

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ГРАЂЕВИНСКИ ФАКУЛТЕТ

ОДСЕК ЗА ГЕОДЕЗИЈУ И ГЕОИНФОРМАТИКУ

БРАНКО С. БОЖИЋ

РАЧУН ИЗРАВНАЊА

- напредни ниво -

Верзија
Септембар, 2012

Београд, 2012

РАЧУН ИЗРАВНАЊА – НАПРЕДНИ НИВО

Скрипта

Др Бранко С. Божић, дипл.геод.инж.

Издавач

Универзитет у Београду, Грађевински факултет
Булевар краља Александра 73/1, 11000 Београд

За издавача

Проф. др Душан Најдановић, дипл.грађ.инж.

Рецензија

Корице

Др Бранко С. Божић, дипл.геод.инж.

Штампа

Тираж: 100 примерака

ISBN:

САДРЖАЈ:

ПРЕДГОВОР	6
1. УВОД.....	8
2. ГАУС – МАРКОВЉЕВ МОДЕЛ	9
2.1. Основне претпоставке	9
2.2. Методе оцена непознатих параметара	13
2.2.1. Најбоља линеарна непомерена оцена непознатих параметара	13
2.2.2. Оцена по методи најмањих квадрата	14
2.2.3. Оцена по методи максималне веродостојности	17
2.3. Непомерена оцена варијансе јединице тежине	17
2.4. Гаус-Марковљев модел са условима између непознатих параметара	21
2.4.1. Најбоља линеарна непомерена оцена непознатих параметара у Гаус-Марковљевом моделу са условима између непознатих параметара	22
2.4.2. Оцена параметара по методи најмањих квадрата у Гаус-Марковљевом моделу са условима између непознатих параметара	22
2.4.3. Непомерена оцена варијансе јединичне тежине	23
2.4.4. Оцена параметара са условима дефинисаним опажањима малих варијанси	26
2.5. Рекурзивне оцене непознатих параметара.....	27
2.6. Девијације модела	29
2.7. Гаус-Марковљев модел са непотпуним рангом матрице коефицијената једначина резидуала.....	33
2.8. Инваријантне (оцењиве) функције	41
2.9. Глобални тест модела	43
3. ДЕФИНИСАЊЕ КООРДИНАТНОГ СИСТЕМА У ГЕОДЕТСКИМ МРЕЖАМА.....	46
3.1. Конвенционални начини дефинисања координатног система и трансформација координатних система.....	49
3.2. Дефинисање координатног система геодетске мреже помоћу датих тачака (рачунска основа нулте варијансе)	51
3.3. Дефинисање координатног система у геодетским мрежама постављањем датумских услова	53
3.4. Инваријантне функције у ГММ.....	55
3.5. Дефинисање координатног система геодетске мреже са минималним трагом матрице кофактора непознатих параметара	56
3.6. Општа датумска трансформација	76

4.	МЕРЕ ТАЧНОСТИ ГЕОДЕТСКИХ МРЕЖА	83
4.1.	Декомпозиција сопствених вредности	84
4.2.	Локалне мере тачности	89
4.3.	Глобалне мере тачности	96
4.4.	Анализа квалитета геодедских мрежа	97
5.	ОПШТЕ ЛИНЕАРНЕ ХИПОТЕЗЕ	99
5.1.	Нулта хипотеза и алтернативе	100
5.2.	Тест статистике	101
5.3.	Ниво ризика и критична вредност	102
5.4.	Неке особине расподела квадратних форми.....	103
5.5.	Линеарне хипотезе у Гаус-Марковљевом моделу	105
5.6.	Рачунање квадратних форми	107
5.7.	Анализа померања деформационе структуре.....	111
5.7.1.	Робусне методе	114
5.7.2.	Метода подударности (congruency).....	116
5.8.	Моделовање деформација	121
5.8.1.	Прелиминарна идентификација модела деформације.....	121
5.8.2.	Оцена параметара деформационог модела.....	122
5.8.3.	Провера модела деформације и избор најбољег модела	124
6.	ОТКРИВАЊЕ РЕЗУЛТАТА МЕРЕЊА КОЈИ НЕ ПРИПАДАЈУ ОЧЕКИВАНОМ СКУПУ – OUTLIER DETECTION	148
6.1.	Глобални тест модела	149
6.2.	Моделовање грешака опажања	150
6.3.	Конвенционалне алтернативне хипотезе	152
6.4.	Метода откривања грубих грешака при познатој вредности фактора варијансе – Baarda’s Data Snooping	153
6.5.	Тау метода оцене грубих грешака – Pope’s Tau Method	157
6.6.	Данска метода.....	159
7.	КОНЦЕПТ ПОУЗДАНОСТИ.....	165
7.1.	Општи аспекти и дефиниције	165
7.2.	Глобалне мере унутрашње поузданости	167
7.3.	Локална мере унутрашње поузданости.....	170
7.4.	Глобална мера спољашње поузданости	173
7.5.	Локална мера спољашње поузданости.....	175
8.	ОЦЕНА КОМПОНЕНАТА ВАРИЈАНСИ.....	180
8.1.	Стохастички модел	180
8.2.	Примери модела компонената варијанси	181
8.2.1.	Модел компонената варијанси у геометријском нивелману	181
8.2.2.	Модел компонената варијанси у 2Д и 3Д геодедским мрежама..	182
8.3.	Најбоља квадратна непомерена оцена – НКНО	183

9.	ИНТЕРПОЛАЦИЈА ПО МЕТОДИ НАЈМАЊИХ КВАДРАТА, ФИЛТРИРАЊЕ И КОЛОКАЦИЈА.....	189
9.1.	Уводна разматрања	189
9.1.1.	Случајне (стохастичке) функције	189
9.1.2.	Стационарне, нестационарне и ергодичне функције.....	190
9.1.3.	Вишедимензионалне случајне функције – случајна поља	191
9.1.4.	Линеарна интерполација и филтрирање	192
9.2.	Линеарна интерполација стационарних функција.....	194
9.3.	Линеарно филтрирање стационарних функција	196
9.4.	Површи тренда и коваријациона функције	197
9.5.	Колокација по методи најмањих квадрата.....	203
	ЛИТЕРАТУРА	211

ПРЕДГОВОР

Материјал под називом Рачун изравнања – напредни ниво, логични је наставак претходна два предмета области рачуна изравнања – Теорије грешака геодетских мерења и Рачуна изравнања – основни ниво.

Материјал садржи 9 поглавља. Прво поглавље је уводно и указује на циљеве изучавања предмета и исходе, односно резултате који се очекују од оних који буду похађали и успешно савладали понуђена знања.

Друго поглавље носи назив Гаус-Марковљев модел и садржи неопходна знања везана за основну поставку модела изравнања по мотеходи најмањих квадрата. Поглавље обрађује методе оцено непознатих параметара, моделе са условима међу непознатим, рекурзивне оцено непознатих параметара, девијације модела. Моделе са непотпуним рангом, инваријантне функције и глобални тест модела.

Треће поглавље бави се дефинисањем координатних система у геодетским мрежама. Поглавље садржи конвенционалне начине дефинисања датумских услова и дефинисање услова минималним трагом кофакторске матрице оцена непознатих параметара. На крају, дат је модел опште датумске трансформације.

Четврто поглавље носи назив Мере тачности геодетских мрежа и садржи опис декомпозиције сопствених вредности, мере глобалне и локалне тачности и анализира критеријуме квалитета геодетских мрежа.

Пето поглавље се бави линеарним хипотезама и садржи најважније елементе теорије. Описује појмове нулте и алтернативне хипотезе, тест статистику, ниво значајности, особине квадратних форми и анализира линеарне хипотезе у Гаус-Марковљевим моделима. Осим тога, пето поглавље улази у област деформационе анализе и кроз анализу тренда померања објеката описује робусне методе и методе подударности. На крају, објашњавају се основни појмови моделовања деформација.

У шестом поглављу дају се основе теорије откривања резултата мерења који по својим особинама не припадају основном скупу. Описују се три методе откривања резултата који одскачу – *Data snooping*, тау метод и Данска метода.

Седмо поглавље бави се концептом поузданости и детаљно описује глобалне и локалне мере спољашње и унутрашње поузданости.

Осмо поглавље даје основе теорије оцена компонената дисперзија у 1Д и 2Д геодетским мрежама.

Девето поглавље се бави интерполацијама и филтрирањем.

На крају уџбеника дат је списак литературе.

Београд, септембар, 2012.

Аутор

1. УВОД

Са појавом савремених рачунара, обрада и анализа резултата геодетских мерења више не представљају значајан проблем. Обрада је заснована на строгим математичким моделима, а ни количина мерења више није ограничавајући фактор. Развој геодетских инструмената високе прецизности мерења данас отвара нове видике и нове области геодетских примена. Циљ овог курса Рачуна изравнања јесте да студентима и свим другим заинтересованим корисницима употпуни ранија знања о:

- методама обраде геодетских мерења,
- анализи прецизности мерења;
- анализи тачности оцена параметара у геодетским мрежама;
- начинима дефинисање координатних система у геодетским мрежама;
- поступцима тестирања сагласности добијених оцена са очекиваним вредностима;
- методама откривања неприхватљивих вредности грешака у резултатима мерења;
- теорији поузданости геодетских мерења;
- моделима оцене компонената дисперзија геодетских мерења; и
- интерполацији података по методи најмањих квадрата.

Садржај предмета је тако конципиран да студентима омогући лакше савладавање материје из оних научних области који се првенствено баве мерењима у геодетским мрежама високе прецизности које користе за обележавање, контролу геометрије и геодетско осматрање померања објеката или терена. Поред садржаја који је припремљен у виду лекција или предавања, свима који имају намеру да се баве решавањем најосетљивијих геодетских проблема из домена деформационе анализе, препоручује се допунска литература, и то: Метод најмањих квадрата (Перовић, 2005), Parameter Estimation and Hypothesis testing in Linear Models (Koch, 1988), Analysis of Deformation Survey (Chen, 1983), и др.

2. ГАУС – МАРКОВЉЕВ МОДЕЛ

2.1. Основне претпоставке

Нека су: $\mathbf{A}$ - $n \times m$ матрица коефицијената једначина опажања, $\mathbf{x}$ - $m \times 1$ вектор непознатих (фиксних) параметара¹, $\mathbf{l}$ - $n \times 1$ вектор резултата мерења (опажања)², $\mathbf{K}_l = \sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1}$ - $n \times n$ матрица коваријанси резултата мерења, $\mathbf{P}$ - матрица тежина резултата мерења, σ_0^2 - *a priori* фактор веријансе. Ако матрица $\mathbf{A}$ има потпун ранг колона $\mathbf{r}(\mathbf{A}) = n$ и ако је $\mathbf{P}$ позитивно-дефинитна³ матрица, тада се модел облика

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{E}(\mathbf{l}) \text{ са } \mathbf{K}_l = \sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1}, \quad (2.1-1)$$

назива *Гаус-Марковљев модел са потпуним рангом* (Koch, 1988).

Основна претпоставка у моделу јесте да се очекиване вредности резултата мерења $\mathbf{l}$ могу представити линеарном комбинацијом датих коефицијената и непознатих параметара. Модел је линеаран, а начин линеаризације је приказан у ранијим курсевима предмета *Рачун изравнања*. Линеарна повезаност се још назива *регресијом*, а оцена по моделу (2.1-1) *регресионом анализом*. Наведени тип регресионог модела значајно се разликује од типа регресионог модела код којег параметри нису фиксни већ случајног карактера, али се и њихова оцена добија линеарном комбинацијом резултата мерења. Уколико је $\mathbf{r}(\mathbf{A}) = n$, модел (2.1-1) има потпуни ранг, при чему је број опажања n већи или једнак броју непознатих параметара m , у ознаци $n \geq m$. С обзиром да је при $n \geq m$ систем једначина $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{l}$

¹ $\mathbf{x}$ је вектор непознатих параметара или прецизније прираштаја приближних вредности непознатих (координате, висине и сл.) и дефинише се као $\mathbf{x} = \text{оцена} - \text{приближна вредност параметра}$. То значи, да би добили тражене оцене, приближним вредностима $\mathbf{x}_0$ алгебарски додајемо оцењене прираштаје $\mathbf{x}$.

² Вектор $\mathbf{l}$ често се назива и вектором слободних чланова (код нелинеарних модела) у ознаци f . Однос између $\mathbf{l}$ и f гласи: $\mathbf{l} = -f$ (мерено – приближно).

³ Симетрична $n \times n$ матрица $\mathbf{A}$ је позитивно-дефинитна ако је квадратна форма $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ за свако $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, односно позитивно-полудефинитна ако је $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$ за свако $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Код позитивно-дефинитних симетричних матрица јединичне вредности су позитивне, док јединичне вредности позитивно-полудефинитних матрица нису негативне. Уколико је симетрична матрица $\mathbf{A}$ позитивно-дефинитна или позитивно-полудефинитна тада је $\text{tr} \mathbf{A} > 0$ за $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$. У том случају је и $\mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B}$ је позитивно-дефинитно, ако $n \times m$ слободно одабрана матрица $\mathbf{B}$ има потпун ранг колона $\mathbf{r}(\mathbf{B}) = m$. Уколико је ранг матрице $\mathbf{B}$ произвољан, тада је $\mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B}$ позитивно-дефинитно или позитивно-полудефинитно.

неконзистентан јер је простор колона⁴ $\mathbf{R}(\mathbf{A}) = \mathbf{r}(\mathbf{A}) = \mathbf{u}$, а генерално $\mathbf{l} \in \mathbf{E}^n$, то има за последицу да је $\mathbf{l} \notin \mathbf{R}(\mathbf{A})$. Додавањем случајног $n \times 1$ вектора грешака ε , добија се конзистентни теоријски модел који гласи $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{l} + \varepsilon$, са $\mathbf{E}(\varepsilon) = \mathbf{0}$ и $\mathbf{K}_\varepsilon = \mathbf{K}_1 = \sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1}$, који с обзиром на $\mathbf{E}(\mathbf{l}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ и $\mathbf{E}(\varepsilon) = \mathbf{0}$, односно $\varepsilon = -\mathbf{l} + \mathbf{A}\mathbf{x}$ представља алтернативну верзију од (2.1-1). Једначине $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{l} + \varepsilon$ у теорији најмањих квадрата познате су под називом **једначине опажања** или **једначине грешака**. Међутим, уколико се разматра случај са реалним мерењима (Caspar, 1988), уместо вектора грешака ε које никада нису познате, користе се **резидуали** (у литератури се неоправдано користи израз поправка⁵) резултата мерења $\mathbf{v}$, а конзистентан систем тада гласи

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{l} + \mathbf{v}, \text{ са } \mathbf{E}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}, \text{ а } \mathbf{K}_v = \mathbf{K}_1 = \sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1}. \quad (2.1-2)$$

Модел (2.1-1) или (2.1-2) носи име **Гаус-Марковљев модел**, јер га је Гаус 1809. године први описао, док је Марков 1912. године користећи метод **најбоље линеарне непомерене оцене** одредио параметре модела. У теорији изравнања по методи најмањих квадрата, оцењивање у Гаус-Марковљевом моделу назива се **изравнањем опажања**.

Матрица коваријанси $\mathbf{K}_1 = \sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1}$ резултата мерења $\mathbf{l}$ сматра се познатом, осим у погледу фактора варијансе σ_0^2 . Како је матрица $\mathbf{P}$ позитивно-дефинитна, постоји њена инверзија $\mathbf{P}^{-1}$ која је, такође позитивно-дефинитивна. Матрица $\mathbf{P}$ се назива **матрицом тежина** опажања $\mathbf{l}$ и у изравнању по методи најмањих квадрата њена инверзија се назива **матрицом кофактора резултата мерења** или **матрицом коефицијената тежина** $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{Q}_1$. За $\mathbf{P} = \mathbf{I}$, матрица коваријанси резултата мерења гласи $\mathbf{K}_1 = \sigma_0^2 \mathbf{I}$, а сходно томе и фактор σ_0^2 још се назива **варијансом јединичне тежине**.

Нека је линеарни модел (2.1-1) дат као

$$\bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{E}(\bar{\mathbf{l}}) \text{ са } \mathbf{K}_1 = \sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1}. \quad (2.1-3)$$

⁴ Колоне матрице могу се интерпретирати као вектори који формирају векторски простор. Простор колона или распон $\mathbf{R}(\mathbf{A})$ $m \times n$ матрице $\mathbf{A}$ дефинисан је скупом вектора $\mathbf{l} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ где $\mathbf{x} \in \mathbf{E}^n$. Нулти простор $m \times n$ матрице $\mathbf{A}$, у ознаци $\mathbf{N}(\mathbf{A})$ дефинисан је скупом вектора $\mathbf{x}$, за који важи $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ где $\mathbf{x} \in \mathbf{E}^n$.

⁵ Поправка или корекција је израз која се према Међународном речнику израза и термина користи за вредност којом се резултат мерења поправља за одређени износ како би се узели у обзир одређени познати утицаји на мерење.

С обзиром да је $\mathbf{P}$ позитивно-дефинитна, могућа је Колескијева (Cholesky) факторизација облика $\mathbf{P} = \mathbf{G}^T \mathbf{G}$, где је $\mathbf{G}$ регуларна доња троугаона матрица.

Сходно,

$$\mathbf{P} = \mathbf{G}^T \mathbf{G}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{G}^T \cdot \bar{\mathbf{A}}, \quad \mathbf{l} = \mathbf{G}^T \cdot \bar{\mathbf{l}} \quad \text{и} \quad \mathbf{v} = \mathbf{G}^T \cdot \bar{\mathbf{v}}, \quad (2.1-4)$$

при чему је $\mathbf{r}(\bar{\mathbf{A}}) = \mathbf{r}(\mathbf{A}) = \mathbf{u}$, важе следеће релације:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{E}(\mathbf{l}) \quad \text{са} \quad \mathbf{K}_1 = \sigma_0^2 \mathbf{I}, \quad (2.1-5)$$

или $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{l} + \mathbf{v}$, са $\mathbf{K}_1 = \sigma_0^2 \mathbf{I}$. Дакле, модел (2.1-1) се може трансформисати у једноставнији (2.1-5) при чему су након тога опажања некорелисана и истих варијанси, чиме се постиже тзв. *јоднородност* мерења.

ПРИМЕР 2.2-1 (Koch, 1988): Нека је матрица тежина дијагонална матрица облика $\mathbf{P} = \text{diag}(\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \dots \ \mathbf{p}_n)$. Тада је матрица $\mathbf{G}$ облика $\mathbf{G} = \text{diag}(\sqrt{\mathbf{p}_1} \ \sqrt{\mathbf{p}_2} \ \dots \ \sqrt{\mathbf{p}_n})$. Трансформација једначина опажања $\bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x} = \bar{\mathbf{l}} + \bar{\mathbf{v}}$ у систем $\mathbf{G}^T \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{x} = \mathbf{G}^T \cdot \bar{\mathbf{l}} + \mathbf{G}^T \cdot \bar{\mathbf{v}}$ подразумева множење једначина резидуала са квадратним кореном тежина опажања. Такав поступак се у теорији најмањих квадрата назива *хомогенизацијом*.

Klasično rešenje:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0,22487 & 0,97439 \\ -0,99229 & 0,12396 \\ -0,72446 & -0,68932 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{vmatrix} 0,0750 \\ 0,1116 \\ 0,0454 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{vmatrix} 400 & 0 & 0 \\ 0 & 277,7778 & 0 \\ 0 & 0 & 156,25 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{vmatrix} -0,11019 \\ 0,093094 \end{vmatrix}$$

Transformacija jednačina:

$$\mathbf{G} = \begin{vmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 16,66667 & 0 \\ 0 & 0 & 12,5 \end{vmatrix}$$

$$P = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{vmatrix} 4,497338 & 19,48779 \\ -16,5381 & 2,065942 \\ -9,05572 & -8,6165 \end{vmatrix}$$

$$\bar{I} = \begin{vmatrix} 1,499153 \\ 1,8604849 \\ 0,5670532 \end{vmatrix} \quad X = \begin{vmatrix} -0,11019 \\ 0,093094 \end{vmatrix}$$

ПРИМЕР 2.2-2 (Koch, 1988): Мерене су ординате Y_i у n датих вредности апсциса X_i . Нека су опажања некорелисана и једнаких варијанси и нека је полином којим се моделује график другог степена. Линеаризовати модел и дефинисати матрицу коефицијената једначина резидуала.

Модел гласи:

$$a_0 + a_1 X_i + a_2 X_i^2 = E(Y_i) \text{ са } K_i = \sigma_0^2 I, \text{ за } i \in (1, 2, \dots, n)$$

Линеаризација:

$$f_1(a_0, a_1, a_2) = Y_1^* + v_1$$

$$f_2(a_0, a_1, a_2) = Y_2^* + v_2$$

...

$$f_n(a_0, a_1, a_2) = Y_n^* + v_n \quad (a)$$

где су $f_i(a_0, a_1, a_2) = Y_i^* + v_i$ диференцијабилне функције реалних вредности непознатих параметара a_0, a_1, a_2 , Y_i^* су опажања, а v_i резидуали.

Уколико су сходно $a_1 = a_{10} + \Delta a_1$, $a_2 = a_{20} + \Delta a_2$ приближне вредности a_{j0} дате, а прираштаји Δa_j непознати, тада се линеаризација једначина (а) реализује развојем у Тејлоров ред, у близини приближних вредности непознатих $a_0 = (a_{j0})$, као

$$f_i(a_0, a_1, a_2) = f(a_{00} + \Delta a_0, \dots, a_{20} + \Delta a_2) =$$

$$f_i(a_{00}, a_{10}, a_{20}) + \left[\frac{\partial f_i}{\partial a_0} \right]_{a_{00}} \Delta a_0 + \left[\frac{\partial f_i}{\partial a_1} \right]_{a_{10}} \Delta a_1 + \left[\frac{\partial f_i}{\partial a_2} \right]_{a_{20}} \Delta a_2$$

Ако означимо

$$\mathbf{l}_i = [\mathbf{Y}_1^* - \mathbf{f}_1(\mathbf{a}_{00}, \mathbf{a}_{10}, \mathbf{a}_{20}), \dots, \mathbf{Y}_n^* - \mathbf{f}_1(\mathbf{a}_{00}, \mathbf{a}_{10}, \mathbf{a}_{20})]^T_{\text{и}} \\ \mathbf{x} = [\Delta \mathbf{a}_0, \Delta \mathbf{a}_1, \Delta \mathbf{a}_2]$$

односно, матрица коефицијената једначина резидуала дефинитивно гласи:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{a}_0} \right)_{\mathbf{a}_{00}} & \left(\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{a}_1} \right)_{\mathbf{a}_{10}} & \left(\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{a}_2} \right)_{\mathbf{a}_{20}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \left(\frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial \mathbf{a}_0} \right)_{\mathbf{a}_{00}} & \left(\frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial \mathbf{a}_1} \right)_{\mathbf{a}_{10}} & \left(\frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial \mathbf{a}_2} \right)_{\mathbf{a}_{20}} \end{bmatrix}, \text{ тада је } \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{l} + \mathbf{v}.$$

2.2. Методе оцена непознатих параметара

Без улажења у детаље, укратко ће се размотрити три оцењивача непознатих параметара, и то:

- Најбоља линеарна непомерена оцена,
- Оцена по методи најмањих квадрата, и
- Оцена по методи максималне веродостојности.

2.2.1. Најбоља линеарна непомерена оцена непознатих параметара

У линеарном моделу (2.1-5), линеарна функција $\mathbf{a}^T \mathbf{x}$ непознатих параметара $\mathbf{x}$ оцењује се помоћу линеарне функције резултата мерења облика $\mathbf{c}^T \mathbf{l}$. Линеарна оцена је дефинисана и $\mathbf{n} \times \mathbf{l}$ вектор $\mathbf{c}$ је могуће оценити, уколико је $\mathbf{u} \times \mathbf{l}$ вектор $\mathbf{a}$ познат. Да би оцењивач био *најбољи*, *линеаран* и *непомерен* морају бити задовољени следећи услови:

$$\bullet \quad \mathbf{E}(\mathbf{c}^T \mathbf{l}) = \mathbf{a}^T \mathbf{x}, \text{ односно } \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{a}^T \mathbf{x}, \text{ и} \quad (2.2.1-1)$$

$$\bullet \quad \mathbf{V}(\mathbf{c}^T \mathbf{l}) = \min, \text{ односно } \mathbf{V}(\mathbf{c}^T \mathbf{l}) = \sigma_0^2 \mathbf{c}^T \mathbf{c}. \quad (2.2.1-2)$$

Дакле, *најбољи линеарни непомерени оцењивач* (НЛНО) минимизира функцију (2.2.1-1) по $\mathbf{c}$, уз услов (2.2.1-2). Проблем се решава изједначавањем извода Лагранжове функције $\mathbf{w}(\mathbf{c}) = \sigma_0^2 \mathbf{c}^T \mathbf{c} - 2\mathbf{k}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{c} - \mathbf{a})$

по аргументу $\mathbf{c}$ са нулом ($-2\mathbf{k}$ је $n \times 1$ вектор Лагранжових мултипликатора). Коначно, $\mathbf{c}$ обзиром да постоји матрица $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$ јер је $\mathbf{r}(\mathbf{A}) = \mathbf{r}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = \mathbf{r}$, решење по $\mathbf{c}$ постоји, јединствено је и гласи:

$$\mathbf{c}^T = \mathbf{a}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T. \quad (2.2.1-3)$$

Заменом (2.2.1-3) у (2.2.1-2) дефинише се минимална варијанса решења, облика

$$\mathbf{V}(\mathbf{c}^T \mathbf{l}) = \sigma_0^2 \mathbf{a}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{a}. \quad (2.2.1-4)$$

Теорема: Најбољи линеарни непомерени оцењивач $\mathbf{a}^T \hat{\mathbf{x}}$ и варијанса $\mathbf{V}(\mathbf{a}^T \hat{\mathbf{x}})$ *линеарне функције* $\mathbf{a}^T \mathbf{x}$ од непознатог параметра $\mathbf{x}$ у ГММ гласи:

$$\mathbf{a}^T \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{a}^T \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{a}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{l} \text{ и } \mathbf{V}(\mathbf{c}^T \hat{\mathbf{l}}) = \mathbf{V}(\mathbf{a}^T \hat{\mathbf{x}}) = \sigma_0^2 \mathbf{a}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{a}. \quad (2.2.1-5)$$

Најбољи линеарни непомерени оцењивач $\hat{\mathbf{x}}$ *непознатих параметара* $\mathbf{x}$ и његова матрица коваријанси $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}$ (са минималним трагом) у ГММ 2.1-5 дефинишу се на основу следећих израза:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{l} \text{ и } \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}} = \sigma_0^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1},$$

односно, у моделу (2.1-2):

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} \text{ и } \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}} = \sigma_0^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}. \quad (2.2.1-6)$$

2.2.2. Оцена по методи најмањих квадрата

Оцена $\hat{\mathbf{x}}$ непознатих параметара $\mathbf{x}$ у Гаус-Марковљевом моделу по *методи најмањих квадрата* (МНК) одређује се *минимизирањем* функције

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sigma_0^2} (\mathbf{l} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x})^T (\mathbf{l} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}). \quad (2.2.2-1)$$

Минимизација функције (2.2.2-1) реализује се изједначавањем првог извода функције по параметру $\mathbf{x}$ са нулом, након чега се добија оцењивач $\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{l}$ који је идентичан са НЛНО (изрази 2.2.1-6).

Може се констатовати да су у ГММ, НЛНО и МНК оцењивачи $\hat{\mathbf{x}}$ од $\mathbf{x}$ међусобно *идентични*. Уколико са $\hat{\mathbf{I}}$ означимо оцењиваче очекиваних вредности опажања $\mathbf{E}(\mathbf{I})$, тада је $\hat{\mathbf{v}}$ оцењивач вектора резидуала $\mathbf{v}$, који се дефинише као:

$$\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{I}} - \mathbf{I} \text{ са } \hat{\mathbf{I}} = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}. \quad (2.2.2-2)$$

Вектор $\hat{\mathbf{v}}$ се назива вектором *резидуала*, а у теорији најмањих квадрата још се назива и вектором *поправака* (Koch, 1988). На основу напред реченог, може се закључити – најбоља линеарна непомерена оцена и метод најмањих квадрата у ГММ (2.1-1) минимизирају квадратну форму $\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}}$ резидуала, а у моделу (2.1-5) квадратну форму $\hat{\mathbf{v}}^T \hat{\mathbf{v}}$.

Покушајмо оцену по методи најмањих квадрата интерпретирати на геометријски начин (слика 2.2.2-1). Простор колона матрице $\mathbf{A}$ дефинише се као $\mathbf{R}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{z} \mid \mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{x}\}$ и одређује (сходно $\mathbf{r}(\mathbf{A}) = \mathbf{u}$), $\mathbf{u}$ - димензионални Еуклидов простор $\mathbf{E}^n$ у којем се оцењује $\mathbf{A}\mathbf{x}$ и на слици (2.2.2-1) дефинисан је испрекиданом линијом као раван $\mathbf{R}(\mathbf{A})$. Оцена од $\mathbf{x}$ у ГММ моделу одређена је са $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$, односно, ортогоналном пројекцијом⁶ вектора опажања $\mathbf{I} \in \mathbf{E}^n$ на простор колона $\mathbf{R}(\mathbf{A})$, тј.

$$\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{I}, \text{ где је } \mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T. \quad (2.2.2-3)$$

За случај мерења неједнаке тачности $\mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}$.

Множење (2.2.2-3) са $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$ с лева, даје оцену од $\mathbf{x}$ која је идентична са (2.2.1-6).

Помоћу пројективног оператора, вектор опажања $\mathbf{I}$ на основу познатих услова $\mathbf{R}\mathbf{A} = \mathbf{A}$ и $(\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{A} = \mathbf{0}$ (Koch, 1988) јединствено се описује са $\mathbf{I} = \mathbf{R}\mathbf{I} + (\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{I}$ и с обзиром на (2.2.2-2) и (2.2.2-3) дефинише оцену резидуала $\hat{\mathbf{v}} = -(\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{I}$, или сходно (2.2.2-3),

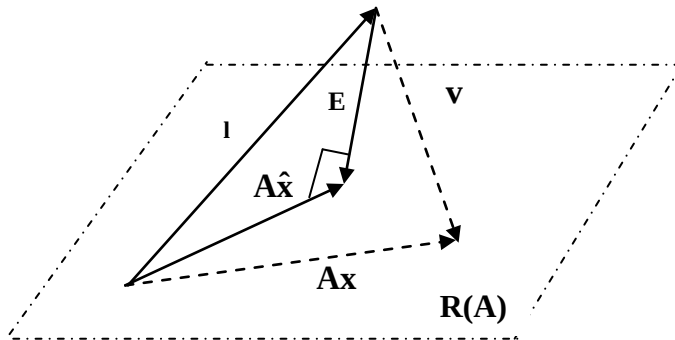
$$\hat{\mathbf{v}} = -(\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T)\mathbf{I}. \quad (2.2.2-4)$$

⁶ Ако векторски простор $\mathbf{E}^n$ формирају подпростори $\mathbf{U}$ и његов ортогонални комплемент $\mathbf{U}^\perp$, тада се трансформација облика $\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{x}_1$ са $\mathbf{x} \in \mathbf{E}^n$ и $\mathbf{x}_1 \in \mathbf{U}$ назива **ортогоналном пројекцијом** $\mathbf{E}^n$ на $\mathbf{U}$ дуж $\mathbf{U}^\perp$, док је $\mathbf{R}$ у том случају **ортогонални пројективни оператор**.

С обзиром да су вектори $\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$ и $\hat{\mathbf{v}}$ ортогонални (слика (2.2.2-1)), важи следећа декомпозиција:

$$\mathbf{l}^T \mathbf{l} = \hat{\mathbf{l}}^T \hat{\mathbf{l}} + \hat{\mathbf{v}}^T \hat{\mathbf{v}}. \quad (2.2.2-5)$$

Збир квадрата резидуала $\hat{\mathbf{v}}^T \hat{\mathbf{v}}$ игра значајну улогу приликом оцене варијансе σ_0^2 и тестирања хипотеза.



Слика 2.2.2-1: Геометријска интерпретација МНК

Уколико мерења нису исте тачности, вектор резидуала $\hat{\mathbf{v}}$ оцењује се на основу израза:

$$\hat{\mathbf{v}} = -(\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}) \mathbf{l}. \quad (2.2.2-6)$$

С обзиром да је матрица $\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$ идемпотентна⁷, матрица коваријанси $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{v}}}$ вектора резидуала $\hat{\mathbf{v}}$ следи на основу (2.2.2-4), тј.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{v}}} &= \sigma_0^2 (\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T), \text{ односно} \\ \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{v}}} &= \sigma_0^2 (\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T) \text{ са } \mathbf{r}(\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{v}}}) = \mathbf{n} - \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (2.2.2-7)$$

⁷ Идемпотентне матрице се јављају код уопштених инверзија. За квадратну матрицу $\mathbf{A}$ се каже да је идемпотентна уколико задовољава следећи услов: $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A} = \mathbf{A}$. Неке особине идемпотентних матрица гласе: 1) јединичне вредности идемпотентних матрица су 0 или 1; 2) $\mathbf{r}(\mathbf{A}) = \text{tr} \mathbf{A}$; 3) Ако је $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ матрица $\mathbf{A}$ идемпотентна са рангом $\mathbf{r}(\mathbf{A}) = \mathbf{r}$, идемпотентна је и матрица $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ са рангом $\mathbf{r}(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{n} - \mathbf{r}$,

2.2.3. Оцена по методи максималне веродостојности

Најбоља линеарна непомерена оцена и оцена по методи најмањих квадрата не условљавају тип распореда вектора опажања $\mathbf{l}$. За разлику од поменутих метода, приликом извођења оцена по методи максималне веродостојности, распоред опажања је од битног значаја. Позивајући се на централну граничну теорему, за резултате мерења се с правом претпоставља да се поковавају закону нормалне расподеле, тј. за модел $\mathbf{E}(\mathbf{l}) = \mathbf{Ax}$ и $\mathbf{K}_l = \sigma_0^2 \mathbf{I}$ важи:

$$\mathbf{l} \sim \mathbf{N}(\mathbf{Ax}, \sigma_0^2 \mathbf{I}). \quad (2.2.3-1)$$

Оцена непознатих параметара по методи максималне веродостојности добија се минимизирањем функције максималне веродостојности

$\mathbf{L}(\mathbf{l}; \mathbf{x}, \sigma_0^2) = (2\pi\sigma_0^2)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{(\mathbf{l}-\mathbf{Ax})^T(\mathbf{l}-\mathbf{Ax})}{2\sigma_0^2}}$. Проблем се решава изједначавањем диференцијала функције по $\mathbf{x}$ и σ_0^2 са нулом. Без доказивања (Koch, 1988, Перовић, 2006 и др.), коначан израз за оцену варијансе гласи:

$$\overline{\sigma_0^2} = \frac{1}{n} (\mathbf{l} - \mathbf{Ax})^T (\mathbf{l} - \mathbf{Ax}), \quad (2.2.3-2)$$

што показује да оцена од σ_0^2 **није непомерена**. Оцена параметара $\mathbf{x}$ **идентична** је решењима по МНК и НЛНО.

2.3. Непомерена оцена варијансе јединице тежине

Оцењивач непознате варијансе јединичне тежине $\hat{\sigma}_0^2$ у Гаус-Марковљевом моделу (2.1-5) следи сходно (2.2.3-2) из збира квадрата резидуала $\hat{\mathbf{v}}^T \hat{\mathbf{v}}$.

Означимо збир квадрата резидуала са Ω , тада сходно моделима (2.1-5) и (2.1-1) важи:

$$\Omega = \hat{\mathbf{v}}^T \hat{\mathbf{v}} \quad \text{и} \quad \Omega = \hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}}. \quad (2.3-1)$$

Да би добили непомерену оцену од σ_0^2 , неопходно је одредити очекивану вредност од Ω .

