{g(x)}.$$

$$\text{Стога је} \quad f'(x) = \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{x^2-1}.$$

Како за све $x \in D_f$, важи $f'(x) \neq 0$, то f нема стационарних тачака. Функција опада акко $f'(x) < 0$ акко $x \in (-1, 1)$ и расте на интервалима $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$. Даље је

6. Други извод:

После краћег рачуна, добијамо да је

$$f''(x) = -\frac{4x}{(x^2-1)^2}.$$

Одавде је $f''(x) = 0$ акко је $4x = 0$. Знак другог извода зависи само од израза $-4x$, те је f конвексна на интервалу $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ и конкавна на интервалу $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.

7. График функције:

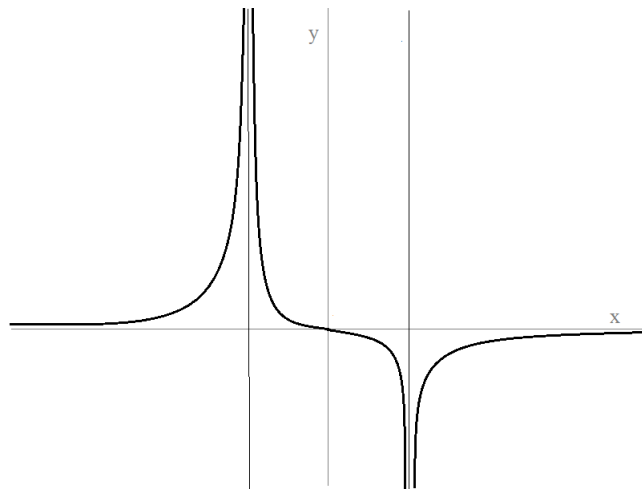


График функције $f(x) = \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$. $\square$