Сходно (2.2.2-4) за модел (2.1-5) и (2.2.2-6) за модел (2.1-1), важе следеће релације:

$$\Omega = \mathbf{I}^T (\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T) \mathbf{I} \quad \text{и} \quad \Omega = \mathbf{I}^T (\mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}) \mathbf{I}. \quad (2.3-2)$$

Заменом $\hat{\mathbf{x}}$ из (2.2.1-6) у (2.3-2) добијају се следећи изрази

$$\Omega = \mathbf{I}^T \mathbf{I} - \mathbf{I}^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} \quad \text{и} \quad \Omega = \mathbf{I}^T \mathbf{P} \mathbf{I} - \mathbf{I}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}. \quad (2.3-3)$$

Имајући у виду (Koch, 1988) да је $\mathbf{E}(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}) = \mathbf{tr}(\mathbf{A} \mathbf{K}_{\mathbf{x}}) + \mu_{\mathbf{x}}^T \mathbf{A} \mu_{\mathbf{x}}$ ($\mu_{\mathbf{x}}$ је очекивана вредност од $\mathbf{x}$) и $\mathbf{tr}(\mathbf{K}_{\mathbf{v}}) = \sigma_0^2(\mathbf{n} - \mathbf{u})$, по првој једначини (2.3-2) очекивана вредност $\mathbf{E}(\Omega)$ гласи $\mathbf{E}(\Omega) = \sigma_0^2(\mathbf{n} - \mathbf{u}) + \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T (\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T) \mathbf{A} \mathbf{x}$, одакле следи да је:

$$\mathbf{E}(\Omega) = \sigma_0^2(\mathbf{n} - \mathbf{u}), \quad (2.3-4)$$

што доказује да је оцена од σ_0^2 по методи максималне веродостојности $\bar{\sigma}_0^2$ померена (израз 2.2.3-2).

Непомерена оцена варијансе јединичне тежине $\hat{\sigma}_0^2$ у моделима (2.1-1) и (2.1-5) гласи:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\Omega}{\mathbf{n} - \mathbf{u}}. \quad (2.3-5)$$

С обзиром на модел (2.1-5), а на основу (2.2.1-6) **матрица коваријанси оцена непознатих параметара** са $\hat{\sigma}_0^2$ гласи:

$$\hat{\mathbf{K}}_{\hat{\mathbf{x}}} = \hat{\sigma}_0^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \quad (\text{или} \quad \hat{\mathbf{K}}_{\hat{\mathbf{x}}} = \hat{\sigma}_0^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \text{ за модел (2.1-1)}). \quad (2.3-6)$$

Матрице коваријанси оцена резултата мерења са $\hat{\sigma}_0^2$ гласе:

$$\hat{\mathbf{K}}_1 = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{I} \quad \text{и} \quad \hat{\mathbf{K}}_i = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \quad (2.3-7)$$

$$(\hat{\mathbf{K}}_1 = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{P}^{-1} \quad \text{и} \quad \hat{\mathbf{K}}_i = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T, \text{ за модел (2.1-1)}).$$

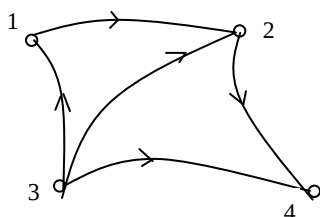
С обзиром да је:

$$\mathbf{tr}(\hat{\mathbf{K}}_1) = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{n} \quad \text{и} \quad \mathbf{tr}(\hat{\mathbf{K}}_i) = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T, \quad (2.3-8)$$

и с обзиром да је $\mathbf{n} \geq \mathbf{u}$, важи однос:

$$\mathbf{tr}(\hat{\mathbf{K}}_1) \geq \mathbf{tr}(\hat{\mathbf{K}}_i). \quad (2.3-9)$$

ПРИМЕР 2.3-1: На основу датих података мерења:



$$H_1 = 100.00 \text{ m}$$

Дати подаци:

Δh	Мерење (m)	$s_{\Delta h}$ (mm)
Δh_{12}	1.991	2.1
Δh_{31}	6.751	3.1
Δh_{32}	8.770	4.1
Δh_{34}	12.883	4.5
Δh_{24}	4.115	2.3

А) Оценити непознате параметре $\hat{x}$, $\hat{\sigma}_0^2$, $\hat{v}$, $\hat{K}_{\hat{x}}$, $\hat{K}_1$, $\hat{K}_i$ и $\hat{K}_{\hat{v}}$ за $P = I$,

Б) Оценити непознате параметре $\hat{x}$, $\hat{\sigma}_0^2$, $\hat{v}$, $\hat{K}_{\hat{x}}$, $\hat{K}_1$, $\hat{K}_i$ и $\hat{K}_{\hat{v}}$ за $P = 1/s^2$,

Ц) Оценити непознате параметре x хомогенизацијом по моделу (2.1-4).

РЕШЕЊЕ: А)

$$\hat{x} = \begin{vmatrix} 102.0013 \\ 93.23875 \\ 106.119 \end{vmatrix}$$

$$\hat{v} = \begin{vmatrix} 0.010 \\ 0.010 \\ -0.007 \\ -0.003 \\ 0.003 \end{vmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = 0.00014075$$

$$\hat{K}_{\hat{x}} = \begin{vmatrix} 0.00009 & 0.00005 & 0.00007 \\ 0.00005 & 0.00009 & 0.00007 \\ 0.00007 & 0.00007 & 0.00014 \end{vmatrix} \quad \text{израз (2.3-6)}$$

Сходно (2.3-7):

$$\hat{K}_1 = \begin{vmatrix} 0.00014075 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.00014075 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00014075 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.00014075 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.00014075 \end{vmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{K}}_i = \begin{vmatrix} 8.79687\text{E-}05 & -5.27812\text{E-}05 & 3.51875\text{E-}05 & 1.75937\text{E-}05 & -1.75937\text{E-}05 \\ -5.27812\text{E-}05 & 8.79687\text{E-}05 & 3.51875\text{E-}05 & 1.75937\text{E-}05 & -1.75937\text{E-}05 \\ 3.51875\text{E-}05 & 3.51875\text{E-}05 & 7.0375\text{E-}05 & 3.51875\text{E-}05 & -3.51875\text{E-}05 \\ 1.75937\text{E-}05 & 1.75937\text{E-}05 & 3.51875\text{E-}05 & 8.79687\text{E-}05 & 5.27812\text{E-}05 \\ -1.75937\text{E-}05 & -1.75937\text{E-}05 & -3.51875\text{E-}05 & 5.27812\text{E-}05 & 8.79687\text{E-}05 \end{vmatrix}$$

Сходно (2.2.2-7):

$$\hat{\mathbf{K}}_v = \begin{vmatrix} 5.27812\text{E-}05 & 5.27812\text{E-}05 & -3.51875\text{E-}05 & -1.75937\text{E-}05 & 1.75937\text{E-}05 \\ 5.27812\text{E-}05 & 5.27812\text{E-}05 & -3.51875\text{E-}05 & -1.75937\text{E-}05 & 1.75937\text{E-}05 \\ -3.51875\text{E-}05 & -3.51875\text{E-}05 & 7.0375\text{E-}05 & -3.51875\text{E-}05 & 3.51875\text{E-}05 \\ -1.75937\text{E-}05 & -1.75937\text{E-}05 & -3.51875\text{E-}05 & 5.27812\text{E-}05 & -5.27812\text{E-}05 \\ 1.75937\text{E-}05 & 1.75937\text{E-}05 & 3.51875\text{E-}05 & -5.27812\text{E-}05 & 5.27812\text{E-}05 \end{vmatrix}$$

Б)

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{vmatrix} 101.996 \\ 93.238 \\ 106.113 \end{vmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \begin{vmatrix} 0.005 \\ 0.011 \\ -0.012 \\ -0.008 \\ 0.002 \end{vmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = 15.36692$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{vmatrix} 5.5397\text{E-}05 & 2.69585\text{E-}05 & 4.95\text{E-}05 \\ 2.6958\text{E-}05 & 8.89299\text{E-}05 & 3.98\text{E-}05 \\ 4.9507\text{E-}05 & 3.97944\text{E-}05 & 0.000112 \end{vmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{K}}_1 = \begin{vmatrix} 6.77681\text{E-}05 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.000148 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.000258 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.000311 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8.1291\text{E-}05 \end{vmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{K}}_i = \begin{vmatrix} 5.5397\text{E-}05 & -2.69585\text{E-}05 & 2.84385\text{E-}05 & 2.25\text{E-}05 & -5.89036\text{E-}06 \\ -2.69585\text{E-}05 & 8.89299\text{E-}05 & 6.19714\text{E-}05 & 4.91\text{E-}05 & -1.28359\text{E-}05 \\ 2.84385\text{E-}05 & 6.19714\text{E-}05 & 9.04099\text{E-}05 & 7.17\text{E-}05 & -1.87263\text{E-}05 \\ 2.25481\text{E-}05 & 4.91355\text{E-}05 & 7.16837\text{E-}05 & 0.000121 & 4.96059\text{E-}05 \\ -5.89036\text{E-}06 & -1.28359\text{E-}05 & -1.87263\text{E-}05 & 4.96\text{E-}05 & 6.83322\text{E-}05 \end{vmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{K}}_v = \begin{vmatrix} 1.23712\text{E-}05 & 2.69585\text{E-}05 & -2.84385\text{E-}05 & -2.25481\text{E-}05 & 5.89036\text{E-}06 \\ 2.69585\text{E-}05 & 5.87462\text{E-}05 & -6.19714\text{E-}05 & -4.91355\text{E-}05 & 1.28359\text{E-}05 \\ -2.84385\text{E-}05 & -6.19714\text{E-}05 & 0.000167908 & -7.16837\text{E-}05 & 1.87263\text{E-}05 \\ -2.25481\text{E-}05 & -4.91355\text{E-}05 & -7.16837\text{E-}05 & 0.00018989 & -4.96059\text{E-}05 \\ 5.89036\text{E-}06 & 1.28359\text{E-}05 & 1.87263\text{E-}05 & -4.96059\text{E-}05 & 1.29588\text{E-}05 \end{vmatrix}$$

Ц)

$$\mathbf{G}^T = \begin{vmatrix} 476.19048 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 322.58065 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 243.90244 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 222.22222 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 434.78261 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Услов:} \\ \mathbf{G}^T \mathbf{G} = \mathbf{P} \end{array}$$

$$(\mathbf{G}^T \mathbf{A}) = \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 476.19048 & 0 & 0 \\ 0 & -322.58065 & 0 \\ 243.90244 & -243.90244 & 0 \\ 0 & -222.22222 & 222.22222 \\ -434.7826 & 0 & 434.78261 \end{vmatrix}$$

$$(\mathbf{G}^T \mathbf{I}) = \mathbf{I} = \begin{vmatrix} 48567.142857 \\ -30080.322581 \\ 2139.024390 \\ 2862.888889 \\ 1789.130435 \end{vmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{vmatrix} 101.996 \\ 93.238 \\ 106.113 \end{vmatrix} \quad \text{према изразу (2.2.1-6); идентично решењу под Б)}$$

2. 4. Гаус-Марковљев модел са условима између непознатих параметара

Уколико се у моделу (2.1-1) у односу на параметре $\mathbf{x}$ постави услов облика $\mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{w}$, где је $\mathbf{H}$ $\mathbf{r} \times \mathbf{u}$ матрица познатих коефицијената са $\mathbf{r}(\mathbf{H}) = \mathbf{r}$, $\mathbf{r} \leq \mathbf{u}$, а $\mathbf{w}$ је познати (дати) $\mathbf{r} \times 1$ вектор, тада се

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{E}(\mathbf{I}) \text{ са } \mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{w} \text{ и } \mathbf{K}_1 = \sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1}, \quad (2.4-1)$$

назива *Гаус-Марковљев модел са условима*.

Уколико се примени трансформација облика (2.1-4), модел добија следећи облик:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{E(l)} \text{ са } \mathbf{Hx} = \mathbf{w} \text{ и } \mathbf{K}_l = \sigma_0^2 \mathbf{I}. \quad (2.4-2)$$

2.4.1. Најбоља линеарна непомерена оцена непознатих параметара у Гаус-Марковљевом моделу са условима између непознатих параметара

Линеарна функција $\mathbf{a}^T \mathbf{x}$ непознатих параметара $\mathbf{x}$ оцењује се користећи линеарну функцију $\mathbf{c}^T \mathbf{l}$ опажања $\mathbf{l}$, којој се због уведених услова, прикључује линеарна функција облика $\mathbf{d}^T \mathbf{w}$. Вектор $\mathbf{a}$, димензија $\mathbf{ux1}$, је познат, док су непознати $\mathbf{px1}$ вектор $\mathbf{c}$ и $\mathbf{rx1}$ вектор $\mathbf{d}$.

Да би оценили непознате параметре, неопходно је да буду задовољени следећи услови по $\mathbf{x}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{c}^T \mathbf{l} + \mathbf{d}^T \mathbf{w}) &= \mathbf{a}^T \mathbf{x}, \text{ и} \\ \mathbf{V}(\mathbf{c}^T \mathbf{l} + \mathbf{d}^T \mathbf{w}) &= \min. \end{aligned} \quad (2.4.1-1)$$

Проблем се решава преко Лагранжове функције (Koch, 1988), а коначна најбоља линеарна непомерена оцена вектора непознатих параметара $\tilde{\mathbf{x}}$ у Гаус-Марковљевом моделу са условима (2.4-2), гласи:

$$\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \left\{ \mathbf{A}^T \mathbf{l} + \mathbf{H}^T [\mathbf{H}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{H}^T]^{-1} [\mathbf{w} - \mathbf{H}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{l}] \right\}, \quad (2.4.1-2)$$

док матрица коваријанси $\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{x}}}$ гласи:

$$\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{x}}} = \sigma_0^2 \left\{ (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} - (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{H}^T [\mathbf{H}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{H}^T]^{-1} \mathbf{H}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \right\}. \quad (2.4.1-3)$$

2.4.2. Оцена параметара по методи најмањих квадрата у Гаус-Марковљевом моделу са условима између непознатих параметара

Да би оценили непознате параметре по МНК методи неопходно је минимизирати функцију $(\mathbf{l} - \mathbf{Ax})^T (\mathbf{l} - \mathbf{Ax}) / \sigma^2$, уз услове $\mathbf{Hx} = \mathbf{w}$. Без доказа (види, на пример Koch, 1988), нормалне једначине које доводе до решења непознатих параметара $\tilde{\mathbf{x}}$ и Лагранжових мултипликатора $\mathbf{k}$ гласе:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{A} & \mathbf{H}^T \\ \mathbf{H} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{l} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}. \quad (2.4.2-1)$$

Оцене за $\tilde{\mathbf{x}}$ и $\mathbf{k}$ су једнозначне, јер је матрица нормалних једначина регуларна, а параметри $\tilde{\mathbf{x}}$ се оцењују као у (2.4.1-2). Уколико се оцењивач од $\hat{\mathbf{x}}$ замени у (2.4.1-2), добија се нешто другачији облик оцењивача $\tilde{\mathbf{x}}$:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} - (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{H}^T [\mathbf{H}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{H}^T]^{-1} (\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{w}). \quad (2.4.2-2)$$

Инверзија од (2.4.2-1) гласи:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{H}^T \\ \mathbf{H} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^{-1} - \mathbf{N}^{-1} \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{H} \mathbf{N}^{-1} & \mathbf{N}^{-1} \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{H}^T)^{-1} \\ (\mathbf{H} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{H} \mathbf{N}^{-1} & -(\mathbf{H} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{H}^T)^{-1} \end{bmatrix}, \quad (2.4.2-3)$$

где је $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$.

Уз претпоставку о нормалности расподеле грешака резултата мерења, оцена по методи максималне веродостојности иста је као НЛНО и оцена по МНК.

Уколико се ради о оценама по моделу (2.4-1), у наведеним изразима за оцене непознатих параметара $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ се замењује са $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$, а $\mathbf{A}^T \mathbf{I}$ са $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{I}$.

2.4.3. Непомерена оцена варијансе јединичне тежине

Да би се добио непомерени оцењивач од σ_0^2 неопходно је одредити очекивану вредност збира квадрата:

$$\Omega_{\mathbf{H}} = (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{I})^T (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{I}) = \tilde{\mathbf{v}}^T \tilde{\mathbf{v}}, \quad (2.4.3-1)$$

где је оцена вектора резидуала облика:

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{I}. \quad (2.4.3-2)$$

Коваријациона матрица оцена резидуала гласи (Koch,1988):

$$\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{v}}} = \sigma_0^2 (\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T + \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{H}^T (\mathbf{H}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{H}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T) \quad (2.4.3-3)$$

Може се доказати да је:

$$\Omega_{\mathbf{H}} = \Omega + \mathbf{R}, \text{ са } \mathbf{R} = (\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{w})^T (\mathbf{H}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{H}^T)^{-1} (\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{w}), \quad (2.4.3-4)$$

што значи да услови $\mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{w}$ утичу на збир квадрата Ω , односно генерално га увећавају јер је $\mathbf{R} \geq \mathbf{0}$.

Без доказа, непомерена *варијанса јединичне тежине* по моделу (2.4-2) гласи:

$$\tilde{\sigma}_0^2 = \frac{\Omega_n}{\mathbf{n} - \mathbf{u} + \mathbf{r}}, \quad (2.4.3-5)$$

где је $\mathbf{r}$ број услова.

Може се констатовати да оцењивач $\tilde{\mathbf{x}}$ минимизира збир квадрата Ω_n резидуала.

Квадратна форма Ω_n може се срачунати и на други начин, тј.

$$\Omega_n = \mathbf{l}^T \mathbf{l} - \mathbf{l}^T \mathbf{A} \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{w}^T \mathbf{k}. \quad (2.4.3-6)$$

Уколико се нормалне једначине (2.4.2-1) прошире с десна са $[\mathbf{l}^T \mathbf{A} \ \mathbf{w}^T]$ и сумом квадрата $\mathbf{l}^T \mathbf{l}$, након примене Гаусових елиминација, добија се израз облика:

$$\mathbf{l}^T \mathbf{l} - [\mathbf{l}^T \mathbf{A} \ \mathbf{w}^T] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{A} & \mathbf{H}^T \\ \mathbf{H} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{l} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = \mathbf{l}^T \mathbf{l} - [\mathbf{l}^T \mathbf{A} \ \mathbf{w}^T] \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix}, \quad (2.4.3-7)$$

одакле, с обзиром на (2.4.3-6) следи Ω_n .

Контрола рачунања остварује се рачунањем Ω_n на основу израза (2.4.3-1) и (2.4.3-7). Контрола рачунања оцена резидуала $\tilde{\mathbf{v}}$ реализује се на основу $\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{l} - \mathbf{H}^T \mathbf{k})$ који следи из (2.4.2-1), помоћу израза облика:

$$\mathbf{A}^T \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{H}^T \mathbf{k} = \mathbf{0}. \quad (2.4.3-8)$$

ПРИМЕР 2.4.3-1: На основу података из примера 2.1-1, оценити вектор непознатих параметара $\mathbf{x}$ уз услов да висинска разлика између репера 1 и 4 буде једнака 6.100 m. За тежине усвојити $\mathbf{P} = \mathbf{I}$.

РЕШЕЊЕ:

Услов: $\mathbf{H}_4 - \mathbf{H}_1 = 6.100$

Формирање матрице $\mathbf{H}$: Услов: $\mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{w}$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ следи на основу условне једначине } \mathbf{H}_4 = \Delta \mathbf{h}_{14} + \mathbf{H}_1.$$

С обзиром да је модел линеаран и да је висина тачке 1 дата и износи 100.00 m, тада је $\mathbf{w} = 106.100\mathbf{m}$.

По (2.4.1-2) и (2.4.2-2) добијају се идентични резултати за оцену вектор параметара $\mathbf{x}$.

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 101.992 \\ 93.229 \\ 106.100 \end{bmatrix}$$

Сходно (2.4.1-3):

$$\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} 0.3750 & 0.1250 & 0.0000 \\ 0.1250 & 0.3750 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

ПРИМЕР 2.4.3-2 (Koch,1988): Нека следећи парови координата $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$ датих тачака репрезентују криву у равни:

x_i	-1	0	1	2	3
y_i	1.1	1.2	1.9	2.5	3.2

Нека су апсцисе x_i дате, а ординате y_i мерене и нека су мерења независна и исте тачности. Ако претпоставимо да полином другог реда довољно добро репрезентује криву, оценити параметре полинома тако да крива пролази кроз тачку чије су координате $x_4=4$ и $y_4=4.6$.

РЕШЕЊЕ:

Полином има следећи облик $\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 \mathbf{x}_i + \mathbf{a}_2 \mathbf{x}_i^2 = \mathbf{E}(\mathbf{l})$

односно, $\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 \mathbf{x}_j + \mathbf{a}_2 \mathbf{x}_j^2 = \mathbf{y}_j$

или

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{E}(\mathbf{l}) \text{ са } \mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{w} \text{ и } \mathbf{K}_l = \sigma^2 \mathbf{I}.$$

У развијеном облику модел гласи:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{bmatrix}, \mathbf{l} = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 1.2 \\ 1.9 \\ 2.5 \\ 3.2 \end{bmatrix}, \mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = 4.6$$

На основу (2.4.2-1) следи

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{A} & \mathbf{H}^T \\ \mathbf{H} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 15 & 1 \\ & 15 & 35 & 4 \\ & & 99 & 16 \\ \mathbf{S} & & & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{I} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.9 \\ 15.4 \\ 41.8 \\ 4.6 \end{bmatrix}, \mathbf{I}^T \mathbf{I} = 22.75$$

Одакле следи:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1.2966 \\ 0.3289 \\ 0.1242 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{x}}} = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} 0.2932 & -0.0484 & -0.0062 \\ & 0.2792 & -0.0668 \\ \mathbf{S} & & 0.0171 \end{bmatrix}, \Omega_{\mathbf{H}} = 0.0749,$$

$$\tilde{\sigma}_0^2 = \frac{0.0749}{5 - 3 + 1} = 0.0250, \tilde{\sigma} = 0.16$$

Вектор резидуала изгледа:

$$\tilde{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} -0.0081 \\ 0.0966 \\ -0.1502 \\ -0.0486 \\ 0.2015 \end{bmatrix} \text{ и може се проверити преко } \Omega_{\mathbf{H}} = 0.0749 \text{ (израз 2.4.3-4)}$$

Коначан изглед полинома гласи: $1.2966 + 0.3289 \cdot x + 0.1242 \cdot x^2 = y$

$$\tilde{\mathbf{a}}_0 + 4\tilde{\mathbf{a}}_1 + 16\tilde{\mathbf{a}}_2 = 4.599$$

2.4.4. Оцена параметара са условима дефинисаним опажањима малих варијанси

Уколико под условима подразумевамо опажања малих варијанси, тада се Гаус-Марковљев модел са условима (2.4-1) може се трансформисати у модел (2.1-1) без услова (Koch and Pope, 1969 и Koch, 1988). Да би то показали, пођимо од ГММ облика:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{l}} = \begin{bmatrix} \mathbf{l} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{P}}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{c} \cdot \mathbf{I} \end{bmatrix}, \mathbf{c} \neq 0, \mathbf{c} > 0. \quad (2.4.4-1)$$

Сходно (2.4.2-2), оцењивач $\hat{\mathbf{x}}$ изгледа:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{H}^T \mathbf{H} / \mathbf{c})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} + \mathbf{H}^T \mathbf{w} / \mathbf{c}). \quad (2.4.4-2)$$

За мале вредности $\mathbf{c}$ што значи и мале варијансе од $\mathbf{w}$, оцена по (2.4.4-2) је приближно једнака оцени по (2.4.1-2). Вредности за $\mathbf{c}$ морају бити довољно мале тако да разлика између $\hat{\mathbf{x}}$, добијена по (2.4.4-2) и $\tilde{\mathbf{x}}$, добијена по (2.4.2-2) буде безначајна. Провера значајности разлике две оцене може се реализовати рачунањем резидуала за услове. Међутим, $\mathbf{c}$ не сме бити ни превише мало, јер ће угрозити стабилност нумеричког рачунања, с обзиром да у том случају елементи од $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l}$ могу бити безначајни приликом њиховог укључивања у израз (2.4.4-2).

ПРИМЕР 2.4.4-1: На основу података из примера (2.3-1) оценити непознате параметре уз услов да висинска разлика између репера 1 и 4 буде $\mathbf{w}=6.1$ m. За величину $\mathbf{c}$ усвојити $\mathbf{c}=0.05$.

РЕШЕЊЕ:

$$(\mathbf{H}^T \mathbf{H} / \mathbf{c})^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 20 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{H}^T \mathbf{w} / \mathbf{c} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 122 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{vmatrix} 101.990 \\ 93.233 \\ 106.099 \end{vmatrix}$$

2.5. Рекурзивне оцене непознатих параметара

Уколико се резултати мерења у Гаус-Марковљевом моделу прикупљају у дужем временском периоду, за оцену параметара није неопходно чекати да се мерења у потпуности окончају. Понекад је неопходно параметре оцењивати сукцесивно, на основу у датом тренутку расположивих података.

Поделитемо резултате мерења (подразумева се њихова некорелисаност) у два вектора мерења $\mathbf{l}_{m-1}$ и $\mathbf{l}_m$, тј. нека је

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{m-1} \\ \mathbf{A}_m \end{bmatrix}, \mathbf{l} = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_{m-1} \\ \mathbf{l}_m \end{bmatrix}, \mathbf{K}_1 = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{m-1}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_m^{-1} \end{bmatrix}, \quad (2.5-1)$$

са $\mathbf{r}(\mathbf{A}) = \mathbf{r}(\mathbf{A}_{m-1}) = \mathbf{u}$. $\mathbf{K}_1$ је позитивно-дефинитна матрица, што значи да су $\mathbf{P}_{m-1}^{-1}$ и $\mathbf{P}_m^{-1}$ и њихове инверзије такође позитивно-дефинитне.

Оцена непознатих параметара $\mathbf{x}$, сходно (2.2.1-6) добија се на основу израза облика:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}_{m-1}^T \mathbf{P}_{m-1} \mathbf{A}_{m-1} + \mathbf{A}_m^T \mathbf{P}_m \mathbf{A}_m)^{-1} (\mathbf{A}_{m-1}^T \mathbf{P}_{m-1} \mathbf{l}_{m-1} + \mathbf{A}_m^T \mathbf{P}_m \mathbf{l}_m). \quad (2.5-2)$$

Уколико са $\hat{\mathbf{x}}_{m-1}$ означимо оцене параметара засноване на опажањима $\mathbf{l}_{m-1}$ са матрицом коваријанси $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}_{m-1}} = \sigma_0^2 \mathbf{K}_{m-1}$ где је $\mathbf{K}_{m-1} = (\mathbf{A}_{m-1}^T \mathbf{P}_{m-1} \mathbf{A}_{m-1})$ и ако изједначимо $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_m$, јер је $\hat{\mathbf{x}}_m$ оцењивач који проистиче након додавања резултата мерења $\mathbf{l}_m$, тада је:

$$\hat{\mathbf{x}}_m = (\mathbf{K}_{m-1}^{-1} + \mathbf{A}_m^T \mathbf{P}_m \mathbf{A}_m)^{-1} (\mathbf{K}_{m-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{m-1} + \mathbf{A}_m^T \mathbf{P}_m \mathbf{l}_m), \quad (2.5-3)$$

са $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}_m} = \sigma_0^2 \mathbf{K}_m$, где је матрица $\mathbf{K}_m$ једнака инверзној матрици нормалних једначина (2.5-2), односно:

$$\mathbf{K}_m = \mathbf{K}_{m-1} - \mathbf{F}_m \mathbf{A}_m \mathbf{K}_{m-1}, \quad (2.5-4)$$

где је $\mathbf{F}_m$ дефинисано у (2.5-6). Без доказа, коначан облик израза за оцену вектора параметара $\mathbf{x}$ гласи:

$$\hat{\mathbf{x}}_m = \hat{\mathbf{x}}_{m-1} + \mathbf{F}_m (\mathbf{l}_m - \mathbf{A}_m \hat{\mathbf{x}}_{m-1}), \quad (2.5-5)$$

где је:

$$\mathbf{F}_m = \sum_{m-1} \mathbf{A}_m^T (\mathbf{P}_m^{-1} + \mathbf{A}_m \sum_{m-1} \mathbf{A}_m^T)^{-1}. \quad (2.5-6)$$

Ако се претпостави да непознати параметри репрезентују стање променљиве динамичког система који се добијају линеарном трансформацијом из епохе $\mathbf{t}_{m-1}$ у епоху $\mathbf{t}_m$ додајући случајне промене стања, тада се сходно изразима (2.5-4) и (2.5-6) долази до тзв. **Kalman-Bucy** филтера.

2.6. Девијације модела

Оцена параметара у Гаус-Марковљевом моделу према (2.1-1) или (2.1-5) заснива се на претпоставци да се очекиване вредности резултата мерења могу представити матрицом познатих коефицијената као линеарном комбинацијом непознатих параметара и да је матрица тежина резултата мерења позната.

Навешћемо три случаја који доводе у питање наведене претпоставке, и то:

- Број непознатих параметара у моделу је сувише мали;
- Број непознатих параметара у моделу је сувише велики; и
- Матрица тежина није адекватна.

Анализирајмо прва два. Нека модел гласи

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{E}(\mathbf{I}) \quad \text{са} \quad \mathbf{K}_1 = \sigma_0^2 \mathbf{I}, \quad (2.6-1)$$

где је: $\mathbf{A}_1$ $n \times k$ матрица, $\mathbf{A}_2$ $n \times (u - k)$ матрица, $\mathbf{x}_1$ је $k \times 1$ вектор, а $\mathbf{x}_2$ је $(u - k) \times 1$ вектор. Нека је $\mathbf{r}[\mathbf{A}_1 \ \mathbf{A}_2] = \mathbf{u}$, тада се оцењивачи $\hat{\mathbf{x}}_1$ и $\hat{\mathbf{x}}_2$ добијају на основу израза:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \hat{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T \mathbf{I} \\ \mathbf{A}_2^T \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (2.6-2)$$

Ако уведемо следеће ознаке: $\mathbf{N} = \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1$ и $\mathbf{M} = \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_1 \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_2$, инверзна матрица нормалних једначина гласи:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^{-1} + \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_2 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}_1^T \mathbf{N}^{-1} & -\mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_2 \mathbf{M}^{-1} \\ -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_1 \mathbf{N}^{-1} & \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.6-3)$$

С обзиром да је $\mathbf{r}[\mathbf{A}_1 \ \mathbf{A}_2] = \mathbf{u}$, матрице са десне стране су позитивно-дефинитне.

Случај 1 – Број непознатих параметара у моделу је сувише мали

Нека је дат модел облика $\mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 = \mathbf{E}(\mathbf{I})$ са $\mathbf{K}_1 = \sigma_0^2 \mathbf{I}$. На основу (2.6-1) следи $\hat{\mathbf{x}}_1 = (\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{A}_1^T \mathbf{I}$. Међутим, претпоставимо да је модел (2.6-1) адекватан. У

том случају, оцена $\hat{\mathbf{x}}_1$ биће, генерално **померена**, јер сходно (2.6-1) следи $\mathbf{E}(\hat{\mathbf{x}}_1) = (\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{A}_1^T (\mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2)$ или, сходно $\mathbf{A}_1^T \mathbf{A} \neq 0$, следи:

$$\mathbf{E}(\hat{\mathbf{x}}_1) = \mathbf{x}_1 + (\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2. \quad (2.6-4)$$

Варијансе оцењивача $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}_1} = \sigma_0^2 (\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1)^{-1} = \sigma_0^2 \mathbf{N}^{-1}$ су генерално значајно мање (односно, такође су **померене**). Да би се добила матрица коваријанси која одговара оцени $\hat{\mathbf{x}}_1$, неопходно је у (2.6-3) додати позитивно-полудефинитну матрицу $\mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_2 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_1 \mathbf{N}^{-1}$. Такође, и оцењивач варијансе јединичне тежине је генерално **померен**, јер с обзиром на $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{A}_1 \hat{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{l}$ следи (без доказа, види, на пример Koch, 1988):

$$\mathbf{E}(\hat{\mathbf{v}}^T \hat{\mathbf{v}}) = \dots = \sigma_0^2 (\mathbf{n} - \mathbf{k}) + \mathbf{x}_2^T \mathbf{A}_2^T (\mathbf{I} - \mathbf{A}_1 (\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{A}_1^T) \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2 \geq \sigma_0^2 (\mathbf{n} - \mathbf{k}). \quad (2.6-5)$$

Уколико је позната варијанса јединичне тежине и ако је матрица коваријанси уразмерена (*scaled*) са том варијансом чија је вредност $\sigma_0^2 = 1$, тада оцена $\hat{\sigma}_0^2 > 1$ може значити да је, сходно (2.6-5), број параметара у одабраном моделу недовољан (сувише мали).

Случај 2 – Број непознатих параметара у моделу је сувише велики

Нека је постављен модел (2.6-1), а нека је исправан модел облика:

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 = \mathbf{E}(\mathbf{l}), \quad \text{са } \mathbf{K}_1 = \sigma_0^2 \mathbf{I}. \quad (2.6-6)$$

Оцењивач (2.6-2) је **непомерен**, јер с обзиром на (2.6-3) и (2.6-6) следи:

$$\mathbf{E}(\hat{\mathbf{x}}_1) = \left[\mathbf{N}^{-1} + \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_2 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_1 \mathbf{N}^{-1} \quad - \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_2 \mathbf{M}^{-1} \right] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{x}_1 \quad (2.6-7)$$

Варијансе у $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}_1}$ су, сходно (2.6-3), веће.

Што се тиче збира квадрата резидуала, може се доказати да важи следећи однос (Koch, 1988):

$$\mathbf{E}(\hat{\mathbf{v}}^T \hat{\mathbf{v}}) = \dots = \sigma_0^2 (\mathbf{n} - \mathbf{k}), \quad (2.6-8)$$

што значи да је оцена варијансе јединичне тежине **непомерена**.

Случај 3 – Матрица тежина опажања није адекватна

Нека је дат модел облика $\mathbf{Ax} = \mathbf{E(l)}$, са $\mathbf{K}_l = \sigma^2 \mathbf{V}^{-1}$, међутим адекватан модел је другачији и гласи:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{E(l)}, \text{ са } \mathbf{K}_l = \sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1}. \quad (2.6-9)$$

Да би изразили ефекат утицаја некоректног моделовања матрице тежина на оцену вектора непознатих параметара $\hat{\mathbf{x}}$, поћи ће се од претпоставке да је:

$$\mathbf{P} = \mathbf{V} + \Delta \mathbf{V}, \quad (2.6-10)$$

где је $\Delta \mathbf{V}$ такође као и $\mathbf{V}$ позитивно-дефинитна матрица. Оцењивач вектора непознатих параметара $\hat{\mathbf{x}}$, тада гласи (Koch, 1988):

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} = (\mathbf{A}^T \mathbf{V} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \Delta \mathbf{V} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{V} \mathbf{l} + \mathbf{A}^T \Delta \mathbf{V} \mathbf{l}), \quad (2.6-11)$$

а што дефинитивно указује да је оцена $\hat{\mathbf{x}}$ померена. Уколико су елементи матрице $\Delta \mathbf{V}$ занемарљиво мали, тада је производ матрица у којима се $\Delta \mathbf{V}$ душло појављује практично безначајан и може се занемарити. У том случају се може узети да је:

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{V} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \Delta \mathbf{V} \mathbf{A})^{-1} \cong (\mathbf{A}^T \mathbf{V} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{A}^T \Delta \mathbf{V} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{V} \mathbf{A})^{-1}),$$

а уместо оцењивача (2.6-12), може се користити оцењивач облика

$$\hat{\mathbf{x}} \cong (\mathbf{A}^T \mathbf{V} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{V} \mathbf{l} - \mathbf{A}^T \Delta \mathbf{V} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{V} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{V} \mathbf{l} + \mathbf{A}^T \Delta \mathbf{V} \mathbf{l}). \quad (2.6-13)$$

Оцена варијансе јединичне тежине сходно изразу, (Koch, 1988):

$$\mathbf{E}(\hat{\mathbf{v}}^T \hat{\mathbf{v}}) = \sigma_0^2 \text{tr}(\mathbf{P}^{-1} (\mathbf{V} - \mathbf{V} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{V} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{V})) \neq \sigma_0^2 (\mathbf{n} - \mathbf{u}), \quad (2.6-10)$$

је очигледно *померена*.

ПРИМЕР 2.6-1: У мрежи коју чине 4 тачке извршена су мерења свих дужина. Координате тачке 1 и X координата тачке 2 дефинишу датум мреже.

Стандарди мерења дужина се одређују по формули:

а) $\sigma_i = \sqrt{(0.5 \text{ mm})^2 + (0.5 \cdot D_i [\text{km}])^2}$

б) $\sigma_i = \sqrt{(3 \text{ mm})^2 + (3 \cdot D_i [\text{km}])^2}$

Тачка	Y (m)	X (m)
1	225	150
2	530	100
3	570	295
4	250	340

$$d_{12} = 309.0688 \text{ m}$$

$$d_{13} = 374.2348 \text{ m}$$

$$d_{14} = 191.6388 \text{ m}$$

$$d_{23} = 199.0584 \text{ m}$$

$$d_{24} = 368.7849 \text{ m}$$

$$d_{34} = 323.1495 \text{ m}$$

РЕШЕЊЕ:

Матрица дизајна A:

$$A = \begin{array}{c|ccccc} & dy_2 & dx_3 & dy_3 & dx_4 & dy_4 \\ \hline d_{12} & 0.9868 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{13} & 0 & 0.3875 & 0.9219 & 0 & 0 \\ d_{14} & 0 & 0 & 0 & 0.9915 & 0.1305 \\ d_{23} & -0.2009 & 0.9796 & 0.2009 & 0 & 0 \\ d_{24} & 0.7593 & 0 & 0 & 0.6508 & -0.7593 \\ d_{34} & 0 & -0.1393 & 0.9903 & 0.1393 & -0.9903 \end{array}$$

Вектор слободних чланова:

$$f = \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} 2.38 \\ -2.24 \\ -1.10 \\ 1.92 \\ -3.10 \\ -0.92 \end{array} & \begin{array}{c} \text{mm} \\ \text{mm} \\ \text{mm} \\ \text{mm} \\ \text{mm} \\ \text{mm} \end{array} \end{array}$$

$$\sigma_0 = 1$$

а) Дијагонални елементи матрице тежина:

$$P = \begin{array}{c|cccccc} \begin{array}{c} 1.9088 \\ 1.8691 \\ 1.9639 \\ 1.9611 \\ 1.8727 \\ 1.9008 \end{array} & & & & & \end{array}$$

Вектор поправака:

$$v = \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} 1.39 \\ -2.24 \\ -1.10 \\ 2.12 \\ -3.86 \\ -0.92 \end{array} & \hat{\sigma}_0^2 = 53.83 \end{array}$$

б) Дијагонални елементи матрице тежина:

$$P = \begin{vmatrix} 0.1014 & 0.0975 & 0.1072 & 0.1069 & 0.0978 & 0.1006 \end{vmatrix}$$

Вектор поправака:

$$v = \begin{vmatrix} 1.39 \\ -2.24 \\ -1.10 \\ 2.12 \\ -3.86 \\ -0.92 \end{vmatrix} \quad \hat{\sigma}_0^2 = 2.84$$

На основу приказаног примера, може се закључити да неадекватна матрица тежина изазива помереност оцено варијансе јединичне тежине.

2.7. Гаус-Марковљев модел са непотпуним рангом матрице коефицијената једначина резидуала

У моделу (2.1-1) за матрицу A се претпостављало да је са потпуним рангом колона. У овом поглављу ће се анализирати случај када матрица A поседује дефект ранга, али се још увек претпоставља да је матрица коваријанси позитивно дефинитна. Модели са сингуларним матрицама коваријанси могу се наћи у Rao (1973), Schaffrin (1983), Searle (1971) и др.

Уколико у Гаус-Марковљевом моделу за матрицу A важи да је $r(A) = q < u$, тада модел називамо *Гаус-Марковљев модел са непотпуним рангом*.

Модел гласи:

$$Ax = E(l) \text{ са } r(A) = q < u, \quad K_l = \sigma_0^2 I. \quad (2.7-1)$$

Полазећи од оцена дефинисаних у (2.2.1-6), оцена непознатих параметара по моделу (2.7-1) добија се користећи израз облика:

$$\bar{x} = (A^T A)^- A^T l \text{ и } K_{\bar{x}} = \sigma_0^2 (A^T A)^- A^T A \left[(A^T A)^- \right]^T, \quad (2.7-2)$$

где је $\bar{x}$ оцењивач од x , $K_{\bar{x}}$ је матрица коваријанси оцена параметара, а $(A^T A)^-$ је *уопштена инверзија*⁸ (или *g инверзија*) од $A^T A$. С обзиром на

⁸ За неку $n \times m$ матрицу A^- кажемо да је уопштена инверзија од $m \times n$ матрице A , ако је задовољен следећи услов: $AA^-A = A$.

особине уопштених инверзија и неједнозначност од $(A^T A)^-$, оцењивачи $\bar{x}$ и $K_{\bar{x}}$ такође нису *једнозначни*. За разлику од њих, оцене резидуала су *једнозначне* и гласе:

$$\hat{v} = A\bar{x} - I,$$

а једнозначност оцена резидуала произилази из израза $\hat{v} = A(A^T A)^- A^T I - I$ где је $A(A^T A)^- A^T$ *инваријантна* у односу на избор инверзије $(A^T A)^-$. Како је $\hat{v}$ једнозначно, једнозначна је и квадратна форма $\Omega = \hat{v}^T \hat{v}$, која је уједно и минимална. Без доказа (види, на пример, Koch 1988) може се рећи и да је матрица коваријанси оцена резидуала, иако сингуларна, ипак *једнозначна* и гласи:

$$K_{\hat{v}} = \sigma_0^2 (I - A(A^T A)^- A^T) \text{ са } r(K_{\hat{v}}) = n - q \text{ и } \text{tr} K_{\hat{v}} = \sigma_0^2 (n - q). \quad (2.7-3)$$

Непомерена оцена од σ_0^2 у моделу са непотпуним рангом гласи:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\Omega}{n - q}, \quad (2.7-4)$$

где је квадратна форма једнака $\Omega = I^T (I - A(A^T A)^- A^T) I$. Важи однос $\Omega \geq 0$ јер је $I - A(A^T A)^- A^T$ идемпотентна, а уједно је и симетрична.

Покажимо на који начин се рачунају уопштене инверзије симетричних матрица, каква је у овом случају матрица система нормалних једначина $A^T A$. Објаснићемо два начина рачунања: *први* – по дефиницији и *други* – преко базе нултог простора матрице коефицијената система једначина резидуала.

За рачунање уопштене инверзије по дефиницији, поћи ће се од претпоставке да је матрица $A^T A = N$ симетрична и да је $r(A) = r(N) = q < u$. Поделимо матрицу $A^T A = N$ у врсте и колоне, блок матрице облика⁹

$$A^T A = N = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}, \quad (2.7-5)$$

са $(u - q)$ линеарно зависних колона матрице N (у 2.7-5, матрица N_{12}), тако да постоји $qx(u - q)$ матрица M таква да су задовољени следећи односи:

⁹ Матрица N_{11} се добија као $A_1^T A_1$ где је A_1 део матрице A са потпуним рангом колона.

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_{12} &= \mathbf{N}_{11}\mathbf{M}, \\
\mathbf{N}_{22} &= \mathbf{N}_{21}\mathbf{M}, \\
\mathbf{M} &= \mathbf{N}_{11}^{-1}\mathbf{N}_{12}, \\
\mathbf{N}_{22} &= \mathbf{N}_{21}\mathbf{N}_{11}^{-1}\mathbf{N}_{12}
\end{aligned} \tag{2.7-6}$$

Уопштена инверзија $\mathbf{N}^-$ од $\mathbf{N}$ која је уједно *симетрична* и *рефлексивна*¹⁰ ($\mathbf{N}_{rs}^-$) гласи:

$$\mathbf{N}^- = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{N}_{rs}^- \tag{2.7-7}$$

и задовољава следећи услов

$$\mathbf{N}\mathbf{N}^-\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11} & \mathbf{N}_{12} \\ \mathbf{N}_{21} & \mathbf{N}_{21}\mathbf{N}_{11}^{-1}\mathbf{N}_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{N}. \tag{2.7-8}$$

Други избор за уопштену инверзију води преко тзв. основе (базе) нултог простора матрице $\mathbf{A}$. Проширимо $\mathbf{u}\mathbf{x}\mathbf{u}$ матрицу $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$, где је $\mathbf{r}(\mathbf{A}) = \mathbf{r}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = \mathbf{q} < \mathbf{u}$, са матрицом $\mathbf{B}$ тако да се добија матрица $\mathbf{D}$ облика:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T\mathbf{A} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.7-9}$$

уз услов да је:

$$\mathbf{B}\mathbf{x} = 0, \tag{2.7-10}$$

где је $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}\mathbf{x}\mathbf{1}$ вектор непознатих параметара. Матрица $\mathbf{B}$ се бира тако да је $\det(\mathbf{D}) \neq 0$, односно да матрица $\mathbf{D}$ буде регуларна. Како је $\mathbf{r}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = \mathbf{q}$, то је неопходно дефинисати $\mathbf{u} - \mathbf{q}$ услова. Односно, матрица $\mathbf{B}$ мора бити димензија $(\mathbf{u} - \mathbf{q})\mathbf{x}\mathbf{u}$. С обзиром да је $\mathbf{D}$ регуларна матрица, тада је $\mathbf{r} \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} = \mathbf{u}$.

Инверзна матрица од $\mathbf{D}$ гласи:

¹⁰ За $\mathbf{n}\mathbf{x}\mathbf{m}$ матрицу $\mathbf{A}_r^-$ кажемо да је рефлексивна уопштена инверзија од $\mathbf{m}\mathbf{x}\mathbf{n}$ матрице $\mathbf{A}$, ако испуњава следећи услов: $\mathbf{A}\mathbf{A}_r^-\mathbf{A} = \mathbf{A}$ и $\mathbf{A}_r^-\mathbf{A}\mathbf{A}_r^- = \mathbf{A}_r^-$.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_b & \mathbf{H}^T (\mathbf{B} \mathbf{H}^T)^{-1} \\ (\mathbf{B} \mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{H} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.7-11)$$

одакле се добија израз за рачунање кофакторске матрице $\mathbf{Q}_b$ који гласи:

$$\mathbf{Q}_b = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} - \mathbf{H}^T (\mathbf{B} \mathbf{H}^T \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{H}, \quad (2.7-12)$$

где је $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -\mathbf{N}_{21} \mathbf{N}_{11}^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$ и задовољава услове $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{H}^T = \mathbf{0}$ и $\mathbf{A} \mathbf{H}^T = \mathbf{0}$. Матрица $\mathbf{Q}_b$ је уједно *рефлексивна* и *симетрична* инверзија од $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ у ознаци $\mathbf{Q}_b = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})_{rs}^-$, *зависна* је од избора матрице $\mathbf{B}$, односно матрица $\mathbf{Q}_b$ *није јединствена* и задовољени су услови $\mathbf{B} \mathbf{Q}_b = \mathbf{0}$ и $\mathbf{A}^T \mathbf{H} = \mathbf{0}$.

Ако уместо матрице $\mathbf{B}$ одаберемо матрицу $\mathbf{H}$, таква да важе услови:

$$\mathbf{H} \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (2.7-13)$$

$\mathbf{r} \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} = \mathbf{u}$, а $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -\mathbf{N}_{21} \mathbf{N}_{11}^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$ је раније дефинисана матрица, при чему је:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{A} & \mathbf{H}^T \\ \mathbf{H} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_H & \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{H}^T)^{-1} \\ (\mathbf{H} \mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{H} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (2.7-14)$$

Тада је (Koch, 1988)

$$\mathbf{Q}_H = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} - \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}, \quad (2.7-15)$$

тј.

$$\mathbf{Q}_H = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^+, \quad (2.7-16)$$

*псеудоинверзија*¹¹ од $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ која је за разлику од уопштене инверзије *јединствена* и даје *једнозначно* решење.

¹¹ За $\mathbf{n} \times \mathbf{m}$ матрицу $\mathbf{A}^+$ кажемо да је псеудоинверзија или Moore-Penrose инверзија од $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ матрице $\mathbf{A}$ ако задовољава следећи услов: $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^- \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^- \mathbf{A}^T$. Неке од особина псеудоинверзија су: 1) $\mathbf{A}^+$ је јединствена и $\mathbf{r}(\mathbf{A}^+) = \mathbf{r}(\mathbf{A})$, 2) $(\mathbf{A}^+)^+ = \mathbf{A}$, 3) Уколико матрица $\mathbf{A}$ има потпун ранг врста, а матрица $\mathbf{B}$ потпун ранг колона, тада је $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1}$ и $\mathbf{B}^+ = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T$, 4) ако је $\mathbf{A}$ регуларна $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ матрица, тада је $\mathbf{A}^- = \mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^{-1}$.

Матрица $\mathbf{H}$ има потпун ранг врста, $\mathbf{r}(\mathbf{H}^T) = \mathbf{u} - \mathbf{q}$, а колоне матрице $\mathbf{H}^T$ конституишу базу нултог простора матрице $\mathbf{Q}_H$, а самим тиме и базу решења хомогеног система једначина опажања.

Без доказа, важи однос (Koch,1988):

$$\mathbf{Q}_H = \mathbf{Q}_H \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{Q}_H \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{Q}_H, \quad (2.7-17)$$

Следећа теорема је од посебне важности.

Теорема 2.7-1: Систем линеарних једначина $\mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{l}$ има решење користећи псеудоинверзију облика $\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{A}^T \mathbf{l}$ ако и само ако је $\mathbf{x}^T \mathbf{x}$ минимално у односу на сва остала решења у простору решења система линеарних једначина.

До матрице $\mathbf{N}^+$ може се доћи и на следећи начин. Наиме, нека је $\mathbf{Y}$ матрица сопствених вектора од $\mathbf{N}$ и где је $\mathbf{N}$ уређено као у (2.7-5), па је сходно томе и $\mathbf{Y} = [\mathbf{Y}_1 \ \mathbf{Y}_2]$. Важи однос:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{Y}_1 \ \mathbf{Y}_2] \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1^T \\ \mathbf{Y}_2^T \end{bmatrix} = \mathbf{Y}_1 \Lambda \mathbf{Y}_1^T, \quad (2.7-18)$$

где је:

$$\mathbf{N}^+ = \mathbf{Y}_1 \Lambda^{-1} \mathbf{Y}_1^T,$$

и задовољава услов $\mathbf{Y}_1^T \mathbf{Y}_1 = \mathbf{I}$ и $\mathbf{N} \mathbf{N}^+ = \mathbf{N}^+ \mathbf{N} = \mathbf{Y}_1 \mathbf{Y}_1^T$.

ПРИМЕР 2.7-1: На основу података мерења у нивелмаској мрежи из задатка 2.3-1, при $P=I$. Наћи решење:

- а) преко $\mathbf{N}^+$
- б) преко $\mathbf{Q}_B$
- ц) преко $\mathbf{Q}_H$

РЕШЕЊЕ под а):

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Означимо 2, 3. и 4. колону матрице A као A_1 која има потпун ранг колоне (3)
 $r(A)=r(A^T A)=3$, $\det(N)=0$, $N= A^T A$

Решење за N^- по 2.7-7 :

$$N = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$N^- = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.625 & 0.375 & 0.5 \\ 0 & 0.375 & 0.625 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 1 \end{vmatrix}$$

а вектор параметара гласи:

$$\hat{x} = \begin{vmatrix} 0.000 \\ 102.001 \\ 93.239 \\ 106.119 \end{vmatrix}$$

Први елемент у вектору x се одбацује, а следећа три су оцено непознатих параметара (у нашем примеру, висине). Решење је идентично решењу из примера 2.3-1A, тј. када је одбачена прва колоне матрице A .

РЕШЕЊЕ под б): $B = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$

Матрица N гласи:

$$N = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

а N^{-1} гласи

$$N^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & -5.55112E-17 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.625 & 0.375 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0.375 & 0.625 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Означени део од N^{-1} једнак је Q_B .

Вектор решења гласи:

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -5.92004\text{E-}15 \\ 102.001 \\ 93.239 \\ 106.119 \end{bmatrix}$$

где се први члан вектора $\mathbf{x}$ одбацује.

$$\text{tr}Q_B = 2.25$$

РЕШЕЊЕ под ц):

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Матрица $\mathbf{N}$ гласи:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & \mathbf{1} \\ -1 & 3 & -1 & -1 & \mathbf{1} \\ -1 & -1 & 3 & -1 & \mathbf{1} \\ 0 & -1 & -1 & 2 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix}$$

Матрица $\mathbf{N}^{-1}$ гласи:

$$\mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.3125 & -0.0625 & -0.0625 & -0.1875 & \mathbf{0.25} \\ -0.0625 & 0.1875 & -0.0625 & -0.0625 & \mathbf{0.25} \\ -0.0625 & -0.0625 & 0.1875 & -0.0625 & \mathbf{0.25} \\ -0.1875 & -0.0625 & -0.0625 & 0.3125 & \mathbf{0.25} \\ \mathbf{0.25} & \mathbf{0.25} & \mathbf{0.25} & \mathbf{0.25} & 0 \end{bmatrix}$$

Означени део у $\mathbf{N}^{-1}$ једнак је Q_H .

Q_E се може срачунати и на основу израза (2.7-15), што је идентично горе означеним решењем.

$$(Q_H) = \begin{bmatrix} 0.3125 & -0.0625 & -0.0625 & -0.1875 \\ -0.0625 & 0.1875 & -0.0625 & -0.0625 \\ -0.0625 & -0.0625 & 0.1875 & -0.0625 \\ -0.1875 & -0.0625 & -0.0625 & 0.3125 \end{bmatrix}$$

Оцена вектора непознатих параметара са минималним трагом од Q_H :

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -0.33975 \\ 1.6615 \\ -7.101 \\ 5.77925 \end{bmatrix}$$

Ако вектору решења из практичних разлога додамо 100.33975 добија се решење са $\text{tr}Q_E = \min$:

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 100.000 \\ 102.001 \\ 93.239 \\ 106.119 \end{bmatrix}$$

$$\text{tr}Q_E = 1$$

ПРИМЕР 2.7-2: Нека је дата матрица $\mathbf{A}$ чији је ранг $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{A}) \leq \min(\mathbf{m}, \mathbf{n})$. Наћи $\mathbf{g}$ инверзију од $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Први корак: Пронаћи квадратну регуларну субматрицу $\mathbf{A}_{11}$ са рангом $\mathbf{r}$ матрице

$\mathbf{A}_{\text{nm}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$. Димензије матрице $\mathbf{A}_{21}$ износе $\mathbf{s} \times \mathbf{r}$, матрице $\mathbf{A}_{12}$ су $\mathbf{r} \times \mathbf{t}$, а $\mathbf{A}_{22}$ су $\mathbf{s} \times \mathbf{t}$, при чему је $(\mathbf{n} = \mathbf{r} + \mathbf{s}, \mathbf{m} = \mathbf{r} + \mathbf{t})$.

Други корак: Једно решење за $\mathbf{g}$ инверзију гласи $\mathbf{A}_{\text{nm}}^- = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$, при чему је $\mathbf{A}_{11}^{-1}$ регуларна инверзија од $\mathbf{A}_{11}$. Дата матрица $\mathbf{A}$ има ранг 2, тако да је:

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ односно } \mathbf{A}_{11}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ па је коначно } \mathbf{A}^- = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Трећи корак: Доказ - $\mathbf{A} \mathbf{A}^- \mathbf{A} = \mathbf{A}$.

2.8. Инваријантне (оцењиве) функције

С обзиром да оцене непознатих параметара у ГММ са непотпуним рангом нису непомерене, интересантно је пронаћи да ли постоје неке функције од параметара чији су оцењивачи непомерени.

За линеарну функцију $\mathbf{a}^T \mathbf{x}$ параметара $\mathbf{x}$ у моделу (2.7-1), где је $\mathbf{a}$, $n \times 1$ вектор, каже се да је оцењива, односно назива се оцењивом функцијом, уколико постоји $n \times 1$ вектор $\mathbf{c}$, такав да за свако $\mathbf{x}$ важи релација

$$\mathbf{E}(\mathbf{c}^T \mathbf{l}) = \mathbf{a}^T \mathbf{x}. \quad (2.8-1)$$

Уколико је $\mathbf{a}^T \mathbf{x}$ оцењива функција, тада је $\mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{a}^T \mathbf{x}$ за свако $\mathbf{x}$ и сходно (2.2.1-3) важи однос:

$$\mathbf{c}^T \mathbf{A} = \mathbf{a}^T. \quad (2.8-2)$$

Без доказа, у моделу (2.7-1) следеће функције се сматрају оцењивим:

- Вектор $\mathbf{E}(\mathbf{l})$ очекиваних вредности резултата мерења $\mathbf{l}$; (2.8-3)

- Линеарне функције оцењивих функција; и (2.8-4)

- Пројекциони параметри $\mathbf{x}_b$ где је $\mathbf{x}_b = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$. (2.8-5)

У погледу оцењивости функција важи следећа теорема - Најбољи линеарни непомерени и једнозначни оцењивач $\hat{\alpha}$ и његова једнозначна варијанса $\mathbf{V}_{\hat{\alpha}}$ оцењиве функције $\alpha = \mathbf{a}^T \mathbf{x}$ непознатих параметара $\mathbf{x}$ у ГММ (2.7-1) дат је изразом облика:

$$\hat{\alpha} = \mathbf{a}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{l} \text{ и } \mathbf{V}_{\hat{\alpha}} = \sigma_0^2 \mathbf{a}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{a}. \quad (2.8-6)$$

Услед важности даљих разматрања посебно ћемо истаћи оцењивост пројекционих параметара.

Линеарна трансформација параметара $\mathbf{x}$ у оцењиве функције назива се **репараметризацијом**. Интерпретација односа на тај начин добијених оцењивих функција и параметара често је проблематична, тако да ће се овом приликом до оцењивих функција доћи пројектовањем параметара.

С обзиром на (2.8-5) вектор

$$\mathbf{x}_b = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (2.8-7)$$

представља оцењиву функцију. С обзиром да је матрица $(A^T A)^- A^T A$ идемпотентна и како је $r((A^T A)^- A^T A) = q$, израз $(A^T A)^- A^T A$ представља **оператор** пројектовања. Дакле, оцењива функција $\hat{x}_b$ дефинише се пројектовањем вектора x из u - димензионалног Еуклидовога простора E^u , где је $x \in E^u$, у q - димензионални подпростор E^q , такав да важи $\hat{x}_b \in E^q$.

С обзиром да уопштена инверзија није јединствена, могућ је велики број пројекција који дефинишу оцењиве функције по (2.8-7). До једнозначног решења долази се једино применом псеудоинверзије $(A^T A)^+$ од $A^T A$, тј.

$$\hat{x}_e = (A^T A)^+ A^T l, \text{ са } K_{\hat{x}_e} = \sigma_0^2 (A^T A)^+. \quad (2.8-8)$$

Практични изрази за рачунање $(A^T A)^-$ и $(A^T A)^+$ добијају се увођењем $(u - q) \times u$ матрице B и $(u - q) \times u$ матрице H . За матрицу B важи услов да је $Bx = 0$, а за матрицу H , $Hx = 0$ и $A^T H = 0$ (види 2.7). Оцењивачи $\hat{x}_b$ и $\hat{x}_n$ тада гласе:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_b \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T A & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A^T l \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ или } \hat{x}_b = (A^T A + B^T B)^{-1} A^T l, \quad (2.8-9)$$

односно

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T A & H^T \\ H & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A^T l \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ или } \hat{x}_n = (A^T A + H^T H)^{-1} A^T l, \quad (2.8-10)$$

где је k , $(u - q) \times 1$ вектор, о којем ће касније бити више речи.

Оцењивачи идентични са (2.8-9) и (2.8-10) добијају се по (2.4.2-1), користећи МНК у ГММ са условима:

$$Ax = E(l) \text{ са } Bx = 0 \text{ и } K_l = \sigma_0^2 I, \quad (2.8-11)$$

и

$$Ax = E(l) \text{ са } Hx = 0, A^T H = 0 \text{ и } K_l = \sigma_0^2 I. \quad (2.8-12)$$

На основу напред изнетог, може се закључити – уколико се инверзна матрица нормалних једначина приликом оцена непознатих параметара у ГММ са непотпуним рангом замени са симетричном рефлексивном уопштенom

инверзијом или псеудоинверзијом, а до којих се може рачунски доћи сходно условима (2.8-11) или (2.8-12), тада најбољи линеарни непомерени оцењивачи (2.8-7) и (2.8-8) непознатих параметара следе сходно ГММ са непотпуним рангом. У том случају, пројектори дефинисани у (2.8-7) и (2.8-8) могу се интерпретирати као $\mathbf{u} - \mathbf{q}$ услова $\mathbf{B}\mathbf{x} = 0$ или $\mathbf{H}\mathbf{x} = 0$. Услови овог типа још се називају *условима идентификативности (identifiability constraints)*. Уколико се као пројектор користи псеудоинверзија $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^+$, тада се добија оцењивач од $\mathbf{x}_H$ такав да матрица коваријанси непознатих параметара има *минимални траг* јер је $\text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^+ \leq \text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})_{\text{rs}}^-$. Осим тога, за оцењивач $\hat{\mathbf{x}}_H$ важи још један услов, а то је $\hat{\mathbf{x}}_H^T \hat{\mathbf{x}}_H = \min$ (минимална норма решења). Детаљније о појединим решењима биће више речи у трећем поглављу.

Матрица $\mathbf{H}^T$ чије колоне формирају базу нултог простора матрице $\mathbf{A}$ може се добити на основу израза датог у поглављу 2.7 или се до ње долази на основу познатих геометријских услова који важе у геодетским мрежама.

2.9. Глобални тест модела

Тестирање адекватности постављеног ГММ, сходно анализи у поглављу 2.6., значајно је за даљу обраду и оцену непознатих параметара. Очигледно, нас интересују само непомерене оцене. Међутим, сходно случајевима 1 и 3, уколико је моделом обухваћен мањи број параметара од неопходног или су тежине неадекватне, оцена резидуала, а самим тиме и оцена варијансе јединичне тежине биће померена. Принципи тестирања хипотеза обрађени су у ранијим предметима области рачуна изравнања. За случај тестирања адекватности ГММ, укратко ће се показати начин дефинисања нулте хипотезе и тест величине, на основу које за одређени ниво поверења оцењује њена сагласност са претпостављеном вредношћу.

Критеријум нулте хипотезе глобалног теста модела гласи:

$$\mathbf{H}_0 : \mathbf{E}(\hat{\sigma}_0^2) = \sigma_0^2. \quad (2.9-1)$$

Статистика

$$\mathbf{T} = \frac{\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}}}{\sigma_0^2}, \quad (2.9-2)$$

под претпоставком да важи $\mathbf{H}_0$ има χ^2 расподелу са $\mathbf{f} = \mathbf{n} - \mathbf{u}$ степени слободe, у ознаци $\mathbf{T} \sim \chi^2(\mathbf{n} - \mathbf{u}) | \mathbf{H}_0$. За α се обично узима $\alpha = 0.05$, а вредност χ^2 квантила односи се на $\mathbf{n} - \mathbf{u}$ степени слободe. Вредност $\chi_{\alpha, \mathbf{f}}^2$ се упоређује са статистиком $\mathbf{T}$, при чему се поставља следећи услов¹²:

$$\mathbf{T} \leq \chi_{\alpha, \mathbf{f}}^2. \quad (2.9-3)$$

Тест не може доказати коректност резултата мерења али ако је услов испуњен, може се тврдити да не постоји контрадикција између резултата мерења и математичког модела. У случају да је $\mathbf{T} > \chi_{\alpha, \mathbf{f}}^2$, неопходно је испитати разлог појаве таквог односа.

Могући разлози за такву појаву могу бити различити, и то:

У функционалном моделу:

- пројекција (координатни систем)
- инструмент (калибрациони параметри)
- гравитационо поље
- модел рефракције
- фактор време

У резултатима мерења (опажањима):

- грубе грешке
- грешке записивања
- нестабилне тачке
- грешке центрисања

У стохастичком моделу:

- *a priori* варијанса
- корелација

У обради резултата мерења:

- програми
- улазни параметри

¹² Иако у литератури преовлађује тврдња да се ради о једностраном тесту, има и оних аутора који тест адекватности модела третирају као обострани тест. Наиме, тада уместо (2.9-3) област прихватања нулте хипотезе гласи $\chi_{1-\alpha/2}^2 \leq \mathbf{T} \leq \chi_{\alpha/2}^2$.

- нумеричка стабилност рачунања
- накупљене грешке заокруживања.

3. ДЕФИНИСАЊЕ КООРДИНАТНОГ СИСТЕМА У ГЕОДЕТСКИМ МРЕЖАМА

Са математичког становишта проблем дефинисања геодеetskог координатног система (геодеetskог датума) може се поистоветити са неадекватним моделовањем. Уколико се користи функционални модел облика:

$$\mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{Ax},$$

непознати параметри се бирају тако да се могу оценити из резултата мерења. Очигледно је да се само на основу мерења висинских разлика не могу оценити апсолутне висине тачака. Или, да би се оцениле координате положаја непознатих тачака није довољно само мерити углове и дужине. Није случајно изабрано да се у геодеетским мрежама као непознати параметри користе висине и координате. За такво опредељење постоје бројни оправдани разлози, и то:

- Једначине опажања су једноставне и лако их је програмирати за потребе рачунарске обраде;
- Коваријациона матрица непознатих параметара добија се у поступку оцене параметара, што доприноси једноставности поступка; и
- Резултат обраде је јасан и геометријски се може лако описати, чиме се по потреби омогућује накнадна обрада и јасан опис поступка.

У намери да се дође до адекватног решења, у даљој анализи проблема геодеetskог датума пажљиво ће се анализирати сви аспекте проблема.

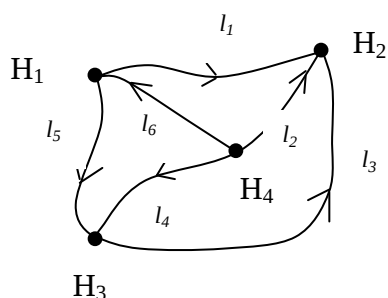
Пре појаве и масовне употребе компјутера, проблем геодеetskог датума није био изражен у теорији изравњања. Због мањег броја једначина, чешће је коришћено тзв. *условно изравњање*. Међутим, касније услед тешкоћа у програмирању условних једначина, а посебно када су мерења дужина постала масовна појава, приоритет је дат тзв. *параметарском изравњању* или како се још уобичајено назива – *посредно изравњање*. Међутим, проблем датума увек је био актуелан, али се раније третирао независно од поступка изравњања.

Пре детаљног разматрања овог проблема, на примерима нивелманске и триангулационе мреже илустроваће се значај проблема (Caspery, 1988). На слици 3.1 приказана је 1Д мрежа. Мерено је шест висинских разлика између четири тачке. Висине тачака представљају параметре модела. Матрица **A** садржи само три линеарно независне колоне, док је четврта колона линеарна комбинација остале три. У том случају се каже да постоји вектор облика

$\lambda = (\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3 \ \lambda_4)^T$ такав да постоји најмање једна вредност $\lambda_i \neq 0$ тако да важи релација:

$$\mathbf{A} \cdot \lambda = 0 \quad (3-1)$$

која представља дефиницију **линеарне зависности**. Матрица нормалних једначина $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$ је димензија 4x4 и има ранг једнак броју независних колона матрице $\mathbf{A}$, тј. у нашем примеру $r(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}) = 3$. На основу тога се може рећи да је матрица нормалних једначина **сингуларна**, односно не постоји њена **регуларна инверзија**, а самим тиме **није могуће** оценити непознате висине тачака. У таквим ситуацијама се каже да је матрица $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$ **дефектна** по рангу или да има **дефект ранга** који је једнак разлици димензије и ранга квадратне матрице. У случају 1Д мреже, матрица нормалних једначина $\mathbf{A}$ има дефект ранга $\mathbf{d} = 1$. Дефектност се елиминише укључивањем информације о референтној површи система висина, чиме се дефинише геодетски датум.



$$\text{ГММ: } \mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{P} = \mathbf{I}$$

$$\begin{aligned} l_1 + v_1 &= -H_1 + H_2 & . & & . \\ l_2 + v_2 &= . & +H_2 & & . & -H_4 \\ l_3 + v_3 &= . & +H_2 & -H_3 & . \\ l_4 + v_4 &= . & . & +H_3 & -H_4 \\ l_5 + v_5 &= +H_1 & . & -H_3 & . \\ l_6 + v_6 &= +H_1 & . & . & -H_4 \end{aligned}$$

Слика 3.1: 1Д мрежа

Матрица коефицијената једначина резидуала $\mathbf{A}$ гласи:

$$\mathbf{A}_{6 \times 4} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & . & . \\ . & 1 & . & -1 \\ . & 1 & -1 & . \\ . & . & 1 & -1 \\ 1 & . & -1 & . \\ 1 & . & . & -1 \end{bmatrix}$$

6 редова (опажања)

4 колоне (непознати параметри)

$$\mathbf{A} \cdot \lambda = 0 \text{ за } \lambda = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$$

$$r(\mathbf{A}) = 3, \mathbf{d} = 4 - 3 = 1$$

Матрица нормалних једначина:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{A}^T \mathbf{l} = 0$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{N}$$

$$\mathbf{N}_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\lambda} = 0 \text{ за } \boldsymbol{\lambda} = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$$

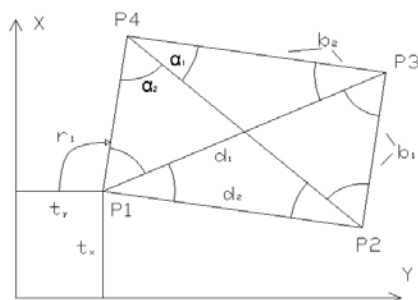
$$\mathbf{r}(\mathbf{N}) = 3, \quad \mathbf{d} = 4 - 3 = 1$$

С обзиром на дефектност од $\mathbf{N}$, може се констатовати да не постоји матрица $\mathbf{B}$ за коју се може рећи да задовољава следећи услов: $\mathbf{NB} = \mathbf{BN} = \mathbf{I}$, што има за последицу следеће:

- матрица $\mathbf{N}$ не поседује регуларну инверзију; и
- не постоји решење за вектор непознатих параметара $\mathbf{x}$.

Проблем се решава дефинисањем референтног система висина, тј. translацијом мреже по висини.

Размотримо сада случај 2Д геодетске мреже. Нека је дата мрежа облика геодетског четвороугла и нека су у њој мерени само углови (8 углова). Тада је матрица коефицијената $\mathbf{A}$ реда 8×8 , а њен ранг је $\mathbf{r}(\mathbf{A}) = 4$ и исти је као и ранг матрице нормалних једначина $\mathbf{r}(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}) = 4$. У том случају, дефект ранга износи $\mathbf{d} = 4$, одакле следи да би се датум дефинисао, неопходно је увести четири независне величине – две translације којима ће се лоцирати координатни систем, једна ротација којом ће се координатни систем оријентисати и размера. Уколико су мерене дужине, размера ће се њима дефинисати и тада се она приликом дефинисања датума изоставља. Слично томе, и оријентација ће бити дефинисана уколико су правци унапред оријентисани.



Опажања:

8 углова - $\alpha_1, \dots, \alpha_8$

6 дужина - $d_1, \dots, d_6$

12 праваца - $b_1, \dots, b_{12}$

Непознати параметри:

8 координата

$$\text{ГММ: } \mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{Ax}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1}$$

Размотримо проблем дефинисања координатног система у случају појединог типа мерења, појединачно:

- Мерени само углови: $\mathbf{A}_{8 \times 8}$, $r(\mathbf{A}) = 4 \Rightarrow \mathbf{d} = 8 - 4 = 4$,
- Мерене само дужине: $\mathbf{A}_{6 \times 8}$, $r(\mathbf{A}) = 5 \Rightarrow \mathbf{d} = 8 - 5 = 3$,
- Мерени само правци: $\mathbf{A}_{12 \times 12}$, $r(\mathbf{A}) = 8 \Rightarrow \mathbf{d} = 12 - 8 = 4$.

Проблем датума се може генерализовати и за случај 3Д мреже. Максимални дефект ранга у случају 3Д мреже износи $\mathbf{d} = 7$. То значи, да би се дефинисао координатни систем, неопходно је 7 независних величина. Као и у случају 2Д мреже, број параметара се може смањити уколико су мерене дужине и на пример, зенитни углови. Тада је број непознатих параметара и уједно дефект ранга једнак $\mathbf{d} = 5$.

У државној мрежи, проблем дефинисања координатног система био је актуелан само у тренутку развијања мреже највишег реда. Након тога, када се год координате датих тачака појављују у ГММ, оне се фиксирају, тада је модел регуларан и тиме је датум одређен. Међутим, праћењем геодинамичких феномена дошло се до закључка да постојеће мреже датих тачака нису савршене и да не материјализују адекватно координатни систем, поготову појединачне тачке. Односно, схватило се да је датум променљив (слабо дефинисан) и да га треба дефинисати у сваком посебном случају, а не као јединствен случај.

Слично је и код мрежа специјалне намене (на пример, мреже које се користе у деформационој анализи). Код таквих мрежа, захтевана тачност датих тачака је већа од тачности постојећих тачака државне мреже. Када би таквим тачкама дефинисали датум једне специјалне мреже, покварила би се прецизност оцена положаја новоодређених тачака и таква мрежа не би могла служити својој основној намени. Из тих разлога се и не поставља услов њиховог везивања за државну мрежу већ се третирају као слободне, а проблем датума се разматра посебно за сваку мрежу.

3.1. Конвенционални начини дефинисања координатног система и трансформација координатних система

У приликама које захтевају развијање тзв. мрежа специјалних намена (најчешће се сусрећу у инжењерској геодезији) увек се јавља проблем дефинисања координатног система. Као што смо напред истакли, координатни систем се дефинише фиксирањем датумских параметара. Такође смо истакли да је број датумских параметара једнак дефекту ранга. Проблем

неопходног броја датумских параметара у геодетским мрежама (1Д, 2Д и 3Д) у конвенционалном смислу своди се на следеће констатације:

- **1Д мрежа:** Референтна површ је еквипотенцијална површ. Дефинише се слободним фиксирањем висине (гравитације) **једне** тачке, док је у већини случајева, размера дефинисана висинским разликама. Уколико и размеру третирамо као параметар датума, тада се и **једна** висинска разлика мора фиксирати.
- **2Д мрежа:** Правоугли координатни систем дефинисан је са координатама једне тачке (**x, y**) и правцем ка другој тачки. Уколико нису мерене дужине, размера се мора дефинисати, односно **једна** дужина се мора фиксирати. У том случају, координатни систем се најчешће дефинише са две тачке, односно **четири** координате.
- **3Д мрежа:** Правоугли просторни координатни систем се дефинише фиксирањем једне тачке (**x, y, z**), једним азимутом стране и са два зенитна угла. Као и у претходном случају, фактор размере се мора укључити, уколико дужине нису мерене. Такође, као алтернатива, координатни систем се може дефинисати са две тачке (шест координата) и још једним допунским елементом .

У случајевима када се користи неки други, неправоугли координатни систем, његово дефинисање је нешто компликованије. О проблемима те врсте биће речи у оквиру наставе из посебних предмета.

Када је нека мрежа дефинисана у једном координатном систему, једноставно се може трансформисати у други, познати координатни систем. При томе се води рачуна да геометрија мреже буде очувана. Број параметара такве једне трансформације не сме бити већи од датумског дефекта. Таква трансформација се још назива и **трансформацијом сличности** или **similarity transformation**. Максималан број параметара и њихово геометријско значење дефинисани су на следећи начин:

- **1Д мрежа:** $d=1(2)$; t_z - помак у правцу Z (H) осе (s – фактор размере у специјалним случајевима);
- **2Д мрежа:** $d = 3(4)$; t_x – транслација у правцу X осе, t_y – транслација у правцу Y осе, r_z - ротација око Z осе (s – фактор размере, уколико нису мерене дужине); и
- **3Д мрежа:** $d = 6(7)$; t_x – транслација у правцу X осе, t_y – транслација у правцу Y осе, t_z - транслација у правцу Z осе, r_x - ротација око X осе, r_y - ротација око Y осе, r_z - ротација око Z осе (s – фактор размере, уколико нису мерене дужине).

Разлог што је фактор размере третиран различито од осталих параметара лежи у чињеници да мерене дужине поседују информацију о размери мреже. У табели 3.1-1 дефинисана су мерења која се у геодезији изводе и коју датумску информацију са собом она носе (Caspary, 1988).

Табела 3.1-1: Датумске информације садржане у геодетским опажањима

Геодетско опажање	Датумски параметар			
	t_x	t_y	r_z	s
Дужине	-	-	-	+
Хоризонтални углови	-	-	-	-
Правци	-	-	-	-
Азимути (астрономски, жирокопски)	-	-	+	-
Положај (астрономски, ГПС)	+	+	+	+
Разлика положаја (ГПС, Инерцијални системи)	-	-	+	+

3.2. Дефинисање координатног система геодетске мреже помоћу датих тачака (рачунска основа нулте варијансе)

У поглављима 2.4 и 2.7. упознали смо се са случајевима када је однос између непознатих параметара дефинисан одређеним условима и како се долази до решења система нормалних једначина са непотпуним рангом матрице система нормалних једначина $\mathbf{N}$. Видели смо да се до решења долази увођењем матрица $\mathbf{B}$ (2.7-10) и $\mathbf{H}$ (2.7-13), које су дефинисане увођењем одређених услова, дакле алгебарским начином. У оквиру овог поглавља размотрићемо још два начина решавања проблема сингуларитета. Оба спадају у тзв. алгебарске начине дефинисања недостајућих датумских информација.

Класичан начин дефинисања координатног система геодетске мреже реализује се одбацивањем колона матрице система једначина опажања $\mathbf{A}$ које се односе на параметре (координате датих тачака) које фиксирамо тако да прираштаји координата датих тачака буду једнаке нули. Математички то изгледа овако:

$$\mathbf{l} + \mathbf{v} = [\mathbf{A}_1 \ \mathbf{A}_2] \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \hat{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix}, \quad (3.2-1)$$

где $\mathbf{d}$ компонената од $\hat{\mathbf{x}}_2$ дефинише координатни систем, а колоне матрице $\mathbf{A}_2$ су линеарне комбинације од $\mathbf{A}_1$. Број колона матрице $\mathbf{A}_2$ једнак је $\mathbf{d}$, а линеарна зависност значи да постоји извесна матрица $\mathbf{L}$, таква да је

$$\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{L} = \mathbf{A}_2. \quad (3.2-2)$$

Заменом (3.2-2) у (3.2-1) добија се израз облика:

$$\mathbf{l} + \mathbf{v} - \mathbf{A}_1 \mathbf{L} \hat{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{A}_1 \hat{\mathbf{x}}_1, \quad (3.2-3)$$

који представља модел са потпуним рангом и који указује да ће приближне координате од вектора $\hat{\mathbf{x}}_2$ остати непромењене.

Оцена непознатих параметара $\hat{\mathbf{x}}_1$ реализује се применом МНК методе и за $\hat{\mathbf{x}}_2 = 0$, гласи:

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = (\mathbf{A}_1^T \mathbf{P} \mathbf{A}_1) \mathbf{A}_1^T \mathbf{P} \mathbf{l}, \quad (3.2-4)$$

а одговарајућа кофакторска матрица или **матрица кофактора оцена непознатих параметара** $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_1}$, односно **матрица коваријанси непознатих параметара** $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}_1}$ изгледају:

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_1} = (\mathbf{A}_1^T \mathbf{P} \mathbf{A}_1)^{-1}, \text{ односно } \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}_1} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_1}. \quad (3.2-5)$$

За $\hat{\mathbf{x}}_2 \neq 0$ дефинише се опште решење које гласи:

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = (\mathbf{A}_1^T \mathbf{P} \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P} (\mathbf{l} - \mathbf{A}_1 \mathbf{L} \hat{\mathbf{x}}_2) \text{ или} \quad (3.2-6)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = \hat{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{L} \hat{\mathbf{x}}_2 \text{ за било које } \hat{\mathbf{x}}_2.$$

У том случају кофакторска матрица $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_1}$ не зависи од задатих услова за вредности $\hat{\mathbf{x}}_2$, већ само од избора тачака којима се дефинише координатни систем геодетске мреже. У литератури (на пример Caspary, 1987) такве тачке којима се дефинишу параметри датума, односно координатни систем геодетске мреже, називају се **рачунском основном моделу нулте варијансе**. Код таквих модела сви елементи матрице коваријанси $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}$ су релативни у односу на избор рачунске основе (датих тачака).

Поред наведеног поступка, постоји општије решење које подразумева примену ГММ са $\mathbf{d}$ услова. Овакав проблем своди се на модел описан у 2.4.

3.3. Дефинисање координатног система у геодетским мрежама постављањем датумских услова

У поглављу 2.4, изразима 2.4-1 и 2.4-2, дефинише се ГММ са условима између параметара модела. Између параметара могу се поставити различити односи. Када је реч о координатном систему геодетске мреже, услови између параметара дефинишу се на следећи начин:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{l} + \mathbf{v} \\ \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{w} \end{aligned}, \quad (3.3-1)$$

где је $\mathbf{w} = \mathbf{const.}$, а нормалне једначине као у (2.4.2-1) гласе:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{H}^T \\ \mathbf{H} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \quad (3.3-2)$$

а $\mathbf{k}$ је вектор Лагранжових мултипликатора или корелата. Матрица $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$ је сингуларна са димензијама $\mathbf{u} \times \mathbf{u}$ и дефектом ранга $\mathbf{d} = \mathbf{u} - \mathbf{r}(\mathbf{A})$, што значи да матрица $\mathbf{H}^T$ садржи $\mathbf{d}$ линеарно независних услова. На пример, у 2Д мрежи, уколико се тачкама P_i и P_j дефинише координатни систем (рачунска основа нулте варијансе), вектор $\hat{\mathbf{x}}$ и матрица $\mathbf{H}$ имају следећу форму:

$$\hat{\mathbf{x}}^T = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & x_2 & y_2 & \dots & x_i & y_i & \dots & x_j & y_j & \dots & x_{u/2} & y_{u/2} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & +1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & +1 & & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & & +1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & & 0 & +1 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Нормално је да координате датих тачака након обраде остану непромењене, што значи да је $\mathbf{w}$ нулти вектор. Једини услов који мора бити задовољен јесте да постављени услови обезбеде јединственост решења вектора непознатих параметара $\hat{\mathbf{x}}$. То практично значи да је ранг

$$\mathbf{r} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{H}^T \\ \mathbf{H} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{u} + \mathbf{d}, \quad (3.3-3)$$

односно, матрица $\mathbf{H}$ мора бити тако одабрана да инверзија система (3.3-2) буде регуларна (види поглавље 2.7). Решење гласи:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{H}^T \\ \mathbf{H} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}. \quad (3.3-4)$$

Инверзна матрица нормалних једначина (3.3-4) није нумерички довољно стабилна, о чему треба водити рачуна приликом решавања проблема.

Решење система нормалних једначина (3.3-4) може се додатно поједноставити. Наиме, како је $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} = \mathbf{N}$ и $\mathbf{N}^{-1} = \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$, (3.3-4) се може написати у другом облику, као

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{21} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}, \quad (3.3-5)$$

односно

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{Q}_{11} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} + \mathbf{Q}_{12} \mathbf{w} \\ \mathbf{k} &= \mathbf{Q}_{21} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} = 0, \end{aligned} \quad (3.3-6)$$

где је

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{11} &= (\mathbf{N} + \mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{N} (\mathbf{N} + \mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1}, \text{ и} \\ \mathbf{Q}_{12} &= \mathbf{Q}_{21}^T = (\mathbf{N} + \mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \end{aligned} \quad (3.3-7)$$

На основу закона преноса грешака, следи:

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{Q}_{11} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{Q} \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{Q}_{11} = \mathbf{Q}_{11} \mathbf{N} \mathbf{Q}_{11} = \mathbf{Q}_{11}. \quad (3.3-8)$$

где је матрица $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}$. У практичним применама, обично се вектор параметара формира тако да на крају буде распоређено $\mathbf{d}$ елемената, коресподентно датим тачкама (конвенционални начин избора датумских услова). Сходно томе, матрице $\mathbf{A}$ и $\mathbf{H}$ се формирају по следећој шеми:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1 \quad \mathbf{A}_2], \quad \mathbf{H} = [0 \quad \mathbf{I}_d] \text{ и } \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} = \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11} & \mathbf{N}_{12} \\ \mathbf{N}_{21} & \mathbf{N}_{22} \end{bmatrix}. \quad (3.3-9)$$

Решење гласи:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \hat{\mathbf{x}}_2 \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11} & \mathbf{N}_{12} & 0 \\ \mathbf{N}_{21} & \mathbf{N}_{22} & \mathbf{I}_d \\ 0 & \mathbf{I}_d & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P} \mathbf{l} \\ \mathbf{A}_2^T \mathbf{P} \mathbf{l} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}, \quad (3.3-10)$$

односно

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P} \mathbf{l} - \mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{N}_{12} \mathbf{w} \quad (3.3-11)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{w}$$

$$\mathbf{k} = 0$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_1} = \mathbf{N}_{11}^{-1}.$$

Важна особина предложеног решења јесте **зависност** вектора параметара $\hat{\mathbf{x}}$ и матрице кофактора $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$ од избора датих тачака. И поред тога, наведени поступак се често примењује јер је једноставан, а интерпретација резултата је очигледна. Раније дефинисани принципи оцена ($\mathbf{E}(\hat{\mathbf{x}}_i) = \mathbf{x}_i$, $\mathbf{s}_{\hat{\mathbf{x}}_i}^2 = \min$) у случају слободне мреже генерално не важе, јер је:

$$\mathbf{E}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{Q}_{11} \mathbf{N} \mathbf{x} + \mathbf{Q}_{12} \mathbf{c} \neq \mathbf{x},$$

односно

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{Q}_{11} = (\mathbf{N} + \mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{N} (\mathbf{N} + \mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1}$$

очигледно зависе од избора датумских услова.

3.4. Инваријантне функције у ГММ

Иако је у (2.8) већ било речи о оцењивости функција, пажња ће овог пута бити посвећена инваријантности у односу на услове дефинисане матрицом $\mathbf{H}$. Да би функција $\mathbf{f} = \mathbf{B} \mathbf{x}$ била оцењива, морају бити задовољени следећи услови:

$$\mathbf{B} \mathbf{Q}_{11} \mathbf{N} = \mathbf{B} \quad \text{и} \quad \mathbf{B} \mathbf{Q}_{12} = 0. \quad (3.4-1)$$

Редови матрице $\mathbf{B}$ су линеарне комбинације редова матрице $\mathbf{A}$. Без доказа, наводе се примери инваријантних функција у ГММ:

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{Q}_{11} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{i}}} &= \mathbf{A}\mathbf{Q}_{11}\mathbf{A}^T, \\ \mathbf{v} &= (\mathbf{A}\mathbf{Q}_{11}\mathbf{A}^T\mathbf{P} - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{l}, \\ \mathbf{Q}_{\mathbf{v}} &= \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{A}\mathbf{Q}_{11}\mathbf{A}^T. \end{aligned} \quad (3.4-1)$$

С обзиром да су *изравната опажања* и *резидуали* независни од $\mathbf{H}$, *квадратна форма* $\mathbf{v}^T\mathbf{P}\mathbf{v}$, а самим тиме и *оцена фактора веријансе* $\hat{\sigma}_0^2$ су независни од $\mathbf{H}$.

3.5. Дефинисање координатног система геодетске мреже са минималним трагом матрице кофактора непознатих параметара

Траг квадратне матрице једнак је збиру њених дијагоналних чланова. Уколико је квадратна матрица уједно и кофакторска матрица оцена непознатих параметара, тада се њен траг може интерпретирати и као укупна тачност оцена вектора непознатих параметара. С обзиром да МНК оцене непознатих параметара у изравнању слободних мрежа нису непомерене, нити им је генерално због неједнозначности решења варијанса минимална, поставља се питање да ли у скупу решења постоји неко које се посебно може издвојити (израз $\{\hat{\mathbf{x}}\} = \mathbf{Q}_{11}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{l} + \mathbf{Q}_{12}\mathbf{c}$ дефинише скуп решења-вектора). Критеријум по којем тражимо једно такво решење за вектор $\hat{\mathbf{x}}$ гласи:

$$\text{tr}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \text{tr}(\mathbf{N} + \mathbf{H}^T\mathbf{H})^{-1}\mathbf{N}(\mathbf{N} + \mathbf{H}^T\mathbf{H})^{-1} = \min. \quad (3.5-1)$$

Као што је познато, у (3.5-1) матрица $\mathbf{H}$ се може варирати све до задовољавања напред наведеног услова. Дакле, проблем се своди на проналажење специјалног облика матрице $\mathbf{H}$ који доводи до решења са минималним трагом кофакторске матрице. Једно решење које задовољава наведени услов дефинисано је изразом (2.8-10) и условима (2.7-13). Наиме, уколико такву матрицу $\mathbf{H}$ означимо са $\mathbf{S}$, до њеног облика долази се уз услове (2.7-13), односно

$$\begin{aligned} \mathbf{S}\mathbf{x} &= \mathbf{0}; \mathbf{S}^T\mathbf{x} = \mathbf{b}, \text{ и} \\ \mathbf{A}\mathbf{S} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{r}(\mathbf{S}) &= \mathbf{d} \end{aligned} \quad (3.5-2)$$

где је $\mathbf{b}$ произвољна константа и који представљају датумске услове.

Сходно 3.3-7, коначне оцене непознатих параметара и одговарајућих кофакторских матрица изгледају:

$$\hat{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{Q}}_{11} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} + \overline{\mathbf{Q}}_{12} \mathbf{b},$$

са

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{N} + \mathbf{S} \mathbf{S}^T)^{-1} - \mathbf{S} (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T,$$

при чему црта изнад ознака означава специјалан случај за $\mathbf{H} \equiv \mathbf{S}^T$. Узимајући у обзир, поред 3.3-7 и познату једнакост облика $\mathbf{N} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{N} = \mathbf{N}$, добија се следећи израз:

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{N} + \mathbf{S} \mathbf{S}^T)^{-1} \mathbf{N} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{N} (\mathbf{N} + \mathbf{S} \mathbf{S}^T)^{-1},$$

при чему се $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$ односи на одговарајући начин постављене услове $\mathbf{H} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{c}$.

Важна особина матрице $\mathbf{S}$ јесте да је $\mathbf{S}^T \mathbf{S}$ регуларна симетрична матрица. Матрица $\mathbf{S}$ која доводи до оптималног решења није јединствена, јер било која матрица за коју је $\mathbf{r}(\mathbf{S}) = \mathbf{d}$ испуњава услов $\mathbf{A} \mathbf{S} = \mathbf{0}$.

У геодетским мрежама матрица $\mathbf{S}$ се обично налази на основу геометријских анализа. Алгебарски метод је прихватљивији са компјутерског становишта и заснован је на решавању сопствених вредности $\mathbf{u} \mathbf{x} \mathbf{u}$ матрице $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$, тј.

$$(\mathbf{N} - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{s}_i = \mathbf{0}, \quad (3.5-3)$$

где су λ_i сопствене вредности од $\mathbf{N}$, а $\mathbf{s}_i$ је одговарајући сопствени вектор од $\mathbf{N}$. Уколико је дефект матрице $\mathbf{N}$ једнак $\mathbf{d}$, тада постоји $\mathbf{d}$ линеарно независних вектора $\mathbf{s}_i$ који формирају $\mathbf{u} \mathbf{x} \mathbf{d}$ матрицу $\mathbf{S}$. Тако формирана матрица $\mathbf{S}$ представља један избор услова који обезбеђују минималан траг кофакторске матрице оцена непознатих параметара $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$ за коју се може рећи да је са минималним трагом и јединствена је. Осим што поседује поменуте особине, треба истаћи још једну веома важну карактеристику решења, а то је – минимална норма вектора оцена непознатих параметара, односно:

$$\|\hat{\mathbf{x}}\| = (\hat{\mathbf{x}}^T \hat{\mathbf{x}})^{\frac{1}{2}} = \min. \quad (3.5-4)$$

Због једноставнијег рачунања и веће стабилности нумеричких операција, матрица $\mathbf{S}$ се нормализује, у ознаци $\mathbf{S}_n$, на следећи начин:

$$\mathbf{S}_n = \mathbf{S} (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \mathbf{S}_n^T \mathbf{S}_n = \mathbf{I}_d. \quad (3.5-5)$$

где је $\mathbf{I}_d$ јединична матрица димензија d (= дефект ранга). Декомпозиција сопствених вредности као поступак, саставни је део сваке библиотеке рачунарских програма у области алгебре на основу чега се једноставно може доћи до нормализованих јединичних вектора.

Размотримо сада геометријски начин дефинисања матрице $\mathbf{S}$ у геодетским мрежама које су најчешће у употреби. Пођимо од 1Д мреже. Већ је истакнуто да у 1Д мрежи дефект ранга износи $d=1$. У 1Д мрежи матрица $\mathbf{S}$ има следећи облик:

$$\mathbf{S}^T = [1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1] \cdot \mathbf{a}, \quad (3.5-6)$$

где је $\mathbf{a} = \text{const}$.

Да би се добила нумеричка стабилност неопходна при компјутерским рачунањима, матрица $\mathbf{S}$ се нормализује, тј.

$$\mathbf{S}_n^T = (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-\frac{1}{2}} \mathbf{S}^T \Rightarrow \mathbf{S}_n^T \mathbf{S}_n = \mathbf{I}_d \quad (3.5-7)$$

У случају једнодимензионалне мреже каква је 1Д мрежа, нормализацијом се добија следеће решење за матрицу $\mathbf{S}_n^T$,

$$\mathbf{S}_n^T = \frac{1}{\sqrt{u}} [1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1], \quad (3.5-8)$$

где је u број ненултих елемената од $\mathbf{S}$.

У случају 2Д мреже, дефект ранга износи $d=4$. Ако вектор непознатих параметара формирамо на следећи начин

$$\mathbf{x}^T = [x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2 \ \dots \ x_p \ y_p],$$

тада матрица $\mathbf{S}$ изгледа:

$$\mathbf{S}^T = \begin{bmatrix} +1 & 0 & +1 & 0 & \dots \\ 0 & +1 & 0 & +1 & \dots \\ +\bar{y}_1 & -\bar{x}_1 & +\bar{y}_2 & -\bar{x}_2 & \dots \\ +\bar{x}_1 & +\bar{y}_1 & +\bar{x}_2 & +\bar{y}_2 & \dots \end{bmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow \sum \hat{x}_i = 0 \\ \Rightarrow \sum \hat{y}_i = 0 \\ \Rightarrow \sum (\bar{y}_i \hat{x}_i - \bar{x}_i \hat{y}_i) = 0 \\ \Rightarrow \sum (\bar{x}_i \hat{x}_i + \bar{y}_i \hat{y}_i) = 0 \end{matrix} \quad (3.5-9)$$

где су $\bar{x}_i$ и $\bar{y}_i$ приближне редуковане координате тачака (израз 3.5-10), док су $\hat{x}_i$ и $\hat{y}_i$ поправке приближних вредности координате које треба оценити. Као и у случају 1Д мреже, неопходно је нормализовати матрицу S . Нормализација се реализује у два корака. У првом, координатни систем померамо (транслирамо) до поклапања са центроидом геодетске мреже, односно

$$\begin{aligned}\bar{x}_i &= x_i^o - \sum_p \frac{x_i^o}{p} \\ \bar{y}_i &= y_i^o - \sum_p \frac{y_i^o}{p}\end{aligned}\tag{3.5-10}$$

где су x_i^o и y_i^o приближне координате датих тачака мреже. Последица поменуте translације јесте да су редови матрице S^T постали међусобно ортогонални. С обзиром да је сада матрица $S^T S$ дијагонална, нормализација се реализује врло једноставно (други корак). Наиме, матрица $(S^T S)^{-\frac{1}{2}}$ је дијагонална са елементима једнаким реципрочним вредностима квадратних корена елемената матрице $S^T S$. Коначно, матрица S_n^* сачуната по (3.5-7) је **ортогонална** и **нормализована**, односно **ортонормална**.

Геометријски, прве две врсте матрице S^T обезбеђују translацију у правцу x и y осе. Трећа врста дефинише ротацију мреже око вертикалне осе, а четврта врста дефинише размеру опажања у складу са датим приближним координатама. Уколико неко опажање већ поседује информацију о неком елементу датума, тада се одговарајућа врста матрице S^T изоставља.

Матрица услова S^T дефинише датум тако што мрежу коју дефинишу опажања позиционира **релативно** у односу скуп датих приближних координата тачака тако да буде задовољен услов $\hat{x}^T \hat{x} = \min$. Дакле, све дате тачке једнако доприносе дефинисању координатног система (датума). Уколико неке тачке из неког разлога треба избацити, одговарајући коефицијенти матрице S^T се једноставно замењују са нулом.

Уколико су мерени правци, Fan (1997) предлаже матрицу $H = S^T$ облика:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & y_1 & -x_1 & y_2 & -x_2 & \dots & y_u & -x_u \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x_1 & y_1 & x_2 & y_2 & \dots & x_u & y_u \end{bmatrix},$$

где је $\mathbf{H}$ матрица димензија $4 \times m$, $k = (m - k_1)/2$ је број непознатих тачака, а k_1 је број станица на којима су мерени правци. Дакле, првих k_1 колона односи се на оријентисане правце, који су саставни део непознатог вектора оцена параметара модела.

Shafrin (1981), матрицу $\mathbf{S}$ формира на следећи начин:

$$\mathbf{S}^T = \begin{bmatrix} dx_3 & dy_3 & dx_4 & dy_4 & dx_5 & dy_5 & dx_6 & dy_6 & dz_2 & dz_4 & dz_5 & dz_6 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{y}_3 & -\bar{x}_3 & \bar{y}_4 & -\bar{x}_4 & \bar{y}_5 & -\bar{x}_5 & \bar{y}_6 & -\bar{x}_6 & \rho'' & \rho'' & \rho'' & \rho'' \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{x трансляција} \\ \text{y трансляција} \\ \text{ротација} \end{array}$$

где су: $\rho'' = (180 \cdot 3600)/\pi = 206\,264.8062'' \approx 206\,265''$, где је $\pi = 3.14159265358979$, а Z_i је оријентациони угао ($i = 1, 2, 3, 4$).

На крају, размотримо случај 3Д мреже. У 3Д мрежи, дефект ранга износи $\mathbf{d} = 7$, тако да матрица $\mathbf{S}^T$ има димензије $7 \times u$. Уколико вектор оцена непознатих параметара организујемо на следећи начин:

$$\mathbf{x}^T = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{y}_1 \quad \mathbf{z}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \mathbf{y}_2 \quad \mathbf{z}_2 \quad \dots \quad \mathbf{x}_p \quad \mathbf{y}_p \quad \mathbf{z}_p],$$

тада матрица $\mathbf{S}^T$ има следећи изглед:

$$\mathbf{S}^T = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & +1 & 0 & 0 & +1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & +1 & \dots \\ 0 & +\bar{z}_1 & -\bar{y}_1 & 0 & +\bar{z}_2 & -\bar{y}_2 & \dots \\ -\bar{z}_1 & 0 & +\bar{x}_1 & -\bar{z}_2 & 0 & +\bar{x}_2 & \dots \\ +\bar{y}_1 & -\bar{x}_1 & 0 & +\bar{y}_2 & -\bar{x}_2 & 0 & \dots \\ +\bar{x}_1 & +\bar{y}_1 & +\bar{z}_1 & +\bar{x}_2 & +\bar{y}_2 & +\bar{z}_2 & \dots \end{bmatrix} \quad (3.5-11)$$

Вредности $\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i$ рачунају се слично као у (3.5-10) и релативне су у односу на центроид мреже. Нормализација матрице $\mathbf{S}^T$ реализује се слично као у случају 2Д мреже.

Као и у 2Д мрежи, прве три врсте представљају транслацију система, наредне три ротацију око $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ оса, а последња дефинише размеру.

У фотограметрији, као и у посебним областима геодезије (на пример сателитска геодезија), геометрија мрежа није тако једноставна тако да је на основу геометријских анализа веома компликовано дефинисати дефект ранга. У тим случајевима, до матрице $\mathbf{S}^T$ долази се алгебарски, декомпозицијом сингуларних вредности матрице $\mathbf{A}$ (*singular value decomposition* - SVD), што није предмет нашег даљег разматрања. Алтернатива SVD је декомпозиција сопствених вредности од $\mathbf{N}$, али је овај метод нумерички мање стабилнији од SVD и примењује се само у случају матрица мањих димензија.

Уз начине дефинисане на основу геометријских анализа геодетских мрежа, још једном ћемо се подсетити на случај дефинисан у (2.7-13). Наиме, ако матрицу $\mathbf{A}$ поделимо у партиције облика $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1 \ \mathbf{A}_2]$ тако да је $\mathbf{r}(\mathbf{A}_1) = \mathbf{r}(\mathbf{A})$ и $\mathbf{A}_1 \mathbf{L} = \mathbf{A}_2$ где су $\mathbf{u} - \mathbf{r} = \mathbf{d}$ колона од $\mathbf{A}_2$ линеарне комбинације од $\mathbf{r}$ колона матрице $\mathbf{A}_1$, тада је:

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{L} - \mathbf{A}_2 = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ -\mathbf{I}_d \end{bmatrix} = \mathbf{A} \mathbf{S} = \mathbf{0}, \quad (3.5-12)$$

одакле следи

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ -\mathbf{I}_d \end{bmatrix}. \quad (3.5-13)$$

Матрица $\mathbf{L}$ није јединствена и до ње се може доћи на основу израза $\mathbf{A}_1 \mathbf{L} = \mathbf{A}_2$, као

$$\mathbf{L} = (\mathbf{A}_1^T \mathbf{G} \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{A}_1^T \mathbf{G} \mathbf{A}_2, \quad (3.5-14)$$

при чему се $\mathbf{G}$ слободно бира тако да важи однос $\mathbf{r}(\mathbf{A}_1) = \mathbf{r}(\mathbf{A}_1^T \mathbf{G} \mathbf{A}_1)$. У пракси, уместо матрице $\mathbf{G}$ користи се матрица тежина $\mathbf{P}$, одакле следи:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{N}_{12} \\ -\mathbf{I}_d \end{bmatrix}, \quad (3.5-15)$$

до које се долази издвајањем субматрице из инверзне проширене матрице нормалних једначина.

Оцена вектора непознатих параметара коначно гласи

$$\hat{\mathbf{x}}_s = \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_s} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l}, \quad (3.5-16)$$

где је:

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_s} = (\mathbf{N} + \mathbf{S} \mathbf{S}^T)^{-1} \mathbf{N} (\mathbf{N} + \mathbf{S} \mathbf{S}^T)^{-1}. \quad (3.5-17)$$

ПРИМЕР 3.5-1: На основу датих података мерења у геодетској 2D мрежи, коју чине четири тачке (2, 4, 5 и 6):

Приближне координате:

Тачка	y[m]	x[m]
2	30374.649	68154.049
4	38154.261	60232.760
5	30992.300	54437.302
6	33196.652	62433.823

Вредности мерења и њихова стандардна одступања:

Станица	Визура	°	'	"	d [m]	s _d [m]
6	2	0	0	0	6378.442	0.0030
	4	140	11	54.8	5424.265	0.0030
	5	221	40	13.4	8294.798	0.0030
2	4	0	0	0	s _d =	0.6"
	6	18	13	26.3		
4	5	0	0	0		
	6	62	55	11.8		
	2	84	29	49.8		
5	2	0	0	0		
	6	17	59	22.2		
	4	53	35	54		

а) Формирати матрицу датумских услова S, а затим одредити:

а.1) вектор оцена непознатих параметара $\hat{\mathbf{x}}_s$

а.2) вектор оцена резидуала мерених величина $\hat{\mathbf{v}}_s$

б) Формирати матрицу датумских услова B, а затим одредити:

б.1) вектор оцена непознатих параметара $\hat{\mathbf{x}}_B$

б.2) вектор оцена резидуала мерених величина $\hat{\mathbf{v}}_B$

в) Упоредити резултате добијене у претходна два корака.

РЕШЕЊЕ:

Матрица дизајна (матрица коефицијената једначина опажања):

$$\mathbf{a}_{ij} = \frac{\mathbf{y}_j^0 - \mathbf{y}_i^0}{(\mathbf{d}_{ij}^0)^2} \cdot \rho''; \quad \mathbf{b}_{ij} = \frac{\mathbf{x}_i^0 - \mathbf{x}_j^0}{(\mathbf{d}_{ij}^0)^2} \cdot \rho''; \quad \mathbf{d}_{ij}^0 = \sqrt{(\mathbf{y}_j^0 - \mathbf{y}_i^0)^2 + (\mathbf{x}_j^0 - \mathbf{x}_i^0)^2};$$

$$\mathbf{A}_{ij} = \frac{\mathbf{x}_i^0 - \mathbf{x}_j^0}{\mathbf{d}_{ij}^0}; \quad \mathbf{B}_{ij} = \frac{\mathbf{y}_i^0 - \mathbf{y}_j^0}{\mathbf{d}_{ij}^0}$$

	dX2	dY2	dX4	dY4	dX5	dY5	dX6	dY6	dZ2	dZ4	dZ5	dZ6	
A=	a ₂₆	b ₂₆	0	0	0	0	a ₆₂	b ₆₂	0	0	0	1	p ₆₂
	0	0	a ₄₆	b ₄₆	0	0	a ₆₄	b ₆₄	0	0	0	1	p ₆₄
	0	0	0	0	a ₅₆	b ₅₆	a ₆₅	b ₆₅	0	0	0	1	p ₆₅
	a ₂₄	b ₂₄	a ₄₂	b ₄₂	0	0	0	0	1	0	0	0	p ₂₄
	a ₂₆	b ₂₆	0	0	0	0	a ₆₂	b ₆₂	1	0	0	0	p ₂₆
	0	0	a ₄₅	b ₄₅	a ₅₄	b ₅₄	0	0	0	1	0	0	p ₄₅
	0	0	a ₄₆	b ₄₆	0	0	a ₆₄	b ₆₄	0	1	0	0	p ₄₆
	a ₂₄	b ₂₄	a ₄₂	b ₄₂	0	0	0	0	0	1	0	0	p ₄₂
	a ₂₅	b ₂₅	0	0	a ₅₂	b ₅₂	0	0	0	0	1	0	p ₅₂
	0	0	0	0	a ₅₆	b ₅₆	a ₆₅	b ₆₅	0	0	1	0	p ₅₆
	0	0	a ₄₅	b ₄₅	a ₅₄	b ₅₄	0	0	0	0	1	0	p ₅₄
	A ₂₆	B ₂₆	0	0	0	0	A ₆₂	B ₆₂	0	0	0	0	d ₆₂
	0	0	A ₄₆	B ₄₆	0	0	A ₆₄	B ₆₄	0	0	0	0	d ₆₄
	0	0	0	0	A ₅₆	B ₅₆	A ₆₅	B ₆₅	0	0	0	0	d ₆₅

	dX2	dY2	dX4	dY4	dX5	dY5	dX6	dY6	dZ2	dZ4	dZ5	dZ6	
A=	14,3071	29,0007	0	0	0	0	-14,3071	-29,0007	0	0	0	1	p ₆₂
	0	0	-34,7550	-15,4304	0	0	34,7550	15,4304	0	0	0	1	p ₆₄
	0	0	0	0	6,6084	-23,9726	-6,6084	23,9726	0	0	0	1	p ₆₅
	13,0175	13,2546	-13,0175	-13,2546	0	0	0	0	1	0	0	0	p ₂₄
	14,3071	29,0007	0	0	0	0	-14,3071	-29,0007	1	0	0	0	p ₂₆
	0	0	-17,4039	14,0832	17,4039	-14,0832	0	0	0	1	0	0	p ₄₅
	0	0	-34,7550	-15,4304	0	0	34,7550	15,4304	0	1	0	0	p ₄₆
	13,0175	13,2546	-13,0175	-13,2546	0	0	0	0	0	1	0	0	p ₄₂
	0,6758	15,0070	0	0	-0,6758	-15,0070	0	0	0	0	1	0	p ₅₂
	0	0	0	0	6,6084	-23,9726	-6,6084	23,9726	0	0	1	0	p ₅₆
	0	0	-17,4039	14,0832	17,4039	-14,0832	0	0	0	0	1	0	p ₅₄
	0,8968	-0,4424	0	0	0	0	-0,8968	0,4424	0	0	0	0	d ₆₂
	0	0	-0,4058	0,9140	0	0	0,4058	-0,9140	0	0	0	0	d ₆₄
	0	0	0	0	-0,9640	-0,2658	0,9640	0,2658	0	0	0	0	d ₆₅

Матрица тежина мерења:

	α_{6-2}	α_{6-4}	α_{6-5}	α_{2-4}	α_{2-6}	α_{4-5}	α_{4-6}	α_{4-2}	α_{5-2}	α_{5-6}	α_{5-4}	d_{6-2}	d_{6-4}	d_{6-5}	
P=	σ_0^2/S_a^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	α_{6-2}
	0	σ_0^2/S_a^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	α_{6-4}
	0	0	σ_0^2/S_a^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	α_{6-5}
	0	0	0	σ_0^2/S_a^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	α_{2-4}
	0	0	0	0	σ_0^2/S_a^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	α_{2-6}
	0	0	0	0	0	σ_0^2/S_a^2	0	0	0	0	0	0	0	0	α_{4-5}
	0	0	0	0	0	0	σ_0^2/S_a^2	0	0	0	0	0	0	0	α_{4-6}
	0	0	0	0	0	0	0	σ_0^2/S_a^2	0	0	0	0	0	0	α_{4-2}
	0	0	0	0	0	0	0	0	σ_0^2/S_a^2	0	0	0	0	0	α_{5-2}
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	σ_0^2/S_a^2	0	0	0	0	α_{5-6}
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	σ_0^2/S_a^2	0	0	0	α_{5-4}
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	σ_0^2/S_d^2	0	0	d_{6-2}
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	σ_0^2/S_d^2	0	d_{6-4}
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	σ_0^2/S_d^2	d_{6-5}

За $\sigma_0 = 1$

	p62	p64	p65	p24	p26	p45	p46	p42	p52	p56	p54	d62	d64	d65	
P =	2,778	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	p62
	0	2,778	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	p64
	0	0	2,778	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	p65
	0	0	0	2,778	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	p24
	0	0	0	0	2,778	0	0	0	0	0	0	0	0	0	p26
	0	0	0	0	0	2,778	0	0	0	0	0	0	0	0	p45
	0	0	0	0	0	0	2,778	0	0	0	0	0	0	0	p46
	0	0	0	0	0	0	0	2,778	0	0	0	0	0	0	p42
	0	0	0	0	0	0	0	0	2,778	0	0	0	0	0	p52
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,778	0	0	0	0	p56
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,778	0	0	0	p54
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	111111,111	0	0	d62
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	111111,111	0	d64
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	111111,111	d65

Вектор слободних чланова:

$$\mathbf{f}_{\alpha_{ij}} = \mathbf{M} - \mathbf{P} = \alpha_{ij} - (v_{ij}^0 + z_i); \quad v_{ij}^0 = \arctg \frac{y_j^0 - y_i^0}{x_j^0 - x_i^0};$$

$$\mathbf{f}_{d_{ij}} = \mathbf{M} - \mathbf{P} = d_{ij} - d_{ij}^0; \quad d_{ij}^0 = \sqrt{(y_j^0 - y_i^0)^2 + (x_j^0 - x_i^0)^2};$$

f =	-0,5883	p62 ["]
	0,8917	p64 ["]
	-0,3034	p65 ["]
	-0,3132	p24 ["]
	0,3132	p26 ["]
	-9,4605	p45 ["]
	-9,6666	p46 ["]
	19,1271	p42 ["]
	-0,5419	p52 ["]
	0,6704	p56 ["]
	-0,1285	p54 ["]
	0,0129	d62 [m]
	-0,0079	d64 [m]
	-0,0095	d65 [m]

Матрица коефицијената нормалних једначина: $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$

	dX2	dY2	dX4	dY4	dX5	dY5	dX6	dY6	dZ2	dZ4	dZ5	dZ6
$\mathbf{N} =$	91441,88	-40793,82	-941,42	-958,57	-1,27	-28,17	-90499,19	41780,56	75,90	36,16	1,88	39,74
	-40793,82	28023,15	-958,57	-976,03	-28,17	-625,59	41780,56	-26421,54	117,38	36,82	41,69	80,56
	-941,42	-958,57	27630,19	-38631,78	-1682,76	1361,69	-25006,01	38228,66	-36,16	181,05	-48,34	-96,54
	-958,57	-976,03	-38631,78	96216,38	1361,69	-1101,88	38228,66	-94138,48	-36,82	-40,56	39,12	-42,86
	-1,27	-28,17	-1682,76	1361,69	105190,66	26252,53	-103506,63	-27586,05	0,00	48,34	64,82	18,36
	-28,17	-625,59	1361,69	-1101,88	26252,53	12767,26	-27586,05	-11039,80	0,00	-39,12	147,40	-66,59
	-90499,19	41780,56	-25006,01	38228,66	-103506,63	-27586,05	219011,83	-52423,17	-39,74	96,54	-18,36	38,44
	41780,56	-26421,54	38228,66	-94138,48	-27586,05	-11039,80	-52423,17	131599,82	-80,56	42,86	66,59	28,90
	75,90	117,38	-36,16	-36,82	0,00	0,00	-39,74	-80,56	5,56	0,00	0,00	0,00
	36,16	36,82	-181,05	-40,56	48,34	-39,12	96,54	42,86	0,00	8,33	0,00	0,00
	1,88	41,69	-48,34	39,12	64,82	-147,40	-18,36	66,59	0,00	0,00	8,33	0,00
	39,74	80,56	-96,54	-42,86	18,36	-66,59	38,44	28,90	0,00	0,00	0,00	8,33

Вектор слободних чланова нормалних једначина:

$$\mathbf{n} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1949,9619 \\ 15,6759 \\ 985,5951 \\ -1491,7291 \\ 564,4686 \\ 654,5284 \\ -3500,0255 \\ 821,5247 \\ 0,0000 \\ 0,0000 \\ 0,0000 \\ 0,0000 \end{bmatrix}$$

а) Формирање матрице датумских услова $\mathbf{S}$

$$\mathbf{S}^T = \begin{bmatrix} dx_3 & dy_3 & dx_4 & dy_4 & dx_5 & dy_5 & dx_6 & dy_6 & dz_2 & dz_4 & dz_5 & dz_6 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{Y}_3 & -\bar{X}_3 & \bar{Y}_4 & -\bar{X}_4 & \bar{Y}_5 & -\bar{X}_5 & \bar{Y}_6 & -\bar{X}_6 & \rho'' & \rho'' & \rho'' & \rho'' \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{x translација} \\ \text{Y translација} \\ \text{ротација} \end{matrix}$$

- $\rho'' = (180 \cdot 3600) / \pi = 206\,264.8062'' \approx 206\,265''$, где је $\pi = 3.14159265358979$
- Z_i – оријентациони угао ($i = 1, 2, 3, 4$)

$$\bar{x} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^4 x_i \quad (\text{израз 3.5-10})$$

$$\bar{y} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^4 y_i \quad (\text{израз 3.5-10})$$

$$\bar{x}_i = x_i - \bar{x}, \quad \bar{y}_i = y_i - \bar{y}$$

$$S^T = \begin{vmatrix} dX2 & dY2 & dX4 & dY4 & dX5 & dY5 & dX6 & dY6 & dZ2 & dZ4 & dZ5 & dZ6 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2804,82 & -6839,566 & 4974,795 & 1081,724 & -2187,166 & 6877,182 & 17,186 & -1119,339 & 206265 & 206265 & 206265 & 206265 \end{vmatrix}$$

Контрола: $AS = 0$

Кофакторска матрица оцена непознатих параметара: $N^+ = (N + S \cdot S^T)^{-1} - S \cdot S^T$

$N^+ =$

dX2	dY2	dX4	dY4	dX5	dY5	dX6	dY6	dZ2	dZ4	dZ5	dZ6
0,000029	0,000023	-0,000019	-0,000027	-0,000012	0,000023	0,000002	-0,000019	-0,000846	-0,000093	0,000974	-0,000034
0,000023	0,000069	0,000000	-0,000011	-0,000008	-0,000043	-0,000015	-0,000015	-0,000684	0,000643	0,000085	-0,000040
-0,000019	0,000000	0,000058	0,000025	-0,000019	-0,000018	-0,000020	-0,000007	-0,000543	0,001032	-0,000665	0,000175
-0,000027	-0,000011	0,000025	0,000047	0,000012	-0,000061	-0,000010	0,000025	0,001127	0,000405	-0,001579	0,000047
-0,000012	-0,000008	-0,000019	0,000012	0,000026	-0,000027	0,000006	0,000023	0,001154	-0,000409	-0,000662	-0,000082
0,000023	-0,000043	-0,000018	-0,000061	-0,000027	0,000148	0,000022	-0,000043	-0,001903	-0,000787	0,002615	0,000069
0,000002	-0,000015	-0,000020	-0,000010	0,000006	0,000022	0,000013	0,000003	0,000236	-0,000530	0,000353	-0,000059
-0,000019	-0,000015	-0,000007	0,000025	0,000023	-0,000043	0,000003	0,000033	0,001459	-0,000261	-0,001121	-0,000076
-0,000846	-0,000684	-0,000543	0,001127	0,001154	-0,001903	0,000236	0,001459	0,187819	-0,055465	-0,088577	-0,043721
-0,000093	0,000643	0,001032	0,000405	-0,000409	-0,000787	-0,000530	-0,000261	-0,055465	0,118140	-0,038914	-0,023749
0,000974	0,000085	-0,000665	-0,001579	-0,000662	0,002615	0,000353	-0,001121	-0,088577	-0,038914	0,154078	-0,026647
-0,000034	-0,000040	0,000175	0,000047	-0,000082	0,000069	-0,000059	-0,000076	-0,043721	-0,023749	-0,026647	0,094107

a.1) Вектор оцена непознатих параметара

$\hat{x}_s = -N^+ n =$	-0,0661	dX2 [m]
	-0,0701	dY2 [m]
	-0,0262	dX4 [m]
	0,0742	dY4 [m]
	0,0654	dX5 [m]
	-0,0869	dY5 [m]
	0,0269	dX6 [m]
	0,0828	dY6 [m]
	4,0979	dZ2 ["]
	-1,1359	dZ4 ["]
	-2,7823	dZ5 ["]
	-0,1786	dZ6 ["]

a.2) Вектор оцена резидуала мерених величина

$$\hat{\mathbf{v}}_s = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_s + \mathbf{f} =$$

-6,53	p62
2,69	p64
3,84	p65
1,35	p24
-1,35	p26
-6,74	p45
-8,82	p46
15,56	p42
-3,16	p52
2,21	p56
0,95	p54
-0,0029	d62
0,0058	d64
-0,0015	d65

Идентичан резултат се добија и коришћењем софтверског пакета MATLAB. У поменутом програму нема потребе за проширењем матрице коефицијената нормалних једначина N матрицом датумских услова. Довољно је да се на матрицу N примени функција $\text{Pinv}(N)$ чиме се решава проблем нерегуларне инверзије односно, добија кофакторска матрицу оцена непознатих параметара $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$.

б) Формирање матрице датумских услова В (у изразу за g у подкореној величини сабирци нису усаглашени по димензијама, па се овај поступак не препоручује иако се у пракси он и даље користи)

$$\mathbf{B}^T = \begin{vmatrix} dx_2 & dy_2 & dx_4 & dy_4 & dx_5 & dy_5 & dx_6 & dy_6 & dz_2 & dz_4 & dz_5 & dz_6 \\ 1/\sqrt{\mu} & 0 & 1/\sqrt{\mu} & 0 & 1/\sqrt{\mu} & 0 & 1/\sqrt{\mu} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\mu} & 0 & 1/\sqrt{\mu} & 0 & 1/\sqrt{\mu} & 0 & 1/\sqrt{\mu} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \eta_2 & -\xi_2 & \eta_4 & -\xi_4 & \eta_5 & -\xi_5 & \eta_6 & -\xi_6 & \rho''/g & \rho''/g & \rho''/g & \rho''/g \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{x translacija} \\ \text{y translacija} \\ \text{rotacija} \end{matrix}$$

- $\mu = 4$ – број тачака у мрежи

$$\xi_i = \frac{\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}}{g}; \quad \eta_i = \frac{\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}}}{g}$$

$$g = \sqrt{\sum_{i=1}^4 (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})^2 + \sum_{i=1}^4 (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^2} + \mathbf{m} \cdot \rho^2$$

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^4 \mathbf{x}_i; \quad \bar{\mathbf{y}} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^4 \mathbf{y}_i$$

$m = 4$ – број станица са којих су мерени правци

$$\mathbf{B}^T = \begin{vmatrix} dX2 & dY2 & dX4 & dY4 & dX5 & dY5 & dX6 & dY6 & dZ2 & dZ4 & dZ5 & dZ6 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0068 & -0,0166 & 0,0120 & 0,0026 & -0,0053 & 0,0167 & 0,00004 & -0,0027 & 0,4998 & 0,4998 & 0,4998 & 0,4998 \end{vmatrix}$$

Кофакторска матрица оцена непознатих параметара:

$$\mathbf{N}^+ = (\mathbf{N} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T)^{-1} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T =$$

dX2	dY2	dX4	dY4	dX5	dY5	dX6	dY6	dZ2	dZ4	dZ5	dZ6
0,00003	0,00002	-0,00002	-0,00003	-0,00001	0,00002	0,00000	-0,00002	-0,00085	-0,00009	0,00097	-0,00003
0,00002	0,00007	0,00000	-0,00001	-0,00001	-0,00004	-0,00002	-0,00002	-0,00068	0,00064	0,00008	-0,00004
-0,00002	0,00000	0,00006	0,00002	-0,00002	-0,00002	-0,00002	-0,00001	-0,00054	0,00103	-0,00066	0,00018
-0,00003	-0,00001	0,00002	0,00005	0,00001	-0,00006	-0,00001	0,00003	0,00113	0,00041	-0,00158	0,00005
-0,00001	-0,00001	-0,00002	0,00001	0,00003	-0,00003	0,00001	0,00002	0,00115	-0,00041	-0,00066	-0,00008
0,00002	-0,00004	-0,00002	-0,00006	-0,00003	0,00015	0,00002	-0,00004	-0,00190	-0,00079	0,00262	0,00007
0,00000	-0,00002	-0,00002	-0,00001	0,00001	0,00002	0,00001	0,00000	0,00024	-0,00053	0,00035	-0,00006
-0,00002	-0,00002	-0,00001	0,00003	0,00002	-0,00004	0,00000	0,00003	0,00146	-0,00026	-0,00112	-0,00008
-0,00085	-0,00068	-0,00054	0,00113	0,00115	-0,00190	0,00024	0,00146	0,18782	-0,05546	-0,08858	-0,04372
-0,00009	0,00064	0,00103	0,00041	-0,00079	-0,00053	-0,00026	-0,00026	-0,05546	0,11814	-0,03891	-0,02375
0,00097	0,00008	-0,00066	-0,00158	-0,00066	0,00262	0,00035	-0,00112	-0,08858	-0,03891	0,15408	-0,02665
-0,00003	-0,00004	0,00018	0,00005	-0,00008	0,00007	-0,00006	-0,00008	-0,04372	-0,02375	-0,02665	0,09411

Контрола: $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E}$

б.1) Вектор оцена непознатих параметара

б.2) Вектор оцене резидуала мерених величина

$\hat{\mathbf{x}}_B = \mathbf{N}^+ \mathbf{n} =$	-0,0661	dX ₂ [m]	$\hat{\mathbf{v}}_B = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}_B + \mathbf{f} =$	-6,53	p62 ["]
	-0,0701	dY ₂ [m]		2,69	p64 ["]
	-0,0262	dX ₄ [m]		3,84	p65 ["]
	0,0742	dY ₄ [m]		1,35	p24 ["]
	0,0654	dX ₅ [m]		-1,35	p26 ["]
	-0,0869	dY ₅ [m]		-6,74	p45 ["]
	0,0269	dX ₆ [m]		-8,82	p46 ["]
	0,0828	dY ₆ [m]		15,56	p42 ["]
	4,0979	dZ ₂ ["]		-3,16	p52 ["]
	-1,1359	dZ ₄ ["]		2,21	p56 ["]
	-2,7823	dZ ₅ ["]		0,95	p54 ["]
	-0,1786	dZ ₆ ["]		-0,0029	d62 [m]
				0,0058	d64 [m]
				-0,0015	d65 [m]

в) Поређење два решења

$$\hat{\mathbf{x}}_S - \hat{\mathbf{x}}_B = \begin{array}{c|c} 0,0000 & \text{m} \\ 0,0000 & \text{m} \\ 0,0000 & \text{m} \\ 0,0000 & \text{m} \\ 0,0000 & \text{m} \\ 0,0000 & \text{m} \\ 0,0000 & \text{m} \\ 0,0000 & \text{m} \\ 0,0000 & \text{m} \\ 0,0000 & \text{"} \\ 0,0000 & \text{"} \\ 0,0000 & \text{"} \\ 0,0000 & \text{"} \end{array}$$

Разлика вектора оцена мерених величина:

$$\hat{\mathbf{v}}_S - \hat{\mathbf{v}}_B = \begin{array}{c|c} 0,000002 & \text{"} \\ 0,000000 & \text{"} \\ -0,000003 & \text{"} \\ -0,000004 & \text{"} \\ -0,000003 & \text{"} \\ -0,000001 & \text{"} \\ 0,000001 & \text{"} \\ 0,000002 & \text{"} \\ 0,000003 & \text{"} \\ 0,000001 & \text{"} \\ 0,000002 & \text{"} \\ 0,000000 & \text{m} \\ 0,000000 & \text{m} \\ 0,000000 & \text{m} \end{array}$$

ПРИМЕР 3.5-2: На основу датих података мерења у геодетској 2D мрежи, коју чини пет тачака (1, 2, 3, 4 и 5), спровести изравнање по методи посредног изравнања са датумом дефинисаним минималним трагом на свим тачкама мреже. Матрицу датумских услова формирати на начин предложен од стране различитих аутора (Fritsch & Shaffrin, Caspary) и упоредити резултате добијене применом различитих матрица.

План мерења	Дужина (m)	σ_{d_i} [mm] σ_{pr_i} ["]
1 - 5	696.4155	3.66
1 - 4	304.1405	3.14
1 - 2	272.0317	3.11
2 - 5	510.8839	3.37
2 - 4	531.5094	3.40
3 - 2	303.6461	3.14
3 - 1	550.0942	3.42
3 - 5	259.9980	3.10
4 - 3	737.3625	3.73
5 - 4	790.2501	3.82
Правци		
2 - 1	359 59 56	3
2 - 3	145 39 22	3
2 - 4	24 05 00	3
2 - 5	122 39 41	3

Тачка	Приближне координате тачака (m)	
	Y	X
1	300.0000	210.0000
2	560.0000	130.0000
3	850.0000	220.0000
4	160.0000	480.0000
5	950.0000	460.0000

Усвојено: $\sigma_{pr} = 3$, $\sigma_i = \sqrt{(3\text{mm})^2 + (3 \cdot D_i [\text{km}])^2}$ и $\sigma_0=1$.

Матрица дизајна A:

dx1	dy1	dx2	dy2	dx3	dy3	dx4	dy4	dx5	dy5	dz2
-0.3590	-0.9333	0	0	0	0	0	0	0.3590	0.9333	0
-0.8878	0.4603	0	0	0	0	0.8878	-0.4603	0	0	0
0.2941	-0.9558	-0.2941	0.9558	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-0.6459	-0.7634	0	0	0	0	0.6459	0.7634	0
0	0	-0.6585	0.7526	0	0	0.6585	-0.7526	0	0	0
0	0	-0.2964	-0.9551	0.2964	0.9551	0	0	0	0	0
-0.0182	-0.9998	0	0	0.0182	0.9998	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-0.9231	-0.3846	0	0	0.9231	0.3846	0
0	0	0	0	-0.3526	0.9358	0.3526	-0.9358	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0.0253	-0.9997	-0.0253	0.9997	0
0.7247	0.2230	-0.7247	-0.2230	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0.6488	-0.2013	-0.6488	0.2013	0	0	0	0	1
0	0	-0.2921	-0.2555	0	0	0.2921	0.2555	0	0	1
0	0	0.3082	-0.2608	0	0	0	0	-0.3082	0.2608	1

Вектор слободних чланова f и дијагонални елементи матрице тежина P :

$f =$	3.91	mm	$P(diag) =$	0.0748
	-2.37	mm		0.1017
	-2.29	mm		0.1035
	-2.31	mm		0.0881
	-2.11	mm		0.0866
	-1.57	mm		0.1017
	-3.30	mm		0.0853
	2.00	mm		0.1041
	-2.34	mm		0.0720
	3.02	mm		0.0684
	3.82	"		0.1111
	-1.26	"		0.1111
	-0.67	"		0.1111
	0.00	"		0.1111

Матрица коефицијената нормалних једначина: $N = A^T P A$.

Инверзија матрице N се у овом случају врши проширењем матрице матрицом датумских услова. У пракси се примењују следеће матрице датумских услова, предложене од стране различитих аутора:

- Frtisch & Shaffrin

$$S^T = \begin{vmatrix} dx_1 & dy_1 & dx_2 & dy_2 & dx_3 & dy_3 & dx_4 & dy_4 & dx_5 & dy_5 & dz_2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{y}_1 & -\bar{x}_1 & \bar{y}_2 & -\bar{x}_2 & \bar{y}_3 & -\bar{x}_3 & \bar{y}_4 & -\bar{x}_4 & \bar{y}_5 & -\bar{x}_5 & \rho'' \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{x трансляција} \\ \text{у трансляција} \\ \text{ротација} \end{matrix}$$

- Caspary

$$S^T = \begin{vmatrix} dx_1 & dy_1 & dx_2 & dy_2 & dx_3 & dy_3 & dx_4 & dy_4 & dx_5 & dy_5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \bar{y}_1 & -\bar{x}_1 & \bar{y}_2 & -\bar{x}_2 & \bar{y}_3 & -\bar{x}_3 & \bar{y}_4 & -\bar{x}_4 & \bar{y}_5 & -\bar{x}_5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{x трансляција} \\ \text{у трансляција} \\ \text{ротација} \end{matrix}$$

где су елементи трећег реда у обе матрице дефинисани изразом 3.5-10.

Обе матрице морају да испуне услов: $AS=0$.

Формирање матрице датумских услова:

- Fritsch & Shaffrin

$$S^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -264000 & 90000 & -4000 & 170000 & 286000 & 80000 & -404000 & -180000 & 386000 & -160000 & 206264,8062 \end{vmatrix}$$

- Caspary

$$S^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -264000 & 90000 & -4000 & 170000 & 286000 & 80000 & -404000 & -180000 & 386000 & -160000 & 0 \end{vmatrix}$$

Уколико се матрица коју предлаже Caspary примењује у случају када су мерени правци, неопходно је извршити **редукцију матрице А** да би се применила ова матрица датумских услова. Редукција матрице А подразумева да се из матрице А елиминишу колоне које се односе на прираштај непознатих оријентационих праваца z. Елиминација тих колона се врши на следећи начин:

1) сумирају се коефицијенти уз непознате величине из свих једначина поправака мерених праваца на једној станици; нпр. уколико су у мрежи са тачке 1 мерена три правца ка тачакама 2, 3 и 4, сума би била:

$$\sum \mathbf{v}_i = 3\mathbf{v}_i = (\mathbf{a}_1^2 + \mathbf{a}_1^3 + \mathbf{a}_1^4)\mathbf{dx}_1 + (\mathbf{b}_1^2 + \mathbf{b}_1^3 + \mathbf{b}_1^4)\mathbf{dy}_1 + \mathbf{a}_2^1\mathbf{dx}_2 + \mathbf{b}_2^1\mathbf{dy}_2 + \mathbf{a}_3^1\mathbf{dx}_3 + \mathbf{b}_3^1\mathbf{dy}_3 + \mathbf{a}_4^1\mathbf{dx}_4 + \mathbf{b}_4^1\mathbf{dy}_4 + 3 \cdot \mathbf{dz}_1 + (\mathbf{f}_{pr^2} + \mathbf{f}_{pr^3} + \mathbf{f}_{pr^4})$$

У овом конкретном случају, мерена су четири правца са тачке 2 ка свим осталим тачкама у мрежи па је сума следећег облика:

$$4\mathbf{v} = 0.7274\mathbf{dx}_1 + 0.2230\mathbf{dy}_1 - 0.0598\mathbf{dx}_2 - 0.9407\mathbf{dy}_2 - 0.6488\mathbf{dx}_3 + 0.2013\mathbf{dy}_3 + 0.2921\mathbf{dx}_4 + 0.2555\mathbf{dy}_4 - 0.3082\mathbf{dx}_5 + 0.2608\mathbf{dy}_5 + 4\mathbf{dz}_2 + 1.8927$$

2) у следећем кораку се сума коефицијената уз непознате величине дели са бројем мерених праваца са те станице; у овом случају сума се дели са 4 па се добија следећи израз:

$$\mathbf{v} = 0.1812\mathbf{dx}_1 + 0.0557\mathbf{dy}_1 - 0.0149\mathbf{dx}_2 - 0.2352\mathbf{dy}_2 - 0.1622\mathbf{dx}_3 + 0.0503\mathbf{dy}_3 + 0.0730\mathbf{dx}_4 + 0.0639\mathbf{dy}_4 - 0.0771\mathbf{dx}_5 + 0.0652\mathbf{dy}_5 + \mathbf{dz}_2 + 0.4732$$

3) на крају се од сваког коефицијента из првобитне једначине поправака одузима одговарајући коефицијент из овако модификоване једначине поправака, па редуктована матрица дизајна А и вектор слободних чланова f у овом примеру имају следећи облик:

dx1	dy1	dx2	dy2	dx3	dy3	dx4	dy4	dx5	dy5	dz2
-0.3590	-0.9333	0	0	0	0	0	0	0.3590	0.9333	0
-0.8878	0.4603	0	0	0	0	0.8878	-0.4603	0	0	0
0.2941	-0.9558	-0.2941	0.9558	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-0.6459	-0.7634	0	0	0	0	0.6459	0.7634	0
0	0	-0.6585	0.7526	0	0	0.6585	-0.7526	0	0	0
0	0	-0.2964	-0.9551	0.2964	0.9551	0	0	0	0	0
-0.0182	-0.9998	0	0	0.0182	0.9998	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-0.9231	-0.3846	0	0	0.9231	0.3846	0
0	0	0	0	-0.3526	0.9358	0.3526	-0.9358	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0.0253	-0.9997	-0.0253	0.9997	0
0.5435	0.1672	-0.7098	0.0122	0.1622	-0.0503	-0.0730	-0.0639	0.0771	-0.0652	0
-0.1812	-0.0557	0.6637	0.0338	-0.4866	0.1510	-0.0730	-0.0639	0.0771	-0.0652	0
-0.1812	-0.0557	-0.2771	-0.0204	0.1622	-0.0503	0.2190	0.1917	0.0771	-0.0652	0
-0.1812	-0.0557	0.3232	-0.0256	0.1622	-0.0503	-0.0730	-0.0639	-0.2312	0.1956	0

f=	3.91	mm
	-2.37	mm
	-2.29	mm
	-2.31	mm
	-2.11	mm
	-1.57	mm
	-3.30	mm
	2.00	mm
	-2.34	mm
	3.02	mm
	3.35	"
	-1.73	"
	-1.15	"
	-0.47	"

Суме коефицијената уз сваку од непознатих у овако модификованим једначинама поправака треба да буду једнаке нули.

Као што се може уочити, елементи колоне **dz₂** у овако редукованој матрици А су сада нуле што значи да се она може елиминисати из матрице. Из овога следи да су димензије матрице А сада 14x10.

Кофакторске матрице непознатих параметара добијене применом ових матрица датумских услова:

- Frtisch & Shaffrin

3.8183	0.9991	-0.3015	0.3089	-0.8686	0.4583	-2.3532	-1.7533	-0.2950	-0.0131	-0.3797
0.9991	2.5577	0.0352	-0.5089	-0.4642	-0.3827	-0.3855	-1.2348	-0.1847	-0.4313	-0.4466
-0.3015	0.0352	3.1678	-0.0077	-0.5759	0.0581	-1.1952	-0.7441	-1.0952	0.6585	0.0124
0.3089	-0.5089	-0.0077	1.9108	-0.3391	-0.5009	0.3589	-0.4368	-0.3210	-0.4642	0.2693
-0.8686	-0.4642	-0.5759	-0.3391	3.4981	-0.9968	0.0135	0.3155	-2.0670	1.4846	0.2168
0.4583	-0.3827	0.0581	-0.5009	-0.9968	2.7041	0.1199	-0.5087	0.3605	-1.3118	-0.4005
-2.3532	-0.3855	-1.1952	0.3589	0.0135	0.1199	2.7419	1.0454	0.7931	-1.1387	0.6874
-1.7533	-1.2348	-0.7441	-0.4368	0.3155	-0.5087	1.0454	3.5938	1.1364	-1.4135	0.3607
-0.2950	-0.1847	-1.0952	-0.3210	-2.0670	0.3605	0.7931	1.1364	2.6641	-0.9914	-0.5369
-0.0131	-0.4313	0.6585	-0.4642	1.4846	-1.3118	-1.1387	-1.4135	-0.9914	3.6208	0.2171
-0.3797	-0.4466	0.0124	0.2693	0.2168	-0.4005	0.6874	0.3607	-0.5369	0.2171	2.1762

$\text{trQ}_x = 30.28$ - сума кофактора координата (без кофактора за оријентациони правац)

- Caspary

3.9117	1.0228	-0.3019	0.2464	-0.9511	0.4797	-2.3325	-1.7493	-0.3263	0.0004
1.0228	2.5307	0.0362	-0.5233	-0.4962	-0.4068	-0.3076	-1.1984	-0.2552	-0.4022
-0.3019	0.0362	3.1678	-0.0076	-0.5753	0.0590	-1.1976	-0.7452	-1.0931	0.6577
0.2464	-0.5233	-0.0076	1.9525	-0.2834	-0.5139	0.3419	-0.4410	-0.2973	-0.4743
-0.9511	-0.4962	-0.5753	-0.2834	3.5671	-1.0257	0.0197	0.3240	-2.0605	1.4813
0.4797	-0.4068	0.0590	-0.5139	-1.0257	2.6826	0.1896	-0.4760	0.2974	-1.2858
-2.3325	-0.3076	-1.1976	0.3419	0.0197	0.1896	2.5864	0.9681	0.9239	-1.1921
-1.7493	-1.1984	-0.7452	-0.4410	0.3240	-0.4760	0.9681	3.5558	1.2024	-1.4405
-0.3263	-0.2552	-1.0931	-0.2973	-2.0605	0.2974	0.9239	1.2024	2.5560	-0.9473
0.0004	-0.4022	0.6577	-0.4743	1.4813	-1.2858	-1.1921	-1.4405	-0.9473	3.6029

$\text{trQ}_x = 30.11$

Вектори непознатих парметара:

- Frtisch & Shaffrin

x=	dx1	-1.81	mm
	dy1	-0.91	mm
	dx2	-0.34	mm
	dy2	0.23	mm
	dx3	-0.37	mm
	dy3	2.37	mm
	dx4	2.15	mm
	dy4	0.60	mm
	dx5	0.37	mm
	dy5	-2.29	mm
	z2	-0.24	"

- Caspary

x=	dx1	-1.79	mm
	dy1	-0.92	mm
	dx2	-0.34	mm
	dy2	0.21	mm
	dx3	-0.39	mm
	dy3	2.36	mm
	dx4	2.19	mm
	dy4	0.62	mm
	dx5	0.33	mm
	dy5	-2.27	mm

Изравнате координате:

- Frtisch & Shaffrin

	X	Y
1	209.9982	299.9991
2	129.9997	560.0002
3	219.9996	850.0024
4	480.0022	160.0006
5	460.0004	949.9977

- Caspary

	X	Y
1	209.9982	299.9991
2	129.9997	560.0002
3	219.9996	850.0024
4	480.0022	160.0006
5	460.0003	949.9977

Разлике:

Shaffrin - Caspary	
ΔX (mm)	ΔY (mm)
-0.02	0.01
0.00	0.02
0.03	0.01
-0.04	-0.02
0.03	-0.01

Вектори поправака:

- Fritsch & Shaffrin

$v =$	3.41
	0.45
	-1.64
	-3.77
	-0.75
	0.47
	0.01
	0.89
	0.19
	0.18
	2.26
	-1.05
	-0.09
	-1.12

- Caspary

$v =$	3.41
	0.45
	-1.64
	-3.77
	-0.75
	0.47
	0.01
	0.89
	0.19
	0.18
	2.26
	-1.05
	-0.09
	-1.12

$$\hat{\sigma}_0 = 0.754$$

$$\hat{\sigma}_0 = 0.754$$

Глобални тест адекватности модела је са нивоом значајности 0.05 показао да је модел адекватан.

Обрада података мерења и оцена непознатих параметара је извршена и применом софтверског пакета PANDA, па су у наставку приказани добијени резултати. Приближне координате тачака и параметри тачности мерених величина си у исти као и код претходна два изравнања.

Кофакторска матрица непознатих параметара:

3.9117	1.0228	-0.3019	0.0362	-0.9511	0.4797	-2.3325	-1.7493	-0.3263	0.0004
1.0228	2.5307	0.2464	-0.5233	-0.4962	-0.4068	-0.3076	-1.1984	-0.2552	-0.4022
-0.3019	0.0362	3.1678	-0.0076	-0.5753	0.0590	-1.1976	-0.7452	-1.0931	0.6577
0.2464	-0.5233	-0.0076	1.9525	-0.2834	-0.5139	0.3419	-0.4410	-0.2973	-0.4743
-0.9511	0.4797	-0.5753	0.0590	3.5671	-1.0257	0.0197	0.3240	-2.0605	1.4813
-0.4962	-0.4068	-0.2834	-0.5139	-1.0257	2.6826	0.1896	-0.4760	0.2974	-1.2858
-2.3325	-1.7493	-1.1976	-0.7452	0.0197	0.3240	2.5864	0.9681	0.9239	-1.1921
-0.3076	-1.1984	0.3419	-0.4410	0.1896	-0.4760	0.9681	3.5558	1.2024	-1.4405
-0.3263	0.0004	-1.0931	0.6577	-2.0605	1.4813	0.9239	-1.1921	2.5560	-0.9473
-0.2552	0.0004	-0.2973	-0.4743	0.2974	-1.2858	1.2024	-1.4405	-0.9473	3.6029

$$\text{tr}Q_x = 30.11$$

Вредности изравнатих координата:

	X	Y
1	209.9981	299.9990
2	130.0000	560.0002
3	219.9999	850.0022
4	480.0021	160.0005
5	460.0000	949.9981

Вектор поправака:

v=	3.73
	0.49
	-1.74
	-3.90
	-0.97
	0.35
	-0.06
	0.50
	0.04
	0.66
	2.45
	-0.53
	0.28
-2.19	

$$\hat{\sigma}_0 = 0.827$$

3.6. Општа датумска трансформација

Као што је напред истакнуто, трансформација сличности са **d** одговарајуће одабраних параметара не деформише облик мреже и с обзиром на ту чињеницу, погодна је за промену координатног система. У оквиру овог поглавља упознаћемо се са трансформацијом из једног датума који је дефинисан условима, на пример $\mathbf{H}_1 \hat{\mathbf{x}} = 0$, у други са другим скупом услова облика $\mathbf{H}_2 \hat{\mathbf{x}} = 0$. Трансформација је линеарна и позната је као **S** трансформација.

Нека важе следећи односи: $\mathbf{H}_1^T = \mathbf{B}_1 \mathbf{S}$ и $\mathbf{H}_2^T = \mathbf{B}_2 \mathbf{S}$, где је $\mathbf{A} \mathbf{S} = 0$ и $\mathbf{S}^T \mathbf{S} = \mathbf{I}_a$. Матрице **B**₁ и **B**₂ су дијагоналне са елементима +1 или 0, при чему најмање **d** елемената мора бити једнак +1. Очигледно, матрица **B** попуњава нулама редове матрице **S**, сагласно нулама у матрици **B**, чувајући специјалну структуру матрице **H**. Варирањем елемената матрице **B**, могуће је поставити више различитих услова, као на пример:

- $\mathbf{B} = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{H} = \mathbf{S}^T \Rightarrow$ даје МНК решење са минималним трагом;
- $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_d \end{bmatrix} \Rightarrow$ дефинише конвенционални начин дефинисања датума са најмање $\mathbf{d}$ координата које дефинишу базу нулте варијансе или координатни систем мреже; и
- $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{k} > \mathbf{d} \Rightarrow$ дефинише решење које минимизира парцијалну норму $\|\hat{\mathbf{x}}_k\|$ вектора од $\mathbf{k}$ непознатих означених у $\mathbf{B}$ блок матрицом $\mathbf{I}_k$. Истовремено, збир коресподентних $\mathbf{k}$ варијанси (парцијални траг) кофакторске матрице једнак је минимуму.

Одговарајућим избором матрице $\mathbf{B}$ могуће је у изравнању мреже дефинисати било који од поменутих датума.

Кофакторска матрица оцена непознатих параметра $\hat{\mathbf{x}}_1$, уз услове $\mathbf{H}_1 \mathbf{x} = 0$, као што смо већ показали, гласи:

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_1} = (\mathbf{N} + \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1)^{-1} \mathbf{N} (\mathbf{N} + \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1)^{-1}. \quad (3.6-1)$$

За друге услове, на пример $\mathbf{H}_2 \mathbf{x} = 0$ добиће се нова оцена параметра $\hat{\mathbf{x}}_2$ са кофакторском матрицом $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_2}$. Веза између два решења остварује се преко познатог односа $\mathbf{N} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{N} = \mathbf{N}$ који важи за било које $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$, односно:

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_1} = (\mathbf{N} + \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1)^{-1} \mathbf{N} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_2} \mathbf{N} (\mathbf{N} + \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1)^{-1}. \quad (3.6-2)$$

С обзиром да су $\mathbf{N}$ и $(\mathbf{N} + \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1)^{-1}$ симетричне матрице, израз (3.6-2) се може написати и у другом облику, тј:

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_1} = \mathbf{K}_1 \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_2} \mathbf{K}_1^T, \quad (3.6-3)$$

при чему је:

$$\mathbf{K}_1 = (\mathbf{N} + \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1)^{-1} \mathbf{N}. \quad (3.6-4)$$

Коначно, израз (3.6-3) представља резултат општег закона преноса варијанси примењен на линеарну функцију, тј.

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{K}_1 \hat{\mathbf{x}}_2. \quad (3.6-5)$$

И овога пута, реч је о тзв. $\mathbf{S}$ трансформацији која се може користити ради трансформације било којег решења $\hat{\mathbf{x}}$, $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$ општег ГММ у неко друго решење засновано на датумским условима $\mathbf{H}_1^T = \mathbf{B}_1 \mathbf{S}$. Чак није ни нужно познавати услове у оригиналном решењу, већ је једино важно да су они типа $\mathbf{H}^T = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}$. Дакле, рачунски изрази за датумску трансформацију, у општем облику коначно гласе

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{K}_1 \hat{\mathbf{x}}, \quad (3.6-6)$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_1} = \mathbf{K}_1 \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{K}_1^T, \text{ и} \quad (3.6-7)$$

$$\mathbf{K}_1 = (\mathbf{N} + \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1)^{-1} \mathbf{N} = \mathbf{I} - \mathbf{S}(\mathbf{H}_1 \mathbf{S})^{-1} \mathbf{H}_1. \quad (3.6-8)$$

Десни део израза (3.6-8) је рачунски значајно стабилнији од израза лево од знака једнакости.

Уколико је неопходна још једна, додатна трансформација која захтева од вектора решења да задовољи услове, на пример $\mathbf{H}_2 \mathbf{x} = 0$, $\mathbf{H}_2^T = \mathbf{B}_2 \mathbf{S}$, довољно је срачунати само $\mathbf{K}_2$. Тада је:

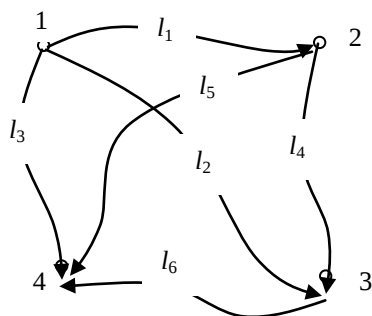
$$\hat{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{K}_2 \hat{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{K}_2 \hat{\mathbf{x}}, \quad (3.6-9)$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_2} = \mathbf{K}_2 \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_1} \mathbf{K}_2^T = \mathbf{K}_2 \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{K}_2^T \quad (3.6-10)$$

ПРИМЕР 3.6-1 (Caspary, 1988): На основу датих података мерења у нивелманској мрежи оцинити вектор непознатих параметара дефинисањем датума:

- а) фиксирањем једне тачке;
 - б) преко матрице услова;
 - ц) преко минималног трага кофакторске матрице и минималне норме вектора решења; и
 - д) минимизирањем дела трага и минимизирањем парцијалне норме.
- е) Применом израза за општу датумску трансформацију трансформисати резултате $\hat{\mathbf{x}}$ и $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$ из једног у други датум.

$$\begin{aligned} l_1 &= H_2 - H_1 = 1.2 \text{ mm} \\ l_2 &= H_3 - H_1 = 1.6 \text{ mm} \\ l_3 &= H_4 - H_1 = 1.7 \text{ mm} \\ l_4 &= H_3 - H_2 = 1.2 \text{ mm} \\ l_5 &= H_4 - H_2 = 2.1 \text{ mm} \\ l_6 &= H_4 - H_3 = 1.3 \text{ mm} \end{aligned}$$



По претпоставци, све тачке припадају једној хоризонталној равни и требају имати исте висине. Претпоставимо и да су дужине нивелманских страна, такође приближно исте, тј. мерења су исте тачности.

ГММ гласи: $\mathbf{I} + \mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$, са $\mathbf{K}_1 = \sigma_0^2 \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{I}$.

Вектор садржи висине четири тачке, па је $\mathbf{u} = 4$, а матрица $\mathbf{A}$ има димензије 6×4 . Већ смо истакли да је ранг матрице $\mathbf{A}$ једнак $\mathbf{r}(\mathbf{A}) = 3$, тако да дефект ранга износи $\mathbf{d} = \mathbf{u} - \mathbf{r} = 4 - 3 = 1$. С обзиром да располажемо са 6 опажања исте тежине $\mathbf{p}_i = 1$, нормалне једначине МНК оцене гласе:

$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{A}^T \mathbf{l} = 0$, са

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & +1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & +1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & -1 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & -1 & +1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_T \mathbf{A} = \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Као што је истакнуто, без дефинисања система висина нормалне једначине немају решење.

а) За дефинисање система висина изаберимо висину тачке 1 (фиксна тачка). У том случају, избрисаћемо прву колону матрице $\mathbf{A}$, тако да су њене димензије сада 6×3 , а димензије матрице система нормалних једначина 3×3 , са новим дефектом ранга $\mathbf{d} = 0$.

$$\mathbf{A}_a = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \\ -1 & +1 & 0 \\ -1 & 0 & +1 \\ 0 & -1 & +1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_a = \mathbf{N} = \begin{bmatrix} +3 & -1 & -1 \\ -1 & +3 & -1 \\ -1 & -1 & +3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_a^T \mathbf{l} = \begin{bmatrix} -2.1 \\ +1.5 \\ +5.1 \end{bmatrix}$$

Оцена вектора непознатих параметара (поправака приближних вредности) изгледа:

$$\hat{\mathbf{x}}_a^T = [\hat{x}_{2a} \quad \hat{x}_{3a} \quad x_{4a}] = [0.6 \quad 1.5 \quad 2.4] \text{ mm}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}_a \hat{\mathbf{x}}_a - \mathbf{l}$$

$$\mathbf{v}^T = [-0.6 \quad -0.1 \quad +0.7 \quad -0.3 \quad -0.3 \quad -0.4] \text{ mm}$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}{\mathbf{n} - \mathbf{u} + \mathbf{d}} = \frac{1.2}{6 - 4 + 1} = 0.4 \text{ mm}^2$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{x}_a} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +2 & +1 & +1 \\ 0 & +1 & +2 & +1 \\ 0 & +1 & +1 & +2 \end{bmatrix}, \quad \text{tr} \mathbf{Q}_{\hat{x}_a} = \frac{3}{2}, \quad \hat{\mathbf{K}}_{\hat{x}_a} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_{\hat{x}_a}$$

$$\|\hat{\mathbf{x}}_a\| = (\hat{\mathbf{x}}_a^T \hat{\mathbf{x}}_a)^{\frac{1}{2}} = 2.89 \text{ mm}$$

1

б) Уколико се тачка 1 изабере као датумска, тада је $\mathbf{H} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$, сходно $\mathbf{H}^T = \mathbf{B}\mathbf{S}$, где је $\mathbf{A}\mathbf{S} = 0$, $\mathbf{S}^T = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$ јединични вектор коресподентан нултој јединичној вредности од $\mathbf{N}$, тада је

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} +1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{x}}_b = \mathbf{Q}_{\hat{x}_b} \mathbf{A}^T \mathbf{l} = \hat{\mathbf{x}}_a$$

где је $\mathbf{Q}_{\hat{x}_b} = (\mathbf{N} + \mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{N} (\mathbf{N} + \mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} = \mathbf{Q}_{\hat{x}_a}$.

ц) $\mathbf{d} = 1$, $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ који задовољава услове $\mathbf{NS} = 0$, $\mathbf{AS} = 0$. Нормализацијом $\mathbf{S}$, добија се:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \mathbf{S} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \Rightarrow \mathbf{S}^T \mathbf{S} = 1$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_c} = (\mathbf{N} + \mathbf{S} \mathbf{S}^T)^{-1} - \mathbf{S} \mathbf{S}^T$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_c} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} +3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & +3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & +3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & +3 \end{bmatrix}, \text{tr} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_c} = \frac{3}{4}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_c = \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_c} \mathbf{A}^T \mathbf{l} = \begin{bmatrix} -1.125 \\ -0.525 \\ +0.375 \\ +1.275 \end{bmatrix} \text{ mm}, \|\hat{\mathbf{x}}_c\| = 1.82 \text{ mm}$$

Решење под ц) задовољава услов $\mathbf{S}^T \hat{\mathbf{x}}_c = 0$, а остварени су и следећи услови $\|\hat{\mathbf{x}}_c\| < \|\hat{\mathbf{x}}_a\|$ и $\text{tr} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_c} < \text{tr} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_a}$.

д) Претпоставимо да тачке 2 и 3 дефинишу систем висина, тако уз критеријуме $(\hat{\mathbf{x}}_d^T \mathbf{B} \hat{\mathbf{x}}_d)^{\frac{1}{2}} = \min$ и $\text{tr} \mathbf{B} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_d} \mathbf{B} = \min$. Тада је:

$$\mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \mathbf{I}_2 & & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{H}_d = (\mathbf{B}_d \mathbf{S})^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Услов датума облика $\mathbf{H}_d \hat{\mathbf{x}}_d = 0$ означава да је $\hat{\mathbf{x}}_{2d} + \hat{\mathbf{x}}_{3d} = 0$.

$$\mathbf{Q}_{\bar{\mathbf{x}}_d} = (\mathbf{N} + \mathbf{H}_d^T \mathbf{H}_d)^{-1} \mathbf{N} (\mathbf{N} + \mathbf{H}_d^T \mathbf{H}_d)^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} +3 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & +3 \end{bmatrix}$$

$$\text{tr} \mathbf{Q}_{\bar{\mathbf{x}}_d} = 1, \text{parcijalni tr} \mathbf{Q}_{\bar{\mathbf{x}}_d} = \frac{1}{4}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_d = \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_d} \mathbf{A}^T \mathbf{l} = \begin{bmatrix} -1.05 \\ -0.45 \\ +0.45 \\ +1.35 \end{bmatrix} \text{mm}, \quad \|\hat{\mathbf{x}}_d\| = 1.83; \quad \text{parc.} \|\hat{\mathbf{x}}_d\| = 0.64$$

е) Одаберимо трансформацију решење а) у решење ц), тада је

$$\hat{\mathbf{x}}_c = \mathbf{K}_c \hat{\mathbf{x}}_a$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_c} = \mathbf{K}_c \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_a} \mathbf{K}_c^T$$

$$\mathbf{K}_c = \mathbf{I} - \mathbf{S}(\mathbf{H}_c \mathbf{S}^T)^{-1} \mathbf{H}_c$$

Услови за датум под ц) су: $\mathbf{S}_c = \mathbf{H}_c^T$, $\mathbf{H}_c = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, а матрица

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \text{ тј.}$$

$$\mathbf{H}_c \mathbf{S} = \frac{4}{2} = 2, \quad (\mathbf{H}_c \mathbf{S})^{-1} = \frac{1}{2}.$$

$$\mathbf{K}_c = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} +3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & +3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & +3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & +3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_c \hat{\mathbf{x}}_a = \begin{bmatrix} -1.125 \\ -0.525 \\ +0.375 \\ +1.275 \end{bmatrix} \text{mm}$$

4. МЕРЕ ТАЧНОСТИ ГЕОДЕТСКИХ МРЕЖА

Облик геодетске мреже и објективна оцена тачности и поузданости мерења и оцена непознатих параметара у ГММ су од битне важности у оним геодетским радовима где се очекује највиши ниво тачности. У тој категорији је свакако и деформациона анализа која понекад захтева тачност еквивалентну самим износима грешака опажања.

Из практичних разлога, у МНК изравнању као параметри ГММ бирају се координате одабраних тачака геодетске мреже. Међутим, у претходним поглављима смо показали да координате концентрисане у вектору $\hat{\mathbf{x}}$, као и матрица коваријанси оцена непознатих параметара $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}$ нису инваријантне величине у ГММ, односно зависе од начина дефинисања координатног система, тј. геодетског датума. Та чињеница изазива у извесном смислу проблеме у оцени прецизности добијених оцена, а и саме оцене, као што смо показали, нису јединствене. Међутим, матрица $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}$ садржи веома значајне информације о квалитету геодетских мрежа и полазна је основа за сваку озбиљну анализу. Као што је познато, **ихи** матрица коваријанси $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}$ дефинише се као:

$$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}, \quad \mathbf{r}(\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}) = \mathbf{r} = \mathbf{u} - \mathbf{d}. \quad (4-1)$$

Како у слободној мрежи $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}$ поседује дефект ранга $\mathbf{d}$, с тога је у $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}$, $\mathbf{d}$ колона редувантно. Постоји значајан број начина на који се овај проблем може превазићи, а сваки од њих дефинише различиту основу (базу) одговарајућег $\mathbf{r}$ -димензионалног векторског простора. Решавање проблема нејединствености произвело је велики број решења, међутим ни један од њих није без мана (Casparu, 1988). Уколико се при упоређивању квалитета мрежа располаже са њиховим матрицама коваријанси, проблем се значајно поједностављује. Осим тога и оцењиве величине (инваријантне функције) се користе у том смислу као показатељ квалитета и мера вредности геодетске мреже.

Од важности је, мада је то мањи проблем, и избор фактора варијансе у (4-1). Уколико су познате варијансе опажања и ако је ГММ коректан, тада се при оценама несигурности непознатих параметара користи фактор σ_0^2 . Нажалост, *a priori* информације нису увек довољно поуздане тако да модел представља само мање-више добру апроксимацију реалности. У таквим случајевима, приликом оцена несигурности непознатих параметара (уколико смо пре тога отклонили грубе грешке; подразумева се да су систематске грешке отклоњене

пре изравнања) уместо σ_0^2 користи се њена оцена $\hat{\sigma}_0^2$ која се још означава и као s_0^2 . Да би оцена s_0^2 била поуздана, пожељно је да модел поседује респективан број степени слободе, односно однос $(n-u)/r$ треба да буде већи од 0.5.

На основу (4-1) може се закључити да на тачност оцена непознатих параметара можемо утицати на три основна начина:

- Контролисањем фактора варијанси преко избора инструмената и броја поновљених мерења;
- Одговарајућим избором матрице $\mathbf{A}$ преко одговарајућег распореда тачака, плана опажања и типа мерења; и
- Одговарајућим избором матрице тежина $\mathbf{P}$ преко *a priori* тежина које су функције типа опажања и њихове релативне прецизности.

Детаљно о оптимизацији геодетских мрежа биће више речи у оквиру неких других курсева и на вишим нивоима студија.

С обзиром да је број елемената матрице $\mathbf{K}_{\hat{x}}$ често значајно велики, не би било практично њу директно користити за анализу тачности геодетских мрежа. Из тих разлога, информације о оценама концентришу се у неколико репрезентативних мера до којих се долази релативно лако и брзо. Понекад, за ту намену користе се и неки графички прикази, који сликовито илуструју карактер оцена. Оба приступа имају и своје мане које се огледају у извесном губитку корисних информација. Имајући то у виду, искусни геодета мора проценити која мера квалитета му је неопходна и да ли нека друга у конкретној ситуацији даје боље резултате.

4.1. Декомпозиција сопствених вредности

Фундаментални приступ анализи матрице коваријанси остварује се декомпозицијом сопствених вредности од $\mathbf{K}_{\hat{x}}$. Уколико је $\mathbf{x}$ $n \times 1$ вектор непознатих параметара у оквиру ГММ, $\hat{\mathbf{x}}$ одговарајућа оцена од $\mathbf{x}$ и $\mathbf{K}_{\hat{x}}$ матрица коваријанси чији је ранг једнак r , тада квадратна форма

$$(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{K}_{\hat{x}}^{-1} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) = c, \quad (4.1-1)$$

представља r - димензионални хиперелипсоид са центром у $\mathbf{x}$. $\mathbf{K}_{\hat{x}}^{-1}$ представља уопштену инверзију од $\mathbf{K}_{\hat{x}}$ и гласи:

$$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}^{-} = \frac{1}{\sigma_0^2 \mathbf{N}}, \text{ где је } \mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}. \quad (4.1-2)$$

Нормалност распореда оцена непознатих параметара представља се следећим изразом:

$$\hat{\mathbf{x}} \sim \mathbf{N}(\mathbf{x}, \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}), \quad (4.1-3)$$

и за познато σ_0^2 , квадратна форма (4.1-1) поседује χ^2 распоред са $\mathbf{r}$ степени слободe, односно

$$(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}^{-} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \sim \chi_r^2, \quad (4.1-4)$$

где се вредност $\chi_{1-\alpha, \mathbf{r}}^2$ рачуна за задату вредност вероватноће $1-\alpha$ и $\mathbf{r}$ степени слободe. Добијена вредност $\chi_{1-\alpha, \mathbf{r}}^2$ биће премашена само у $\alpha\%$ случајева. Односно, квадратна форма

$$(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}^{-} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \sim \chi_{1-\alpha, \mathbf{r}}^2 \quad (4.1-5)$$

статистички се може интерпретирати и као једначина $(1-\alpha)$ хиперелипсоида поверења у $\mathbf{r}$ - димензионалном простору.

Хиперелипсоид је дефинисан са $\mathbf{r}$ полуоса и њиховим правцима у простору. Како се дужине оса хиперелипсоида пропорционалне квадратним коренима сопствених вредности од $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}$ и с обзиром да су правци дефинисани сопственим векторима, значај декомпозиције сопствених вредности је очигледан.

Основна једначина сопствених вредности гласи:

$$(\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}} - \lambda_i \mathbf{I}) \cdot \mathbf{Y}_i = 0, \text{ за свако } i \in (1, 2, \dots, \mathbf{u}), \quad (4.1-6)$$

где је λ_i i -та сопствена вредност или латентни корен од $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}$, а $\mathbf{Y}_i$ њој придружени сопствени вектор. Како је $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}$ симетрична и позитивно-полудефинитна матрица по дефиницији, постоји $\mathbf{r}(\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}) = \mathbf{r}$ различитих позитивних сопствених вредности и $\mathbf{d}$ сопствених вредности једнаких нули ($\mathbf{d} = \mathbf{u} - \mathbf{r}$). Сагласно сопственим вредностима, постоји $\mathbf{u}$ различитих међусобно ортогоналних сопствених вектора $\mathbf{Y}_i$. Хомогена једначина (4.1-

б) поседује нетривијално решење $\mathbf{Y}_i$ ако и само ако је матрица $(\mathbf{K}_{\hat{x}} - \mathbf{I}\lambda_i)$ сингуларна, односно ако јој је детерминанта једнака нули, тј.

$$\det(\mathbf{K}_{\hat{x}} - \lambda_i \mathbf{I}) = 0. \quad (4.1-7)$$

Једначина (4.1-7) назива се *карактеристичном једначином* од $\mathbf{K}_{\hat{x}}$.

Развијањем детерминанте добија се карактеристични полином $\mathbf{u}$ -тог реда од λ_i . Решење по λ_i једноставно је у случају малог броја $\mathbf{u}$. Код комплекснијих случајева наведени поступак се често користи.

Након рачунања λ_i применом стандардног метода елиминације, систем линеарних једначина (4.1-6) је могуће решити по $\mathbf{Y}_i$. С обзиром да је $\mathbf{Y}_i$ дефинисан у сваком погледу осим у случају слободне константе, његова нормализована форма изгледа:

$$\|\mathbf{Y}_i\| = (\mathbf{Y}_i^T \mathbf{Y}_i)^{\frac{1}{2}} = 1. \quad (4.1-8)$$

Уколико су формиране дијагонална матрица сопствених вредности Λ и $\mathbf{u} \times \mathbf{u}$ матрица сопствених вектора $\mathbf{Y}$:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = [\mathbf{Y}_1 \quad \mathbf{Y}_2 \quad \dots \quad \mathbf{Y}_u], \quad (4.1-9)$$

тада се $\mathbf{n}$ једначина облика (4.1-6) може заменити једном, тј.

$$\mathbf{K}_{\hat{x}} \mathbf{Y} = \mathbf{Y} \Lambda. \quad (4.1-10)$$

Под претпоставком нормализације сопствених вектора, важи релација:

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{Y} = \mathbf{Y} \mathbf{Y}^T = \mathbf{I}, \quad (4.1-11)$$

чиме се дефинише компактна форма проблема сопствених вредности:

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{K}_{\hat{x}} \mathbf{Y} = \Lambda, \quad \mathbf{K}_{\hat{x}} = \mathbf{Y} \Lambda \mathbf{Y}^T. \quad (4.1-12)$$

Веома важна особина сопствених вредности јесте њихова инваријантност у односу на трансформацију сличности, односно конвенционална датумска

трансформација, дефинисана у 3. поглављу, не мења сопствене вредности, тј. све мере тачности које се заснивају на сопственим вредностима остају непромењене.

Обично се сопствене вредности уређују у опадајућем низу као $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ чиме се поједностављује анализа која је често заснована на екстремним вредностима. Сваки пар $\lambda_i \mathbf{Y}_i$ дефинише једну осу хиперболоида и то величином полуосе $\mathbf{a}_i = \sqrt{\mathbf{c} \cdot \lambda_i}$ и правцем $\mathbf{Y}_i$. Неке од осталих особина јединичних вредности λ_i а које су од посебног значаја у анализи тачности гласе:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i &= \text{tr} \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}} \\ \prod_{i=1}^n \lambda_i &= \det \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}} \\ \frac{\mathbf{Y}_i^T \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{Y}_i}{\mathbf{Y}_i^T \mathbf{Y}_i} &= \lambda_i \\ \mathbf{Y}_i &= \text{сопствени вектор од } \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}} \\ \lambda_{\min} &\leq \frac{\mathbf{f}^T \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{f}}{\mathbf{f}^T \mathbf{f}} \leq \lambda_{\max} \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (4.1-13)$$

ПРИМЕР 4.1-1: Одредити сопствене вредности и сопствене векторе следеће квадратне матрице:

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$$

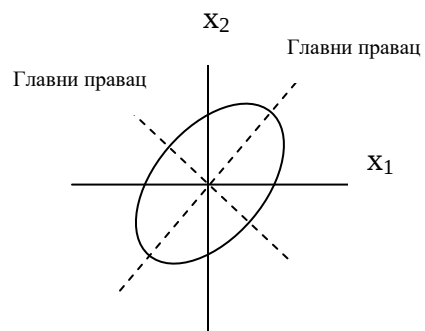
$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Преношењем десне на леву страну следи:

$$\begin{aligned} (-5 - \lambda)x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + (-2 - \lambda)x_2 &= 0 \end{aligned}$$

или у матричном облику:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = 0$$



С обзиром да се ради о хомогеном линеарном систему које има нетривијално решење $\mathbf{x} \neq 0$ (тражи се један нетривијалан сопствени вектор) ако и само ако су коефицијенти његове детерминанте једнаки нули, тј.

$$\mathbf{D}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-5-\lambda) \cdot (-2-\lambda) - 4 = \lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0$$

где је $\mathbf{D}(\lambda)$ карактеристична детерминанта или карактеристични полином, при $\mathbf{D}(\lambda) = 0$ карактеристичне једначине од $\mathbf{N}$.

Решење квадратне једначине гласи: $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = -6$ и представљају сопствене вредности од $\mathbf{N}$.

Следећи корак је да се одреди сопствени вектор од $\mathbf{N}$ коресподентан са $\lambda_1 = -1$. Заменом у горњем изразу $\lambda = \lambda_1 = -1$ даје:

$$\begin{aligned} -4\mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2 &= 0 \\ 2\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 &= 0, \end{aligned}$$

одакле следи да је $\mathbf{x}_2 = 2\mathbf{x}_1$. За $\mathbf{x}_1 = 1$, добија се сопствени вектор облика:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \text{ ДОКАЗ: } \mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = (-1)\mathbf{x}_1 = \lambda_1 \mathbf{x}_1.$$

Сопствени вектор од $\mathbf{N}$ коресподентан са $\lambda_2 = -6$ након замене у горњем изразу:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2 &= 0 \\ 2\mathbf{x}_1 + 4\mathbf{x}_2 &= 0 \end{aligned}$$

даје решење облика $\mathbf{x}_2 = -\mathbf{x}_1/2$, при чему се $\mathbf{x}_1$ слободно бира. Тако, за $\mathbf{x}_1 = 2$ добија се $\mathbf{x}_2 = -1$. Коначно, сопствени вектор од $\mathbf{N}$ коресподентан $\lambda_2 = -6$ гласи:

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}. \text{ ДОКАЗ: } \mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 6 \end{bmatrix} = (-6)\mathbf{x}_2 = \lambda_2 \mathbf{x}_2.$$

Добијени сопствени вектори дефинишу правце главних оса (угао у односу на координатне осе), тј. оса у правцу највећих деформација или девијација оцена непознатих параметара, ако се ради о проблему изравнања и оцени непознатих параметара. У датом примеру први јединични вектор има смер $26^\circ.5651$, а други $116^\circ.5651$.

4.2. Локалне мере тачности

Израз тачност као критеријум квалитета геодеетских мрежа често није довољан да потпуно опише све аспекте квалитета, посебно имајући у виду различитост намена појединих геодеетских мрежа (национална мрежа, локална мрежа, мрежа специјалних намена и сл.). Међутим, независно од врсте показатеља квалитета, све оне произилазе из матрице коваријанси $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$, где је:

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} & \dots & \mathbf{Q}_{1p} \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} & \dots & \mathbf{Q}_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{Q}_{p1} & \mathbf{Q}_{p2} & \dots & \mathbf{Q}_{pp} \end{bmatrix}, \quad (4.2-1)$$

и за случај 2Д мреже, подељена је на партиције, односно 2×2 блокове матрица, где се сваки блок односи на по једну тачку мреже у $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ координатном систему,

$$\mathbf{Q}_{mm} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{xx}^m & \mathbf{q}_{xy}^m \\ \mathbf{q}_{yx}^m & \mathbf{q}_{yy}^m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{ms} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{xx}^{ms} & \mathbf{q}_{xy}^{ms} \\ \mathbf{q}_{yx}^{ms} & \mathbf{q}_{yy}^{ms} \end{bmatrix}. \quad (4.2-2)$$

Као мера тачности која се најчешће сусреће у пракси јесте **стандардно одступање координата**. Уколико је позната варијанса популације σ_0^2 , тада је:

$$\sigma_{\hat{\mathbf{x}}} = \sigma_0 \sqrt{\mathbf{q}_{xx}} \quad \sigma_{\hat{\mathbf{y}}} = \sigma_0 \sqrt{\mathbf{q}_{yy}}, \quad (4.2-3)$$

где су $\mathbf{q}_{xx}$ и $\mathbf{q}_{yy}$ одговарајући дијагонални елементи (кофактори) матрице кофактора оцена непознатих параметара $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$. Ако је σ_0^2 непознато, користи се њена оцена $\hat{\sigma}_0^2$, која се још означава и као $\mathbf{s}_0^2$, тј.

$$\mathbf{s}_{\hat{\mathbf{x}}} = \hat{\sigma}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{s}_0 \sqrt{\mathbf{q}_{xx}} \quad \mathbf{s}_{\hat{\mathbf{y}}} = \hat{\sigma}_{\hat{\mathbf{y}}} = \mathbf{s}_0 \sqrt{\mathbf{q}_{yy}}. \quad (4.2-4)$$

Често се у пракси изрази (4.2-3) и (4.2-4) називају и **кореном средњих квадратних грешака координата**.

Због значајне зависности стандардних одступања од броја сувишних мерења, уместо њих се препоручује употреба и других критеријума, као што је, на пример **интервал поверења**. Да би се интервал поверења употребио као мера

квалитета, неопходно је познавати природу распореда вероватноћа вектора опажања и непознатих параметара ГММ. Уколико се пође од претпоставке да параметри припадају нормалном распореду, тада се може тврдити да разлика непознатог параметра и његове оцено:

$$(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \sim N(0, \sigma_{\hat{\mathbf{x}}}), \quad (4.2-5)$$

припада нормалном распореду, а вероватноћа:

$$P(-z_{\alpha/2} < \frac{\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}}{\sigma_{\hat{\mathbf{x}}}} < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha, \quad (4.2-6)$$

тврди да се параметар $\mathbf{x}$ налази у интервалу облика:

$$P(\hat{\mathbf{x}} - z_{\alpha/2} \sigma_{\hat{\mathbf{x}}} < \mathbf{x} < \hat{\mathbf{x}} + z_{\alpha/2} \sigma_{\hat{\mathbf{x}}}) = 1 - \alpha. \quad (4.2-7)$$

За вредност нивоа поверења најчешће се користи $\alpha = 5\%$, тако да је тада $z_{\alpha/2} = 1.96$, односно

$$P(\hat{\mathbf{x}} - 1.96 \cdot \sigma_{\hat{\mathbf{x}}} < \mathbf{x} < \hat{\mathbf{x}} + 1.96 \cdot \sigma_{\hat{\mathbf{x}}}) = 95\%, \quad (4.2-8)$$

дефинише 95% интервал поверења од $\hat{\mathbf{x}}$ који потпуније информише о квалитету оцено параметра у односу на (4.2-3).

Уколико се користи оцена варијансе s_0^2 , разлика параметра и његове оцено понаша се по закону студентовог распореда,

$$\frac{\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}}{s_{\hat{\mathbf{x}}}} \sim t_{n-u}, \quad (4.2-9)$$

а слично као у (4.2-6) и (4.2-7) следи:

$$P(-t_{\alpha/2} < \frac{\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}}{s_{\hat{\mathbf{x}}}} < t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha, \\ P(\hat{\mathbf{x}} - t_{\alpha/2} s_{\hat{\mathbf{x}}} < \mathbf{x} < \hat{\mathbf{x}} + t_{\alpha/2} s_{\hat{\mathbf{x}}}) = 1 - \alpha, \quad (4.2-10)$$

при чему $t_{\alpha/2}$ зависи од броја степени слободе $\mathbf{f} = \mathbf{n} - \mathbf{u}$ и нивоа поверења $1 - \alpha$ и може се одредити из таблица Студентовог ($\mathbf{t}$) распореда. За неке типичне вредности вероватноћа и броја степени слободе, у табели 4.2-1, дате су вредности од $t_{\alpha/2, \mathbf{f}}$.

Табела 4.2-1: Вредности квантила студентовог распореда (последња колона вредности коресподентна је и $z_{\alpha/2}$ вредностима)

$f = n - u$	2	4	6	8	10	15	20	25	30	40	120	∞
$\alpha = 5\%$	4.30	2.78	2.45	2.31	2.23	2.13	2.09	2.06	2.04	2.02	1.98	1.96
$\alpha = 1\%$	9.92	4.60	3.71	3.36	3.17	2.95	2.84	2.79	2.75	2.70	2.62	2.58

Често су у неким практичним применама неке функције параметара од посебне важности (на пример дужина осе моста или бране, азимут правца и сл.). Такве функције $f(\mathbf{x})$ од параметара $\mathbf{x}$ је неопходно претходно линеаризовати и свести на облик:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{f}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{f}_2\mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{f}_n\mathbf{x}_n = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{f}^T\mathbf{x}, \quad (4.2-11)$$

који је погодан за примену закона преноса варијанси:

$$\mathbf{q}_f = \mathbf{f}^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{f}, \quad (4.2-12)$$

и рачунање стандардних одступања функција:

$$\sigma_f = \sigma_0 \sqrt{\mathbf{q}_f} \quad \text{или} \quad \mathbf{s}_f = \mathbf{s}_0 \sqrt{\mathbf{q}_f}. \quad (4.2-13)$$

На сличан начин као у (4.2-10) могу се дефинисати и интервали поверења функције.

Поред наведених мера квалитета у 2Д мрежама користе се **стандардне елипсе грешака** и **елипсе поверења**. Стандардне елипсе представљају уопштену верзију стандардног одступања док су елипсе поверења дводимензионални еквивалент интервала поверења. Уколико се односе на једну тачку, елипсе називамо **апсолутним елипсама**, а уколико се односе на релативан положај две тачке, тада се називају **релативним елипсама**.

Квадратна форма:

$$(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}^{-1} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) = \chi_{1-\alpha, r}^2, \quad (4.2-14)$$

репрезентује $(1 - \alpha)$ хиперелипсоид поверења у $\mathbf{r}$ - димензионалном простору. Ако посматрамо положај тачке $\mathbf{P}_k$ у дводимензионалном простору, тада важи следећа релација:

$$(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{Q}_{kk}^{-1} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) = \sigma_0^2 \chi_{1-\alpha, 2}^2, \quad (4.2-15)$$

која представља елипсу грешака чије су осе функције сопствених вредности и сопствених вектора од $\mathbf{Q}_{kk}$.

Сагласно (4.1-6) основна једначина гласи:

$$(\mathbf{Q}_{kk} - \lambda_i \mathbf{I}) \cdot \mathbf{Y}_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad (4.2-16)$$

и има решење по λ_i користећи карактеристични полином облика:

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{xx}^k - \lambda & \mathbf{q}_{xy}^k \\ \mathbf{q}_{yx}^k & \mathbf{q}_{yy}^k - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(\mathbf{q}_{xx}^k - \lambda)(\mathbf{q}_{yy}^k - \lambda) - \mathbf{q}_{xy}^k \mathbf{q}_{yx}^k = 0, \quad (4.2-17)$$

са два корена:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{q}_{xx}^k + \mathbf{q}_{yy}^k + \mathbf{z})$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{q}_{xx}^k + \mathbf{q}_{yy}^k - \mathbf{z}), \quad (4.2-18)$$

где је:

$$\mathbf{z}^2 = (\mathbf{q}_{xx}^k - \mathbf{q}_{yy}^k)^2 + 4\mathbf{q}_{xy}^k \mathbf{q}_{yx}^k. \quad (4.2-19)$$

Заменом у (4.2-16) добијају се једначине ортогоналних сопствених вектора $\mathbf{Y}_i = (\mathbf{Y}_{i1}, \mathbf{Y}_{i2})^T$:

$$(\mathbf{q}_{xx}^k - \lambda_i) \mathbf{Y}_{i1} + \mathbf{q}_{xy}^k \mathbf{Y}_{i2} = 0$$

$$\mathbf{q}_{yx}^k \mathbf{Y}_{i1} + (\mathbf{q}_{yy}^k - \lambda_i) \mathbf{Y}_{i2} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (4.2-20)$$

из којих следе правци сопствених вектора облика:

$$\tan \alpha_i = \frac{\mathbf{Y}_{i2}}{\mathbf{Y}_{i1}}, \quad \alpha_2 = \alpha_1 + 90^\circ. \quad (4.2-21)$$

У употреби је чешће други израз, који гласи:

$$\tan 2\alpha = \frac{2q_{xy}^k}{q_{xx}^k - q_{yy}^k}, \quad (4.2-22)$$

где је α угао правца велике полуосе елипсе у односу на позитивни смер x осе.

Уколико је позната варијанса популације σ_0^2 , величине полуоса елипси поверења сходно (4.2-14) износе:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \sigma_0 \sqrt{\lambda_1 \chi_{1-\alpha,2}^2} \\ \mathbf{b} &= \sigma_0 \sqrt{\lambda_2 \chi_{1-\alpha,2}^2} \end{aligned} \quad (4.2-22)$$

Најчешће се за ниво поверења бирају вредности 95% или 99%, при чему су, сходно таблицама χ^2 распореда, $\chi_{0.95,2}^2 = 5.99$ и $\chi_{0.99,2}^2 = 9.21$.

За $\chi^2 = 1$ у (4.2-15) добија се стандардна елипса облика:

$$(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{Q}_{kk}^{-1} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) = \sigma_0^2, \quad (4.2-23)$$

са осама:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \sigma_0 \sqrt{\lambda_1} \\ \mathbf{b} &= \sigma_0 \sqrt{\lambda_2} \end{aligned} \quad (4.2-24)$$

Вероватноћа α да се истинити положај тачке $\mathbf{P}_k$ налази унутар елипсе (4.2-23) износи 39.4%.

Уколико се уместо σ_0^2 користи њена оцена $\mathbf{s}_0^2$, квадратна форма припада $\mathbf{F}$ распореду (Фишеров распоред) са две и $(\mathbf{n} - \mathbf{r})$ степени слободе, односно елипса поверења тада гласи:

$$(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{Q}_{kk}^{-1} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) = 2\mathbf{s}_0^2 \mathbf{F}_{1-\alpha,2,\mathbf{n}-\mathbf{r}}, \quad (4.2-25)$$

где је $\mathbf{F}_{1-\alpha,2,\mathbf{n}-\mathbf{r}}$ одговарајући $1-\alpha$ квантил Фишевог распореда. И у овом случају, за $\mathbf{F}_{1-\alpha,2,\mathbf{n}-\mathbf{r}} = 1$ добија се стандардна елипса грешака са полуосама једнаким:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= s_0 \sqrt{\lambda_1} \\ \mathbf{b} &= s_0 \sqrt{\lambda_2} \end{aligned} \quad (4.2-26)$$

а вредности полуоса елипси поверења рачунају се као:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= s_0 \sqrt{2\lambda_1 F_{1-\alpha, 2, n-r}} \\ \mathbf{b} &= s_0 \sqrt{2\lambda_2 F_{1-\alpha, 2, n-r}} \\ \tan 2\alpha &= \frac{2q_{xy}}{q_{xx} - q_{yy}} \end{aligned} \quad (4.2-27)$$

Вероватноћа да ће истинити положај неке тачке бити унутар стандардне елипсе оцене њеног непознатог положаја јесте функција броја степени слободе $n - r$ и достиже максимум од 39% за $n - r = \infty$.

Понекад се елипсе замењују круговима што поједностављује рачунање. Зависно од примењеног стандарда квалитета, могуће је срести више различитих мера квалитета изражених различитим радијусима кругова грешака и то:

- $s_p = \frac{1}{2}(s_{\hat{x}} + s_{\hat{y}})$ - стандардна грешка круга са вероватноћом $\approx 39\%$;
- $s_p = 0.59(s_{\hat{x}} + s_{\hat{y}})$ - вероватна грешка круга са вероватноћом $\approx 50\%$;
- $s_p = \sqrt{(s_{\hat{x}}^2 + s_{\hat{y}}^2)} = \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} = s_0 \sqrt{\lambda_1 + \lambda_2} = s_0 \sqrt{\text{tr} \mathbf{Q}_{kk}}$ - корен средње квадратне грешке положаја (Хелмертова грешка тачке); и
- $s_p = \mathbf{a} \cdot \frac{\mathbf{b}}{s_0} = s_0 \sqrt{\lambda_1 \cdot \lambda_2} = s_0 \sqrt{\det \mathbf{Q}_{kk}}$ - општа грешка положаја чија вероватноћа зависи од односа s_x/s_y .

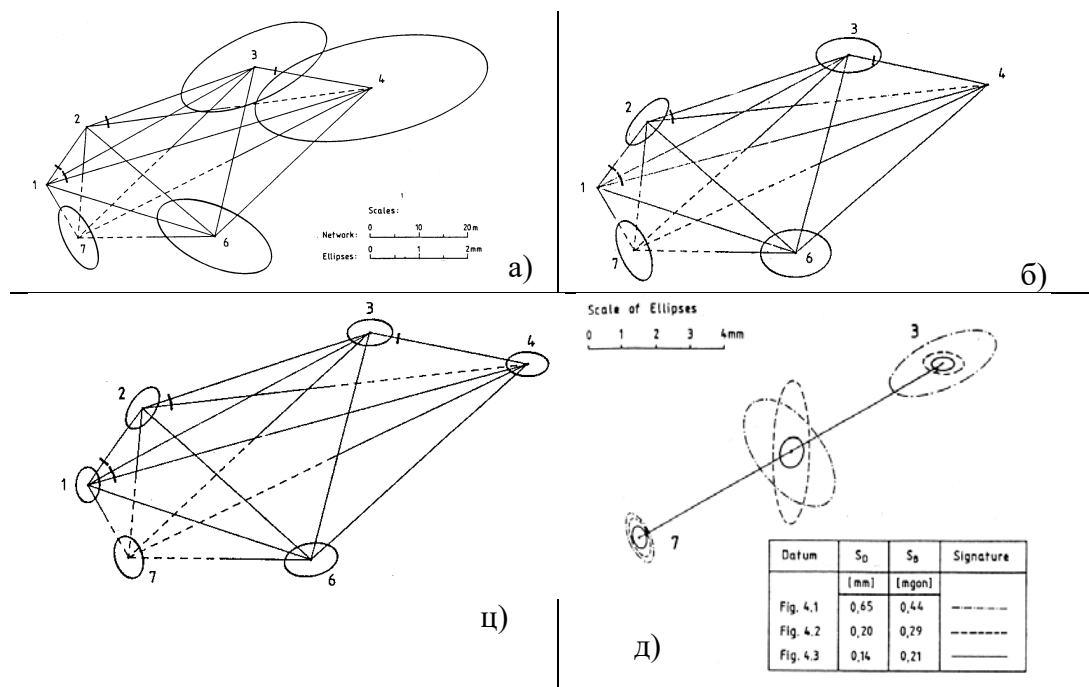
Апсолутне елипсе грешака (укључујући и кругове) имају једну лошу особину, а то је да игноришу међусобну зависност између тачака (коваријансе). Проблем се делимично елиминише коришћењем релативних елипси грешака које репрезентују релативну тачност пара суседних или несуседних тачака. Елементи таквих релативних елипси се рачунају слично као код апсолутних, с том разликом што се из кофакторске матрице узимају елементи који се односе на одговарајуће разлике координата, као на пример, ако се ради о тачкама $\mathbf{k}$ и $\mathbf{l}$, тада је:

$$Q_{kl}^{\Delta} = Q_{kk} + Q_{ll} + Q_{kl} + Q_{lk}, \quad (4.2-28)$$

а релативне елипсе се обично приказују на средини између тачака чији међусобни однос описују.

Све напред наведене мере квалитета имају једну негативну особину, а то је да су **датумски зависне**. У случају конвенционалног избора датума, тачке којима је он дефинисан су ослобођене присуства грешака, односно за њих се не рачунају елипсе. За све остале тачке, величине параметара елипси зависе (повећавају се) од њихове удаљености од датумских тачака. Тај ефекат је мање изражен у случају примене релативних елипси, а потпуно је искључен код стандардних одступања функција. Код датума са минималним трагом, ситуација је значајно различита, а величине параметара елипси расту релативно у односу на центроид мреже. Такви случајеви представљају тзв. **унутрашњу прецизност** мреже (inner precision).

Интерпретација уведених локалних мера квалитета сложена је и недовољно јасна. Оне могу указивати на слаба места у мрежи и важан су део укупне анализе квалитета геометрије мреже. Међутим, датумска зависност је њихова велика мана. На неколико примера илустроваће се утицај избора датума на величину елипси.



Слика 4.2-1 (Caspary, 1988): Изглед апсолутних елипси грешака за различит избор датумских тачака (а-датум дефинишу тачке 1 и 2, б- датум дефинишу тачке 1 и 4 и ц- датум са минималним трагом) и релативне елипсе (д)

4.3. Глобалне мере тачности

Најчешће примењивана глобална мера тачности јесте **просечна** или **средња варијанса**, односно:

$$\bar{s}_x^2 = \frac{1}{u} \text{tr} \mathbf{K}_{\hat{x}}, \quad (4.3-1)$$

и често се замењује са **средњом грешком тачке** облика:

$$\bar{s}_p = \bar{s}_x \sqrt{2}. \quad (4.3-2)$$

Нажалост, обе наведене мере су **датумски зависне**. И у овом случају, избор датума који обезбеђује минимални траг најмање је осетљиво решење. Међутим, уколико се пореде два изравнања истог датума, онда наведене глобалне мере могу послужити за поређење две различите геометрије.

Поред наведених, као глобална мера користи се и **општа варијанса** која се рачуна као:

$$\bar{\bar{s}}_x^2 = \sqrt[n]{\det \mathbf{K}_{\hat{x}}}. \quad (4.3-3)$$

Осим у погледу датумске зависности, ова мера зависиће и од најмање сопствене вредности од $\mathbf{K}_{\hat{x}}$. Уколико је $\mathbf{K}_{\hat{x}}$ сингуларно, детерминанта је једнака нули, па се тада у (4.3-3) користи само производ ненултих сопствених вредности. Општа варијанса има једноставно геометријско значење, јер је детерминанта пропорционална запремини елипсоида или површини елипсе.

Такође, као мера тачности понекад се препоручује и **највећа сопствена вредност** од $\mathbf{K}_{\hat{x}}$. Разлог за примену ове мере следи из:

$$\mathbf{g} = \mathbf{f}_1^T \mathbf{x}_1 + \mathbf{f}_2^T \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{f}_u^T \mathbf{x}_u, \quad (4.3-4)$$

која представља инваријантну функцију у ГММ, чију варијансу одређујемо као:

$$\mathbf{s}_g^2 = \mathbf{f}^T \mathbf{K}_{\hat{x}} \mathbf{f}, \quad (4.3-5)$$

при чему максимална вредност коју $\mathbf{s}_g^2$ може достићи за било који вектор коефицијената $\mathbf{f}$, зависиће од

$$\mathbf{s}_g^2 \leq \mathbf{f}^T \mathbf{f} \cdot \lambda_{\max}, \quad (4.3-6)$$

где је $\lambda_{\max}$ максимална сопствена вредност од $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}$. Као и остале мере и $\lambda_{\max}$ је **датумски зависна** величина.

Уколико захтеви мреже изричито инсистирају на хомогеној тачности, тада се често посматра разлика $\lambda_{\max} - \lambda_{\min}$. Мала разлика указује да је хиперелипсоид грешака близак хиперсфери.

4.4. Анализа квалитета геодетских мрежа

Мере глобалне тачности приликом поређења квалитета различитих геометрија мреже нису увек најпоузданије решење. Посебно у контексту оптимизације геодетских мрежа, понекад је боље дефинисати **критеријумску матрицу** која репрезентује одговарајућу структуру матрице коваријанси.

Код мрежа опште намене, критеријумска матрица се конструише тако да све апсолутне елипсе буду кругови истог радијуса и да релативне елипсе такође буду кругови, чије се димензије повећавају сагласно одговарајуће одабраној функцији дужине између две одабране тачке. Оваква хомогена и изотропна структура мреже остварује се емпиријски или применом теорије статистичких векторских поља. И у овом случају, ради се о датумски зависним мерама и зато се захтева да матрице које поредимо припадају истом датуму. Осим тога, приликом поређења матрица коваријанси, не води се рачуна о корелацији. Насупрот наведеном приступу, може се користити и општи приступ који је заснован на општој декомпозицији сопствених вредности.

Ако су $\hat{\mathbf{x}}_A, \mathbf{Q}_A$ и $\hat{\mathbf{x}}_B, \mathbf{Q}_B$ два скупа оцена вектора параметара $\mathbf{x}$ са одговарајућим кофакторским матрицама која припадају различитим скуповима опажања или различитим геометријама две мреже, или где је једна од кофакторских матрица критеријумска, тада се као правило за утврђивање односа између решења А и В користи следећа формулација:

$$\text{Прецизност (A) мања је или је једнака прецизности (B)} \quad (4.4-1)$$

Одлука је једноставна уколико се користи само једна функција облика $\mathbf{y} = \mathbf{f}^T \mathbf{x}$. Поређење одговарајућих форми $\mathbf{f}^T \mathbf{Q}_A \mathbf{f}$ и $\mathbf{f}^T \mathbf{Q}_B \mathbf{f}$ доводи до решења. Односно, А је боље од В ако важи однос

$$\mathbf{f}^T \mathbf{Q}_A \mathbf{f} \leq \mathbf{f}^T \mathbf{Q}_B \mathbf{f} \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbb{R}^n, \quad (4.4-2)$$

или

$$\mathbf{f}^T(\mathbf{Q}_A - \mathbf{Q}_B)\mathbf{f} \leq 0 \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbf{IR}^n. \quad (4.4-3)$$

Генерално, уколико је највећа сопствена вредност од $\mathbf{Q}_A - \mathbf{Q}_B$ мања или једнака нули, важи (4.4-3).

5. ОПШТЕ ЛИНЕАРНЕ ХИПОТЕЗЕ

Гаус - Марковљев модел (ГММ):

$$\mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} \quad , \quad \mathbf{K}_l = \sigma_0 \cdot \mathbf{Q} \quad , \quad \mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1} \quad (5-1)$$

представља скуп фундаменталних веза заснованих на опажањима, искуству и хипотезама који репрезентују физичку реалност. Уобичајена је пракса да се у стварности ради лакшег рачунања и интерпретације резултата употребљава најједноставнији модел. Зато је нарочито важно поставити питање његове адекватности.

Као што је раније констатовано, глобални тест модела се заснива на упоређењу $\mathbf{s}_0^2$ и σ_0^2 преко χ^2 статистике. Поред утврђивања сагласности $\mathbf{s}_0^2$ и σ_0^2 често је веома важно пажљиво испитати и остале параметре у моделу 5-1. Ово је посебно неопходно учинити у деформационој анализи, јер се грешке модела могу погрешно интерпретирати као деформације, што води доношењу погрешних закључака. У таквим ситуацијама, статистичко тестирање води правилном доношењу одлука.

Од посебне важности је неколико питања:

1. Има ли сврхе моделовати коефицијент рефракције и адициону константу?
2. Ако су мерења изведена у две различите епохе и ако је у другој епохи дошло до оштећења стуба, да ли је тачка значајно променила положај?
3. Ако су мерења изведена у две епохе и ако се након изравнања координате добијене из тих епоха разликују, да ли су те разлике последица деформација?
4. Ако извршен број тачака лежи на правој линији (на пример оси неког објекта), да ли су тачке колинеарне?

Пошто је тестирање хипотеза статистички концепт, неопходно је знати статистичка својства оцена у Гаус-Марковљевом моделу. Обично се претпоставља да опажања имају нормалну расподелу, тј.

$$\mathbf{l} \sim \mathbf{N}(\mathbf{Ax}, \mathbf{K}_l) \quad , \quad (5-2)$$

па пошто су оцењивачи линеарни, при чему је $\hat{\mathbf{I}}$ добијено као $\hat{\mathbf{I}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T \mathbf{P}\mathbf{l}$, претпоставке о расподели изгледају:

$$\hat{\mathbf{x}} \sim \mathbf{N}(\mathbf{x}, \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}})$$

$$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{s}_0^2 (\mathbf{N} + \mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{N} (\mathbf{N} + \mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1}, \quad (5-3)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{N}(0, \mathbf{K}_v), \quad \mathbf{K}_v = \mathbf{K}_l - \mathbf{A}\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{A}^T, \quad (5-4)$$

$$\mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{N}(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{K}_{l+v}), \quad \mathbf{K}_{l+v} = \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{l}}} = \mathbf{A}\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{A}^T. \quad (5-5)$$

5.1. Нулта хипотеза и алтернативе

Све хипотезе о којима говоримо у овом поглављу могу се приказати у истој форми, тако да се једном процедуром тестирања могу обухватити сви случајеви. Општа линеарна хипотеза примењена на вектор параметара изгледа:

$$\mathbf{H}_0 : \quad \mathbf{H}^T \mathbf{x} - \mathbf{g} = 0, \quad (5.1-1)$$

где је: $\mathbf{H}^T$ - матрица¹³ димензија $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$, $\mathbf{r}(\mathbf{H}) \leq \mathbf{m}$, $1 \leq \mathbf{m} \leq \mathbf{u}$. Израз (5.1-1) репрезентује $\mathbf{m}$ линеарних инваријантних функција облика:

$$\mathbf{h}_i^T \mathbf{x} - \mathbf{g}_i = 0, \quad (5.1-2)$$

где редови $\mathbf{h}_i^T$ матрице $\mathbf{H}^T$ морају бити линеарне комбинације редова матрице $\mathbf{A}$, што подразумева да постоји матрица $\mathbf{L}$ таква да је $\mathbf{L}\mathbf{A} = \mathbf{H}^T$. Вектор $\mathbf{g}$ у (5.1-1) садржи константе које су дате хипотезом. У поступку тестирања, први корак би био формулисање специфичне нулте хипотезе и њено представљање у форми (5.1-1). На пример:

$$\mathbf{H}_0 : \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k = 0.$$

Из $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k, \dots, \mathbf{x}_u)^T$ следи да је $\mathbf{h}^T = (0, 0, \dots, +1, 0, -1, 0, \dots, 0)^T$ и $\mathbf{g} = 0$, што у складу са једначином (5.1-1) даје:

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{h}^T \mathbf{x} = 0.$$

¹³ Матрице $\mathbf{H}$ у (5-3) и (5.1-1) су различите и не треба их мешати.

При разматрању нулте хипотезе, природно је дефинисати алтернативу нултој хипотези H_0 . Такав исказ се формулише као алтернативна хипотеза која се често не даје унапред, већ је често ствар анализе стручњака који врши тестирање. Типичне форме алтернативне хипотезе изгледају:

$$\begin{aligned} H_a : h^T x &\neq g && \text{..... двострана} \\ \left. \begin{aligned} h^T x &> g \\ h^T x &< g \end{aligned} \right\} && \text{..... једнострана} \\ h^T x &= \bar{g} \neq g && \text{..... условљена алтернатива.} \end{aligned}$$

5.2. Тест статистике

Други корак у процедури тестирања хипотеза у ГММ представља рачунање одговарајуће тест статистике. Статистика се бира тако да је њена расподела, уколико важи H_0 , позната по дефиницији и да је довољно осетљива на одступање од H_0 . У пракси је могуће дефинисати безброј тест статистика. Међутим, при тестирању линеарних хипотеза у ГММ разматрају се четири основне:

1. Ако су $y \sim N(\eta, K_y)$ и $z \sim N(\xi, K_z)$ два случајна вектора са нормалном расподелом и очекивањима η и ξ , тада:

$$T_1 = (y_i - \eta_i) / \sigma_{y_i} \sim N(0,1) \quad (5.2-1)$$

има нормалну расподелу са очекивањем 0 и варијансом 1.

2. Статистика

$$T_2 = (y_i - \eta_i) / s_{y_i} \sim t_{\alpha, f} \quad (5.2-2)$$

има студентову (или t) расподелу са f степени слободе, при чему се y_i и s_{y_i} независни.

3. Статистика

$$T_3 = (y - \eta)^T K_y^{-1} (y - \eta) \sim \chi^2_{\alpha, f} \quad (5.2-3)$$

има χ^2 расподелу са $f = f(K_y)$ степени слободе.

4. Статистика

$$T_4 = \frac{(y - \eta)^T K_y^{-1} (y - \eta) / f_y}{(z - \xi)^T K_z^{-1} (z - \xi) / f_z} \sim F_{\alpha, f_y, f_z} \quad (5.2-4)$$

има Фишерову расподелу са f_y и f_z степени слободе, при чему се полази од тога да су изрази у бројиоцу и имениоцу **статистички независни**.

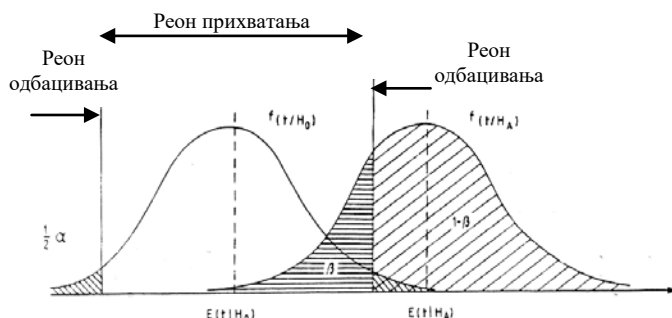
5.3. Ниво ризика и критична вредност

Трећи корак је врло сложен и своди се на избор **нивоа ризика** α . Док цео поступак тестирања следи строга математичка правила, избор α је потпуно слободан. Наиме, не постоји добар и лош ниво ризика, тј. нема неког јасног правила који би се лако могло применити. Типичне вредности за α су: $\alpha = 10\%$, $\alpha = 5\%$, $\alpha = 1\%$ и $\alpha = 0,1\%$, али и било која друга вредност у овом распону не би била погрешна.

Четврти корак у тест процедури јесте одређивање **критичне вредности** тест статистике T за изабрани ниво ризика α . Критична вредност се одређује из таблица или графова расподела тест статистике. Треба обратити пажњу да ли се ради о једностраном или двостраном тесту. Упоредјујући критичну вредност са срачунатом вредношћу статистике, врши се одбацивање или неодбацивање нулте хипотезе.

Двострани тест		Једнострани тест		
Реон одбацивања	Реон прихватања	Реон одбацивања	Реон прихватања	Реон одбацивања

Слика 5.3-1: Реони одбацивања и неодбацивања једностранних и двостраних тестова



Слика 5.3-2: Однос вероватноћа грешака прве и друге врсте

Треба нагласити да ни један тест не доказује хипотезу. Резултат теста јесте одбацивање или неодбацивање хипотезе. Наиме хипотеза не гарантује да је само та тврдња валидна или најбоља или да нема и других закључака, који на жалост нису били разматрани. Уколико је нулта хипотеза тачна, добијена вредност за T изазваће одбацивање истините хипотезе у α посто случајева. Такав исход теста назива се грешком *прве врсте* и дешава се са вероватноћом α . Са друге стране, уколико је тачна алтернативна хипотеза, а статистика T падне у област *неодбацивања* (*прихватања*), (слика 5.3-1), такав исход теста се назива грешком *друге врсте* и дешава се са вероватноћом β . Износ ове вероватноће зависи од *функције густине $f(t)$* , *нивоа ризика α* и *алтернативне хипотезе H_a* . Слика 5.3-2 показује однос између α и β .

5.4. Неке особине расподела квадратних форми

Распореди тест статистика датих у поглављу 5.2 зависе од статистичких особина примењених квадратних форми. Без улажења у детаље, у наставку судате само основне теореме везане за особине распореда. Детаљније се може наћи у (Rao, 1973) или (Searle, 1971).

Теорема 1: Нека је $y \sim N(\eta, K)$. Неопходан и довољан услов да квадратна форма q :

$$q = (y - \eta)^T A (y - \eta) \sim \chi_{\alpha, f}^2,$$

има Хи-квадрат расподелу гласи: **КАКАК = КАК**,
где је: $f = f(AK)$. Ако је $f(K) = n$, тада се услов упрошћава и гласи: **АКА = А**.

Теорема 2: Нека је $y \sim N(\eta, K)$. Потребан и неопходан услов да су $(y - \eta)^T A_1 (y - \eta)$ и $A_2 y$ статистички независне гласи:
 $KA_2 KA_1 = 0$.

Теорема 3: Нека је $y \sim N(\eta, K)$. Неопходан и довољан услов да су квадратне форме:

$$q_1 = (y - \eta)^T A_1 (y - \eta) \text{ и } q_2 = (y - \eta)^T A_2 (y - \eta)$$

статистички независне гласи: **$KA_2 KA_1 K = 0$** и за $r(K) = n$, дефинише услов за последње две теореме:

$$\mathbf{A}_2 \mathbf{K} \mathbf{A}_1 = 0$$

Теорема 4: Нека су $\mathbf{y} \sim \mathbf{N}(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{K})$ и $\mathbf{q}_1 = (\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta})^T \mathbf{A}_1 (\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta})$ и $\mathbf{q}_2 = (\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta})^T \mathbf{A}_2 (\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta})$. Ако је:

$$\mathbf{q} = (\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta})^T \mathbf{A} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 \quad \text{и}$$

$$\mathbf{K} \mathbf{A} \mathbf{K} \mathbf{A} \mathbf{K} = \mathbf{K} \mathbf{A} \mathbf{K} \quad \text{и}$$

$$\mathbf{K} \mathbf{A}_1 \mathbf{K} \mathbf{A}_1 \mathbf{K} = \mathbf{K} \mathbf{A}_1 \mathbf{K}, \quad \text{тада је:}$$

$$\mathbf{q} \sim \chi^2_f, \quad \mathbf{q}_1 \sim \chi^2_{f_1}, \quad \mathbf{q}_2 \sim \chi^2_{f_2} \quad \text{где је:}$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{A} \mathbf{K}), \quad \mathbf{f}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{A}_1 \mathbf{K}), \quad \mathbf{f}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{A}_2 \mathbf{K}) = \mathbf{f} - \mathbf{f}_1$$

Напомена: **Теорема 1** даје основни услов χ^2 расподеле квадратне форме и односи се на статистику T_3 у једначини (5.2-3). **Теорема 2** обезбеђује основ за тестирање очекиване независности бројиоца и имениоца (T_2 у једначини 5.2-2). **Теорема 3** објашњава примену статистике T_4 у једначини (5.2-4). **Теорема 4** се примењује при декомпозицији квадратних форми која игра важну улогу при тестирању линеарних хипотеза. Илустрација примене теорема показате се на примеру расподеле квадратне форме $\mathbf{q} = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$. Према једначини 5-4 $\mathbf{v}$ има нормалну расподелу, у ознаци $\mathbf{v} \sim \mathbf{N}(0, \mathbf{K}_v)$, где је $\mathbf{K}_v = \mathbf{K} - \mathbf{A} \mathbf{K}_x \mathbf{A}^T$, $\mathbf{r}(\mathbf{K}_v) = \mathbf{n} - \mathbf{r}(\mathbf{A})$. Како је $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1}$ и $\mathbf{K} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}$, квадратна форма се може приказати као:

$$\frac{\mathbf{q}}{\sigma_0^2} = \mathbf{v}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{v}. \quad (5.4-1)$$

Према **Теорему 1** следи да је $\frac{\mathbf{q}}{\sigma_0^2} \sim \chi^2$, ако је $\mathbf{K}_v \mathbf{K}^{-1} \mathbf{K}_v \mathbf{K}^{-1} \mathbf{K}_v = \mathbf{K}_v \mathbf{K}^{-1} \mathbf{K}_v$,

што се лако може множењем проверити и доказати да важи:

$$\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(\mathbf{f}), \quad (5.4-2)$$

са $\mathbf{f} = \mathbf{r}(\mathbf{K}^{-1} \mathbf{K}_v) = \mathbf{n} - \mathbf{r}(\mathbf{A})$.

5.5. Линеарне хипотезе у Гаус-Марковљевом моделу

Опште линеарне хипотезе уведене у израз (5.1-1) морају се разматрати као компонента проширеног ГММ.

$$\begin{aligned} \mathbf{l} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \varepsilon, & \mathbf{K} &= \sigma_0^2 \cdot \mathbf{Q} \\ \mathbf{g} &= \mathbf{H}^T \mathbf{x} \end{aligned}$$

Уколико се прихвати хипотеза $\mathbf{H}_0$, тада важи једнакост $\mathbf{H}^T \mathbf{x} - \mathbf{g} = 0$. Како се по МНК методи добија оцена $\hat{\mathbf{x}}$ параметра вектора $\mathbf{x}$, то између $\mathbf{H}^T \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{g}}$ и константе $\mathbf{g}$ постоји разлика. Ако

$$\mathbf{w} = \mathbf{H}^T \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{g}, \quad (5.5-1)$$

има очекивање нула, тј. $\mathbf{E}(\mathbf{w}) = 0$, не постоји основ за одбацивање хипотезе $\mathbf{H}_0$. Уколико је $\mathbf{H}_0$ неприхватљива, тада се може очекивати значајно одступање од нуле, па је $\mathbf{E}(\mathbf{w}) \neq 0$.

Ако се посматра појединачна хипотеза $\mathbf{H}_0 : \mathbf{h}^T \mathbf{x} - \mathbf{g} = 0$, одговарајућа тест статистика се рачуна из оцене $\hat{\mathbf{g}} = \mathbf{h}^T \hat{\mathbf{x}}$, која поседује нормалну расподелу, тј.

$$\hat{\mathbf{g}} \sim \mathbf{N}(\mathbf{g}, \sigma_{\hat{\mathbf{g}}}^2), \quad \sigma_{\hat{\mathbf{g}}}^2 = \mathbf{h}^T \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{h}. \quad (5.5-2)$$

Могућа су два случаја:

А) Познат *a priori* фактор варијансе σ_0^2

Тест статистика следи из израза (5.2-1):

$$\mathbf{T} = \frac{(\hat{\mathbf{g}} - \mathbf{g})}{\sigma_{\hat{\mathbf{g}}}} \sim \mathbf{N}(0,1), \quad (5.5-3)$$

а критичне вредности се добијају из стандардизоване нормалне расподеле са нивоом ризика α .

Б) Непозната вредност σ_0^2 па се користи њена оцена s_0^2

Сходно *Теореме 2* може се доказати независност $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$ и $\mathbf{h}^T \hat{\mathbf{x}}$. Како су задовољени услови (5.2-2), то је:

$$\mathbf{T} = \frac{(\hat{\mathbf{g}} - \mathbf{g})}{s_{\hat{\mathbf{g}}}}, \quad s_{\hat{\mathbf{g}}}^2 = s_0^2 \mathbf{h}^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{h}, \quad \mathbf{T} \sim \mathbf{t}_{n-r(\mathbf{A})}. \quad (5.5-4)$$

Критична вредност узима се из таблица Студентове $\mathbf{t}$ -расподеле за $n - r(\mathbf{A})$ степени слободe и ниво ризика α .

Уколико се користе композитне хипотезе $\mathbf{H}_0 : \mathbf{h}^T \mathbf{x} - \mathbf{g} = 0$, тада се користи тест статистика типа T_4 , из једначине (5.2-4). Погрешно је делити $\mathbf{H}_0$ на појединачне хипотезе, а онда применити (5.5-3) и (5.5-4).

Оцена $\hat{\mathbf{g}} = \mathbf{H}^T \hat{\mathbf{x}}$ датог вектора $\mathbf{g}$ има коваријациону матрицу облика $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{g}}} = \mathbf{H}^T \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{H}$. Уколико је $\mathbf{H}_0$ истинито, оцена је непомерена и има распоред облика $\hat{\mathbf{g}} \sim \mathbf{N}(\mathbf{g}, \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{g}}})$. Расподела квадратне форме следи из *Теореме 1* (поглавље 5.4):

$$\mathbf{q}_{\Delta} = (\hat{\mathbf{g}} - \mathbf{g})^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{g}}}^{-1} (\hat{\mathbf{g}} - \mathbf{g}) \sim \sigma_0^2 \chi_m^2, \quad (5.5-5)$$

са $m = r(\mathbf{H})$. Заменом $\hat{\mathbf{g}} - \mathbf{g} = \mathbf{H}^T (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})$ добија се:

$$\mathbf{q}_{\Delta} = (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})^T \mathbf{H} (\mathbf{H}^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}). \quad (5.5-6)$$

Помоћу израза $\mathbf{A} = \mathbf{H} (\mathbf{H}^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T / \sigma_0^2$ може се лако доказати да важи услов $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{A} \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{A} \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{A} \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}$.

Даље, применом *Теореме 3*, може се доказати да $\mathbf{q}_{\Delta} / s_0^2$ из једначине (5.5-5) и $\mathbf{q} / s_0^2$ из једначине (5.4-1) имају независну расподелу и задовољавају услов (5.2-4):

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{q}_{\Delta} / m}{\mathbf{q} / f} \sim \mathbf{F}_{m,f}. \quad (5.5-7)$$

Бројилац и именилац дефинисани су у једначинама (5.5-5) и (5.4-1).

Уколико је $\mathbf{H}_0$ истинито, тада тест статистика (5.5-7) следи Фишерову расподелу. Одлука се доноси на основу поређења $\mathbf{T}$ са критичном вредношћу $\mathbf{F}_{\alpha, m, f}$ при нивоу ризика α који се узима из таблице $\mathbf{F}$ расподеле при $\mathbf{m}$ и $\mathbf{f}$ степени слободе. У овој верзији композитног теста није нужно познавати истиниту вредност од σ_0^2 . Уколико је познато σ_0^2 , користи се ефикаснија тест статистика $\mathbf{T}_3$ из (5.2-3), тј.

$$\mathbf{T} = \mathbf{q}_D / s_0^2 \sim \chi_m^2 \quad (5.5-8)$$

са раније дефинисаним $\mathbf{q}_\Delta$ и $\mathbf{m}$.

Тестови композитних нултих хипотеза $\mathbf{H}_0: \mathbf{H}^T \mathbf{x} - \mathbf{g} = 0$ засновани су на следећим односима вероватноће:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{T} > \mathbf{F}_{\alpha, n, f} | \mathbf{H}_0) &= \alpha \\ \mathbf{P}(\mathbf{T} > \chi_n^2 | \mathbf{H}_0) &= \alpha \end{aligned} \quad (5.5-9)$$

Изрази (5.5-9) представљају једностране тестове (5-1), тј. вероватноћа $\mathbf{P}$ да је $\mathbf{T}$ веће од одговарајуће критичне вредности за истинито $\mathbf{H}_0$, једнака је вероватноћи грешке прве врсте α .

5.6. Рачунање квадратних форми

Композитна нулта хипотеза $\mathbf{H}_0: \mathbf{H}^T \mathbf{x} - \mathbf{g} = 0$ може се сматрати компонентом проширеног Гаус-Марковљевог модела. Она има форму скупа услова које параметри морају задовољити. Неопходно је исказати утицај наведених услова на решење као и алгоритме који су неопходни ради рачунања квадратних форми и тест статистике (једначине 5.5-8 и 5.5-9).

Напомена: Значење услова $\mathbf{H}^T \mathbf{x} - \mathbf{g} = 0$ концепцијски је различито у односу на датумски услов облика $\mathbf{Hx} = \mathbf{c}$. Разлика је у томе што су врсте у $\mathbf{H}^T$ линеарне комбинације врста матрице $\mathbf{A}$, док су врсте датумске матрице $\mathbf{H}$ комплементи врста од $\mathbf{A}$. Услови $\mathbf{H}^T \mathbf{x} = \mathbf{g}$ представљају информацију о вектору параметара. Датумски услови $\mathbf{Hx} = \mathbf{c}$ дефинишу референтну

координатну основу (координатни систем, датум) за оцену вектора параметара.

Нормалне једначине проширеног Гаус-Марковљевог модела изгледају:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}\hat{\mathbf{x}}_H + \mathbf{H}\mathbf{k} &= \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l}, & \mathbf{N} &= \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \\ \mathbf{H}^T \hat{\mathbf{x}}_H &= \mathbf{g} \end{aligned},$$

(5.6-1)

где је $\hat{\mathbf{x}}_H$ вектор параметара уз услове $\mathbf{H}^T \mathbf{x} = \mathbf{g}$. Користећи уопштену инверзију, решење прве једначине у (5.6-1) гласи:

$$\hat{\mathbf{x}}_H = \mathbf{N}^- (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} - \mathbf{H}\mathbf{k}). \quad (5.6-2)$$

С обзиром да се оцена параметара у класичном ГММ без услова добија као $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{N}^- \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l}$, једначина (5.6-2) је еквивалентна са:

$$\hat{\mathbf{x}}_H = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{N}^- \mathbf{H}\mathbf{k}, \quad (5.6-3)$$

и заменом у другој једначини (5.6-1) добија се:

$$\mathbf{H}^T \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{H}^T \mathbf{N}^- \mathbf{H}\mathbf{k} = \mathbf{g}, \quad (5.6-4)$$

док решење за $\mathbf{k}$ изгледа:

$$-\mathbf{k} = (\mathbf{H}^T \mathbf{N}^- \mathbf{H})^{-1} (\mathbf{g} - \mathbf{H}^T \hat{\mathbf{x}}). \quad (5.6-5)$$

Једначина (5.6-3) у развијеном облику гласи (идентично са 2.4.2-2)

$$\hat{\mathbf{x}}_H = \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{N}^- \mathbf{H} (\mathbf{H}^T \mathbf{N}^- \mathbf{H})^{-1} (\mathbf{g} - \mathbf{H}^T \hat{\mathbf{x}}), \quad (5.6-6)$$

и јасно указује на утицај датих услова на оцену параметара. Резидуали у ГММ са условима добијају се као:

$$\hat{\mathbf{v}}_H = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_H - \mathbf{l}, \quad (5.6-7)$$

а квадратна форма изгледа:

$$\mathbf{q}_H = (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_H - \mathbf{l})^T \mathbf{P} (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_H - \mathbf{l}). \quad (5.6-8)$$

Даље је:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{v}}_H &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_H - \mathbf{l} + \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l} + \mathbf{A}(\hat{\mathbf{x}}_H - \hat{\mathbf{x}}) \\ \hat{\mathbf{v}}_H &= \hat{\mathbf{v}} + \mathbf{A}(\hat{\mathbf{x}}_H - \hat{\mathbf{x}})\end{aligned}, \quad (5.6-9)$$

што указује на допринос датих услова на вредност резидуала. Заменом једначине (5.6-9) у (5.6-8) добија се:

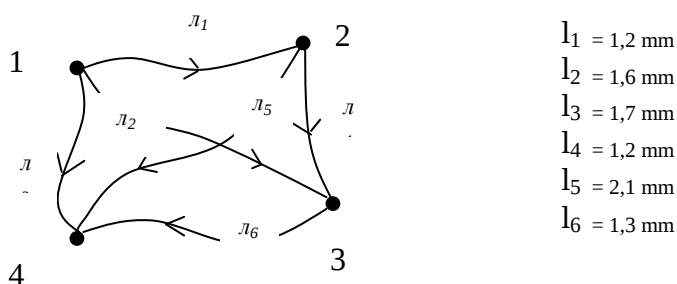
$$\begin{aligned}\mathbf{q}_H &= \hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}} + (\hat{\mathbf{x}}_H - \hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{N} (\hat{\mathbf{x}}_H - \hat{\mathbf{x}}) \\ \mathbf{q}_H &= \mathbf{q} + \mathbf{q}_\Delta\end{aligned}. \quad (5.6-10)$$

Други израз са десне стране садржи утицај унапред постављених услова. Коришћење једначине (5.6-6) даје идентичне резултате као и једначина (5.5-6). Погодна форма рачунања $\mathbf{q}_\Delta$ гласи:

$$\mathbf{q}_\Delta = (\mathbf{g} - \mathbf{H}^T \hat{\mathbf{x}})^T (\mathbf{H}^T \mathbf{N} \mathbf{H})^{-1} (\mathbf{g} - \mathbf{H}^T \hat{\mathbf{x}}). \quad (5.6-11)$$

Уколико је решење $\hat{\mathbf{x}}$ класичног модела већ познато, приликом тестирања $\mathbf{H}_0$ решење проширеног ГММ није неопходно. Израз (5.6-11) заједно са (5.5-7) или (5.5-8) успоставља врло ефикасан модел тестирања композитних нултих хипотеза.

ПРИМЕР 5.6-1: У датој нивелманској мрежи користећи решење засновано на конвенционалном датуму који дефинише тачка 1, (верзија под а) демонстрираће се два различита теста (под А и Б).



а) Нулта хипотеза тврди да тачке 1 и 4 имају исте висине.

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_0 : \mathbf{x}_1 &= \mathbf{x}_4 \Rightarrow \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_4 = 0 \\ \mathbf{h}^T \mathbf{x} &= 0 \Rightarrow \mathbf{h}^T = (1 \ 0 \ 0 \ -1); \mathbf{g} = 0 \\ \mathbf{H}_a : \mathbf{h}^T \mathbf{x} &\neq 0 \Rightarrow \text{двострани тест}\end{aligned}$$

Сагласно поглављу (5.5) $\hat{\mathbf{g}} = \mathbf{h}^T \hat{\mathbf{x}} = -2,4 \text{ mm}$. Пошто σ_0^2 није познато, биће коришћена њена оцена $s_0^2 = 0,4 \text{ mm}^2$. Тест статистика гласи:

$$s_{\hat{\mathbf{g}}}^2 = s_0^2 \mathbf{h}^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{h} = 0,4 \cdot (2/4) = 0,2 \Rightarrow s_{\hat{\mathbf{g}}} = \sqrt{0,2}$$

$$\mathbf{T} = \frac{(\hat{\mathbf{g}} - \mathbf{g})}{s_{\hat{\mathbf{g}}}} = -\frac{2,4}{0,45} = -5,37.$$

Уколико је $\mathbf{H}_0$ истинито, $\mathbf{T}$ припада t расподели, са три степена слободe. За различите вредности α дате су критичне вредности за двострани тест:

$$\alpha = 10\% \quad \mathbf{t}_{\alpha}(3) = \pm 2,35$$

$$\alpha = 5\% \quad \mathbf{t}_{\alpha}(3) = \pm 3,18$$

$$\alpha = 1\% \quad \mathbf{t}_{\alpha}(3) = \pm 5,84$$

Тест статистика је ван подручја 5%, а испод 1%. Овај резултат указује на значај дефинисања вредности α .

б) Нулта хипотеза тврди да све тачке имају исте висине.

$$\mathbf{H}_0 : \mathbf{H}^T \mathbf{x} = 0 \Rightarrow \mathbf{g} = 0 \quad \mathbf{H}_a : \mathbf{H}^T \mathbf{x} \neq 0$$

$$\mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} -1 & +1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & +1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}^T \hat{\mathbf{x}} = [+0,6 \quad +1,5 \quad +2,4]^T \text{ mm}$$

$$\mathbf{H}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{H} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} +2 & +1 & +1 \\ +1 & +2 & +1 \\ +1 & +1 & +2 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{H}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{H})^{-1} = \begin{bmatrix} +3 & -1 & -1 \\ -1 & +3 & -1 \\ -1 & -1 & +3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_{\Delta} = 13.23$$

$$\text{Односно, сагласно (5.5-7), } \mathbf{T} = \frac{13.23}{1.2} = 11.025.$$

Уколико је $\mathbf{H}_0$ истинито, тада $\mathbf{T}$ припада $\mathbf{F}$ расподелу са $\mathbf{m} = 3$ и $\mathbf{f} = 3$ степени слободе. Неке критичне вредности $\mathbf{F}$ распореда износе:

$$\begin{aligned}\alpha = 10\% & \quad \mathbf{F}_\alpha(3,3) = 5,39 \\ \alpha = 5\% & \quad \mathbf{F}_\alpha(3,3) = 9,28 \\ \alpha = 1\% & \quad \mathbf{F}_\alpha(3,3) = 28,46\end{aligned}$$

И у овом случају тест статистика се налази између критичних тачака за ниво ризика 5% и 1%.

НАПОМЕНА: Тестови не зависе од избора датума јер је $\mathbf{H}^T \mathbf{x}$ инваријантно. Матрица $\mathbf{H}^T$ у тесту под **(b)** за $\mathbf{H}_0$, није јединствено дефинисана. Као алтернатива могу се користити услови дефинисани на следећи изглед:

$$\mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} -1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & +1 \end{bmatrix}$$

Исход теста не зависи од начина дефинисања $\mathbf{H}^T$ ($\mathbf{H}^T$ репрезентује нулту хипотезу).

5.7. Анализа померања деформационе структуре

Посматрајмо две епохе опажања једне мреже за осматрање објекта за које ћемо претпоставити да су у обе епохе $\mathbf{i}$ ($\mathbf{i} = 1,2$) изравнате као слободне:

$$\begin{aligned}\mathbf{l}_i + \mathbf{v}_i &= \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{x}_i, & \mathbf{K}_i &= \sigma_0 \cdot \mathbf{Q}_i, & \mathbf{P}_i &= \mathbf{Q}_i^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_i &= \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_i} \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{l}_i, & \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}_i} &= \mathbf{s}_{o_i}^2 \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_i} \\ \mathbf{s}_{o_i}^2 &= \frac{\mathbf{v}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{v}_i}{\mathbf{f}_i}, & \mathbf{f}_i &= \mathbf{n}_i - \mathbf{r}(\mathbf{A}_i)\end{aligned}\tag{5.7-1}$$

$$\mathbf{H}_0 : \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 \Rightarrow \mathbf{H}^T \mathbf{x} = \mathbf{g}$$

$$\text{са:} \quad \mathbf{H}^T = (\mathbf{I} : -\mathbf{I}); \quad \mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)^T, \quad \mathbf{g} = \mathbf{0}.$$

Да би срачунали тест статистику (5.5-7) неопходно је срачунати заједничку оцену варијансе $s_0^2 = \mathbf{q}/\mathbf{f}$ и заједничку кофакторску матрицу $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$. Ако су изравнања у обе епохе са истим а *приори* фактором дисперзије σ_0^2 и ако су ослоњене на исти датум, заједничка варијанса изравнања две епохе износи:

$$s_0^2 = \frac{\mathbf{v}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{v}_2}{\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2} = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{\mathbf{f}}, \quad (5.7-2)$$

а заједничка кофакторска матрица оцена разлика координата две епохе, образује се као:

$$\mathbf{Q}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_1} & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_2} \end{bmatrix}. \quad (5.7-3)$$

Вредности s_0^2 и $\mathbf{Q}_d$ коресподентне су вредностима добијеним из заједничког изравнања две епохе. Квадратна форма $\mathbf{q}_d$ односи се на све тачке и рачуна се на основу једначине (5.6-11) као:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_d &= (\hat{\mathbf{x}}_1 - \hat{\mathbf{x}}_2)^T [(\mathbf{I} : -\mathbf{I})^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} (\mathbf{I} : -\mathbf{I})]^{-1} (\hat{\mathbf{x}}_1 - \hat{\mathbf{x}}_2) \\ \mathbf{q}_d &= (\hat{\mathbf{x}}_1 - \hat{\mathbf{x}}_2)^T (\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_1} + \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_2})^{-1} (\hat{\mathbf{x}}_1 - \hat{\mathbf{x}}_2) \end{aligned},$$

односно $\mathbf{q}_d = \mathbf{d}^T \mathbf{Q}_d^{-1} \mathbf{d}$, при чему се може користити било која уопштена инверзија матрица. Под условом да је $\mathbf{H}_0$ истинито (положај истих тачака је подударан у две епохе, тј. нема деформација између две епохе) тест статистика облика (5.5-7) гласи (Pelzer, 1985):

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{q}_d}{\mathbf{h} \cdot s_0^2} \sim \mathbf{F}_{\alpha, 2, \mathbf{f}}, \quad (5.7-4)$$

и има Фишерову расподелу са $\mathbf{h} = 2$ и $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$ степени слободе ($\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$ збир степени слободе два изравнања). Тест описан у (5.7-4) назива се **глобалним тестом подударности** (конгруенције, *Global Congruency Test*) и уколико се тест статистика $\mathbf{T}$ значајно разликује од одговарајућег квантила Фишерове расподеле $\mathbf{F}_{\alpha, 2, \mathbf{f}}$, нема основа за тврдњу о подударности положаја тачака у две епохе.

Технике опажања деформација (нежељених померања) тачака деформационе структуре генерално се могу поделити на: **геотехничке**, **структуралне** и **геодетске**. Прве две се одликују директним мерењима и користе специјалне уређаје и опрему којима се мере промене дужине, нагиба, висинске разлике, дисторзија и сл. (Teskey and Porter, 1988). Насупрот њима, када се приликом откривања померања користе геодетске методе, у основи се издвајају две врсте геодетских деформационих мрежа: *референтне* (апсолутне) и *релативне* (Chrzapowski at al. 1986). Код референтне мреже, тачке су лоциране ван деформационе структуре и као такве користе се за утврђивање апсолутог померања тачака објекта. Код релативне мреже, све тачке се налазе на деформационој структури (објекту). У даљем, пажња ће се посветити утврђивању деформација у оквиру референтне мреже.

Деформациона структура (објекат) обично се моделује скупом тачака (ознака, маркица и сл.) које се постављају тако да што верније репрезентују карактеристике самог објекта. Тачке се обично сигналишу трајним маркицама, односно веома стабилним и постојаним сигнаlima чије кретање представља искључиво кретање самог објекта или неког његовог дела. Тачке се опажају у две и више различитих карактеристичних временских епоха. Мерења могу бити релизована конвенционалним, фотограметријским или сателитским методама. Могуће су и комбинације поменутих геодетских метода мерења. Деформациона анализа геодетским методама садржи две фазе: *прва* – независно изравнање мреже тачака у појединачној епохи и *друга* – откривање померања идентичних тачака између епоха. У склопу деформационе анализе веома је важно дефинисати **тренд** померања заједничких тачака мреже, што приликом моделовања деформација представља основу за прелиминарну идентификацију деформационих модела. Деформационом анализом могуће је обухватити померање тачака у 1Д, 2Д и 3Д равни.

Означимо са:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{yi} \\ \mathbf{d}_{xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{y}}_{1i} - \hat{\mathbf{y}}_{2i} \\ \hat{\mathbf{x}}_{1i} - \hat{\mathbf{x}}_{2i} \end{bmatrix}, \quad (5.7-5)$$

вектор померања (координатне разлике две епохе мерења истих датума у 2Д равни), док је $\mathbf{Q}_d$ одговарајућа кофакторска матрица компонената вектора померања $\mathbf{d}$. У оквиру класичних геодетских метода, постоје две основне методе оцена тренда померања, и то: 1) *робусне методе* и 2) *методе подударности* (конгруенције, енг. *congruency*).

5.7.1. Робусне методе

Постоји више робусних метода. Caspary and Borutta (1987) детаљно описују три методе, и то: Данску методу, М-оцену (Huber) и Методу најмањег апсолутног збира (*Least Absolute Sum - LAS*). Chen (1983) предлаже трансформацију сличности фигура са итеративним поступком промене тежина (*Iterative Weighted Similarity Transformation - IWST*) која је развијена у Канади на Универзитету у New Brunswicku. Од наведених метода, детаљније ће се представити две, и то LAS и IWST.

LAS и IWST методе засноване су на S трансформацији, где се прво дефинише вектор померања $\mathbf{d}$ у $\mathbf{k}+1$ итерацији као:

$$\mathbf{d}^{k+1} = [\mathbf{I} - \mathbf{G}(\mathbf{G}^T \mathbf{W}^k \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{W}^k] \cdot \mathbf{d}^k = \mathbf{S}^k \cdot \mathbf{d}^k, \quad (5.7.1-1)$$

где је $\mathbf{I}$ - јединична матрица, $\mathbf{k}$ - број итерација, $\mathbf{d}$ - вектор померања, $\mathbf{S}$ - матрица S трансформације, а $\mathbf{W}$ - матрица тежина. Матрица $\mathbf{G}^T$ изгледа:

$$\mathbf{G}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ \mathbf{y}_1^0 & -\mathbf{x}_1^0 & \mathbf{y}_2^0 & -\mathbf{x}_2^0 & \dots & \mathbf{y}_m^0 & -\mathbf{x}_m^0 \\ \mathbf{x}_1^0 & \mathbf{y}_1^0 & \mathbf{x}_2^0 & \mathbf{y}_2^0 & \dots & \mathbf{x}_m^0 & \mathbf{y}_m^0 \end{bmatrix}, \quad (5.7.1-2)$$

где су $\mathbf{y}_i^0$ и $\mathbf{x}_i^0$ координате тачака $\mathbf{P}_i$ сведене на центроид или тежиште мреже, тј.

$$\mathbf{y}_i^0 = \mathbf{y}_i - \frac{\sum_{i=1}^m \mathbf{y}_i}{m} \text{ и } \mathbf{x}_i^0 = \mathbf{x}_i - \frac{\sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i}{m},$$

где су $\mathbf{y}_i, \mathbf{x}_i$ приближне координате тачака $\mathbf{P}_i$, док је m број заједничких тачака у мрежи.

Основна разлика у примени LAS и IWST метода јесте у формирању матрице тежина $\mathbf{W}$. У првој итерацији ($\mathbf{k} = 1$) матрица тежина је јединична матрица за све заједничке тачке. У $\mathbf{k}+1$ итерацији, матрица тежина се дефинише у зависности од методе, и то:

а) код IWST методе као:

$$\mathbf{W}^{(k)} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{|\mathbf{d}_i^{(k)}|} \right\} \quad (5.7.1-3)$$

б) код LAS методе као:

$$\mathbf{W}^{(k)} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{dx}_i^{(k)})^2 + (\mathbf{dy}_i^{(k)})^2}} \right\}. \quad (5.7.1-4)$$

У изразу (5.7.1-3) $\mathbf{d}_i$ представља раније дефинисани вектор компонената померања $\mathbf{d}$, док су $\mathbf{dx}$ и $\mathbf{dy}$ у (5.7.1-4) компоненте вектора померања дуж координатних оса. Обе шеме дефинисања тежина примењују се искључиво на заједничке датумске тачке референтне мреже стабилног блока тачака, док су тежине осталих тачака објекта једнаке 0, односно $\mathbf{W}^{(k)} = 0$. Итеративни поступак се спроводи све док апсолутне разлике узастопних трансформисаних померања на идентичним тачкама не буду мање од задате толеранције δ ($|\mathbf{d}^{(k+1)} - \mathbf{d}^{(k)}| \leq \delta$). Могуће је да током итерација неке вредности $\mathbf{d}_i^{(k)}$ (или $\mathbf{dx}_i, \mathbf{dy}_i$) теже нули, чиме изазивају нумеричку нестабилност јер ће $\mathbf{W}^{(k)}$ тада бити значајно велико. Проблем се у том случају превазилази на два начина: *први* – постављањем ниже дозвољене вредности разлике δ , јер у том случају уколико је $\mathbf{d}_i^{(k)}$ мање од δ , његова тежина биће једнака нули и *други* – модификацијом једначина (5.7.1-3) и (5.7.1-4) као:

$$\mathbf{W}^{(k)} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{|\mathbf{d}_i^{(k)}| + \delta} \right\}, \quad (5.7.1-5)$$

$$\mathbf{W}^{(k)} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{dx}_i^{(k)} + \delta)^2 + (\mathbf{dy}_i^{(k)} + \delta)^2} + \delta} \right\}. \quad (5.7.1-6)$$

У (5.7.1-6) вредност толеранције се додаје компонентама вектора померања мањим од вредности дозвољених граница толеранције. У даљем излагању приказаће се први начин примењен на IWST методи, док је други примењен на LAS методи, чиме се превазилази проблем нумеричке нестабилности система.

Као што је раније истакнуто, LAS метода минимизира збир интензитета (дужине) вектора померања $\sum \sqrt{(\mathbf{dx}_i)^2 + (\mathbf{dy}_i)^2} \Rightarrow \min$, док IWSM метода минимизира укупан збир апсолутних вредности вектора померања $\sum |\mathbf{d}_i| \Rightarrow \min$. У последњој итерацији кофакторска матрица вектора померања рачуна се као:

$$\mathbf{Q}_d^{(k+1)} = \mathbf{S}^{(k)} \cdot \mathbf{Q}_d \cdot (\mathbf{S}^{(k)})^T. \quad (5.7.1-7)$$

Информација о стабилности идентичне тачке $\mathbf{j}$ утврђује се користећи појединачни тест облика:

$$\mathbf{T}_j = \frac{(\mathbf{d}_j^{(k+1)})^T (\mathbf{Q}_{dj}^{(k+1)})^{-1} \mathbf{d}_j^{(k+1)}}{2\hat{\sigma}_0^2} \sim \mathbf{F}_{\alpha, 2, df} \quad (5.7.1-8)$$

где су:

$\mathbf{d}_j$ - елемент вектора померања који се односи на тачку $\mathbf{j}$, $\mathbf{Q}_{d_j}$ - кофакторска матрица вектора померања заједничке тачке $\mathbf{j}$, $\hat{\sigma}_0^2 = \frac{[\mathbf{f}_1 \cdot \hat{\sigma}_{01}^2 + \mathbf{f}_2 \cdot \hat{\sigma}_{02}^2]}{\mathbf{f}}$ - заједничка варијанса изравнања две епохе, $\hat{\sigma}_{01}^2, \hat{\sigma}_{02}^2$ - а *постериори* фактори варијанси две епохе, $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ - број степени слободе изравнања две епохе, $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$ - укупан број степени слободе обе епохе, α - ниво значајности (најчешће се користи 0.05).

Уколико је $\mathbf{T}_j < \mathbf{F}_{\alpha, 2, f}$ при нивоу значајности α прихватамо претпоставку о стабилности тачке $\mathbf{j}$. У противном, за $\mathbf{T}_j > \mathbf{F}_{\alpha, 2, f}$ одбацује се претпоставка о стабилности тачке $\mathbf{j}$ и иста се искључује из групе стабилних тачака (Caspary, 1987; Caspary y and Borutta, 1987; Chen, 1983; Chen et.all., 1990; Singh, 1999; Setan and Singh, 1998).

5.7.2. Метода подударности (congruency)

Метода подударности спада у строге методе оцена. Тестирање подударности подразумева итеративно одбацивање појединих датумских тачака, све до задовољења критеријума подударности. У основи, поступак се реализује по следећој процедури:

- Трансформација вектора померања $\mathbf{d}$ и кофакторске матрице $\mathbf{Q}_d$ две епохе у јединствени датум;
- Идентификација значајности померања;
- Локализација померања појединачних тачака; и
- Дефинитивно тестирање величине деформација за сваку тачку.

Трансформација различитих епоха мерења у јединствен геодетски датум

У деформационој анализи, независно од примењене методе, вектор померања $\mathbf{d}$ и његова кофакторска матрица $\mathbf{Q}_d$ морају бити у истом датуму (рачунска основа, координатни систем). Као почетни датум може се користити датум кога дефинишу референтне тачке основне (референтне) геодетске мреже или нека друга група одабраних тачака. $\mathbf{S}$ трансформацијом се трансформишу вектор померања и његова кофакторска матрица у јединствени датум (са минималним трагом или парцијалним минималним трагом) као:

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_1 &= \mathbf{S} \cdot \mathbf{d} \\ \mathbf{Q}_{d_1} &= \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}_d \cdot \mathbf{S}^T, \\ \mathbf{S} &= \mathbf{I} - \mathbf{G} \cdot (\mathbf{G}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{W}\end{aligned}\tag{5.7.2-1}$$

где су $\mathbf{d}_1$ и $\mathbf{Q}_{d_1}$ вектор померања и његова кофакторска матрица у новом датуму, $\mathbf{G}$ је матрица која обезбеђује услов минималног трага дефинисана обједињавањем датумских дефеката две епохе и бројем заједничких тачака, док је $\mathbf{W}$ - матрица тежина са јединицама по дијагонали, на местима коресподентним датумским тачкама. По процедури стабилност одабраних датумских тачака тестира се тестом подударности.

Идентификација значајности померања

Циљ тестирања подударности јесте одређивање значајности померања групе одабраних тачака између две епохе. Нулта хипотеза гласи:

- $\mathbf{H}_0 : \mathbf{E}(\mathbf{d}'_1) = 0$ - померање групе датумских тачака није значајно,

док алтернативна хипотеза гласи:

- $\mathbf{H}_a : \mathbf{E}(\mathbf{d}'_1) \neq 0$ - (група датумских тачака није стабилна).

Тест статистика не зависи од избора геодетског датума и гласи:

$$T_1 = \frac{\mathbf{d}_1'^T \mathbf{Q}_{d_1}'^+ \mathbf{d}_1'}{\mathbf{h} \hat{\sigma}_0^2} \sim F_{\alpha, h, f}, \quad (5.7.2-2)$$

где су $\mathbf{d}_1', \mathbf{Q}_{d_1}'$ вектор померања и кофакторска матрица заједничких датумских тачака обе епохе, $\mathbf{h} = \text{rang}(\mathbf{Q}_{d_1}') = (2n - \mathbf{d})$ у 2Д мрежи са n заједничких датумских тачака и дефектом ранга $\mathbf{d}$, $\hat{\sigma}_0^2$ је заједнички фактор варијансе, $\mathbf{Q}_{d_1}'^+ = (\mathbf{Q}_{d_1}' + \mathbf{G}\mathbf{G}^T)^{-1} - \mathbf{G} (\mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T$ је одговарајућа псеудоинверзија, а α је ниво значајности (најчешће се користи вредност $\alpha = 0.05$).

Матрица $\mathbf{G}$ (минимални траг) се дефинише зависно од броја заједничких датумских тачака и јединствености датумских дефеката две епохе мерења. Генерално, $\mathbf{Q}_{d_1}'$ је сингуларна па је то разлог што се при рачунању статистике T_1 користи њена псеудоинверзија.

Нулта хипотеза се прихвата при нивоу значајности α , уколико је $T_1 < F_{\alpha, h, f}$. Уколико је тачна алтернативна хипотеза (група датумских тачака није компактна, односно дошло је до померања једног броја тачака), неопходно је у групи датумских тачака спровести поступак локализације померања. Мрежа се трансформише у нову рачунску базу (нови датум, координатни систем), а поступак локализације наставља све док се не констатује стабилност групе преосталих датумских тачака (тест подударности).

Локализација померања појединачних тачака

Уколико тест подударности (5.7.2-2) одбаци нулту хипотезу, прелази се на поступак локализације померања који се реализује по следећој процедури:

- Тестирање значајности померања поједине датумске тачке,
- $\mathbf{S}$ трансформација у нову рачунску базу и
- Тестирање подударности групе преосталих датумских тачака.

Тестирање значајности померања поједине датумске тачке (први корак) има за циљ да лоцира датумску тачку са највећом вредношћу тест статистике (нестабилна тачка) и одбаци је при новом рачунању рачунске базе (тачке које дефинишу геодетски датум). Тест статистика при тестирању значајности поједине тачке гласи:

$$T_j = \frac{\mathbf{d}_{ij}'^T \mathbf{Q}_{d_{ij}}'^{-1} \mathbf{d}_{ij}'}{2\hat{\sigma}_0^2}, \quad (5.7.2-3)$$

где су $\mathbf{d}_{ij}'$, $\mathbf{Q}_{d_{ij}}'$ елеменат вектора померања који се односи на тачку j и део кофакторске матрице коресподентан тачки j , док је $\hat{\sigma}_0^2$ раније дефинисан заједнички фактор варијансе. Уместо теста (5.7.2-3), до оцено значајности померања датумске тачке могуће је доћи и декомпозицијом квадратне форме (Caspar, 1988). Датумска тачка са највећим T_j је "најсумњивија" и по том основу се изоставља приликом дефинисања нове рачунске основе. Мрежа се трансформише у нови датум кога дефинише преостали скуп заједничких тачака.

Трансформација у нову рачунску базу (други корак) реализује се применом S трансформације:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_2 &= S \cdot \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{Q}_{d_2} &= S \cdot \mathbf{Q}_{d_1} \cdot S^T, \\ S &= I - G(G^T W G)^{-1} G^T W \end{aligned} \quad (5.7.2-4)$$

чиме се трансформишу $\mathbf{d}_1$ и $\mathbf{Q}_{d_1}$ у нову рачунску базу, где су $\mathbf{d}_2$ и $\mathbf{Q}_{d_2}$ вектор померања и његова кофакторска матрица у новом датуму, а W је матрица тежина (са јединицама на месту датумских тачака, док су остали чланови једнаки нули). Након трансформације, тестом подударности се тестира нови (преостали) скуп датумских тачака.

Нулта хипотеза при *тестирању подударности преосталих датумских тачака* (трећи корак) гласи:

- $H_0 : E(\mathbf{d}_2') = 0$ - померање групе датумских тачака није значајно,

док алтернативна хипотеза гласи:

- $H_a : E(\mathbf{d}_2') \neq 0$ - група датумских тачака није стабилна.

Тест статистика не зависи од избора геодеетског датума и гласи:

$$T = \frac{\mathbf{d}_2'^T \mathbf{Q}_{d_2}'^{-1} \mathbf{d}_2'}{(h - 2k) \hat{\sigma}_0^2} \sim F_{\alpha, h-2k, f}, \quad (5.7.2-5)$$

где је k број одбачених датумских тачака, $\mathbf{d}'_2$ и $\mathbf{Q}'_{d_2}$ су вектор померања и кофакторска матрица преосталих датумских тачака.

Уколико се нулта хипотеза одбаци ($T > F_{\alpha, h-2k, f}$), процес локализације се понавља све до задовољења критеријума стабилности датумских тачака. Прихватањем нулте хипотезе, информација о стабилности свих заједничких тачака мреже утврђује се у коначној фази тестирања деформација.

Завршно тестирање деформација тестирањем појединачне тачке

Након прихватања нулте хипотезе у поступку тестирања подударности скупа датумских тачака, прелази се на тестирање појединачних тачака. Нулта хипотеза гласи:

- $H_0 : \mathbf{d}_{2j} = [\mathbf{dx}_{2j} \ \mathbf{dy}_{2j}]^T = \mathbf{0}$ (нема значајних померања заједничких тачака),

против алтернативне хипотезе која гласи:

- $H_a : \mathbf{d}_{2j} = [\mathbf{dx}_{2j} \ \mathbf{dy}_{2j}]^T \neq \mathbf{0}$ (постоје значајна померања на заједничким тачкама).

Тест статистика (слично као у 5.7.2-3) гласи:

$$T_j = \frac{\mathbf{d}_{2j}^T \mathbf{Q}_{d_{2j}}^{-1} \mathbf{d}_{2j}}{2\hat{\sigma}_0^2} \sim F_{\alpha, 2, f} . \quad (5.7.2-6)$$

Уколико је $T_j < F_{\alpha, 2, f}$, при нивоу значајности α (обично је $\alpha=0.05$), тада се тачка j сматра стабилном (вектор померања није значајан). У противном, одбацивање нулте хипотезе указује да је померање тестиране тачке значајно. Поступак тестирања појединачне тачке се понавља за сваку датумску тачку и уколико се утврди да је нека од њих значајно одступила, изоставља се из скупа датумских тачака и локализација се понавља. Ради боље визуализације померања често се величине померања приказују графички, а тест и графички приказ морају међусобно коинцидирати.

На основу упоредне анализе робусних и класичних метода тестирања подударности јасно се уочава да су робусне методе једноставније, али се свакако препоручује примена најмање две независне методе.

5.8. Моделовање деформација

Процедура моделовања деформација објасниће се на примеру општег поступка развијеног на Универзитету у Њу Брунsvику (Chen, 1983). У моделовању постоје два приступа: *први* – на основу разлика опажања и *други* – на основу померања положаја (разлика координата). Посебна пажња биће поклоњена другом приступу.

Општи метод садржи три основна процеса:

- Прелиминарна идентификација модела деформације;
- Оцена параметара трансформације; и
- Провера модела деформација и коначан избор најбољег модела.

5.8.1. Прелиминарна идентификација модела деформације

Идентификација модела трансформације заснива се на *a priori* информацији или анализи тренда померања тачака. У оквиру 2Д анализе морају се узети у обзир следећи параметри:

- две компоненте померања крутог тела ($\mathbf{a}_0$ и $\mathbf{b}_0$),
- параметар ротације у равни $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ($\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y})$), и
- две компоненте напрезања у правцима $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ оса (ε_x и ε_y) и напрезања у слободном правцу ($\varepsilon_{x,y}$).

Дефинисање блока може се у потпуности описати уколико је функција померања $\mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ позната за цео блок. У општем случају, функција померања одређује се полиномском апроксимацијом помереног блока облика:

$$\begin{aligned} \mathbf{dx} &= \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1\mathbf{x} + \mathbf{a}_2\mathbf{y} + \mathbf{a}_3\mathbf{xy} + \mathbf{a}_4\mathbf{x}^2 + \dots \\ \mathbf{dy} &= \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1\mathbf{x} + \mathbf{b}_2\mathbf{y} + \mathbf{b}_3\mathbf{xy} + \mathbf{b}_4\mathbf{x}^2 + \dots \end{aligned} \quad (5.8.1-1)$$

где су $\mathbf{dx}$ и $\mathbf{dy}$ померања у правцу $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ оса, док су $\mathbf{y}$ и $\mathbf{x}$ координате заједничких тачака (приближне или оцењене). Ако се претпостави да је модел линеаран, тада (5.8.1-1) гласи:

$$\begin{aligned} \mathbf{dx} &= \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1\mathbf{x} + \mathbf{a}_2\mathbf{y} \\ \mathbf{dy} &= \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1\mathbf{x} + \mathbf{b}_2\mathbf{y} \end{aligned} \quad (5.8.1-2)$$

односно:

$$\begin{aligned} \mathbf{dx} &= \mathbf{a}_0 + \varepsilon_x \mathbf{x} + \varepsilon_{xy} \mathbf{y} - \omega \mathbf{y} \\ \mathbf{dy} &= \mathbf{b}_0 + \varepsilon_{xy} \mathbf{x} + \varepsilon_y \mathbf{y} - \omega \mathbf{x} \end{aligned} \quad (5.8.1-3)$$

Уз најчешће изостављање параметра ротације ω , модел (5.8.1-3) у матричном облику гласи:

$$\mathbf{d} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{c}}, \quad (5.8.1-4)$$

или:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{dx}_i \\ \mathbf{dy}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathbf{x}_i & 0 & \mathbf{y}_i \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{y}_i & \mathbf{x}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{b}_0 \\ \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}, \quad (5.8.1-5)$$

где је $\mathbf{d}$ вектор померања (израз 5.7-5), $\mathbf{B}$ је матрица дизајна, а $\hat{\mathbf{c}}$ вектор непознатих параметара деформације (коэффициенти полинома). Израз (5.8.1-4) познат је под називом – **модел деформације**. Бројни су примери различитих модела деформација, од којих ће се за ову прилику посебно истаћи следећи:

- нема глобалне деформације ($\mathbf{dx} = 0, \mathbf{dy} = 0$),
- стабилне тачке ($\mathbf{dx}_i = 0, \mathbf{dy}_i = 0$),
- померање појединачне тачке ($\mathbf{dx}_i = \mathbf{a}_i, \mathbf{dy}_i = \mathbf{b}_i$),
- померање крутог тела ($\mathbf{dx} = \mathbf{a}_0, \mathbf{dy} = \mathbf{b}_0$),
- хомогено напрезање ($\mathbf{dx} = \varepsilon_x \mathbf{x} + \varepsilon_{xy} \mathbf{y}, \mathbf{dy} = \varepsilon_{xy} \mathbf{x} + \varepsilon_y \mathbf{y}$), и
- круто тело уз хомогено напрезање
 $\mathbf{dx} = \mathbf{a}_0 + \varepsilon_x \mathbf{x} + \varepsilon_{xy} \mathbf{y}, \mathbf{dy} = \mathbf{b}_0 + \varepsilon_{xy} \mathbf{x} + \varepsilon_y \mathbf{y}.$

5.8.2. Оцена параметара деформационог модела

Једначина модела деформација (5.8.1-4) заснива се на ГММ облика:

$$\mathbf{d} + \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{c}}, \quad (5.8.2-1)$$

где је $\hat{\mathbf{v}}$ оцена вектора резидуала. Да би се одредио вектор $\hat{\mathbf{c}}$, број заједничких тачака на којима су позната померања у две епохе мора бити

најмање једнак броју непознатих параметара у моделу деформација. Уколико је број компонената садржаних у $\mathbf{d}$ већи од броја непознатих параметара, тада се вектор $\hat{\mathbf{c}}$ може одредити применом методе најмањих квадрата. Решење гласи:

$$\hat{\mathbf{c}} = (\mathbf{B}^T \mathbf{P}_d \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_d \mathbf{d}, \quad (5.8.2-2)$$

где је $\mathbf{P}_d$ матрица тежина која се одређује на један од начина (Chen et al. 1990; Chen, 1983):

- за све заједничке тачке у мрежи као:

$$\mathbf{P}_d = [\mathbf{S} \mathbf{Q}_d \mathbf{S}^T + \mathbf{G}(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T]^{-1} - \mathbf{G}(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T, \quad (5.8.2-3)$$

или:

$$\mathbf{P}_d = \mathbf{N}_1 (\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 + \mathbf{G} \mathbf{G}^T)^{-1} \mathbf{N}_2, \quad (5.8.2-4)$$

где је:

$$\mathbf{S} = \mathbf{I} - \mathbf{G}(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T, \quad (5.8.2-5)$$

а $\mathbf{Q}_d$ је описано у (5.7-3), док су $\mathbf{N}_1$ и $\mathbf{N}_2$ матрице коефицијената нормалних једначина две епохе; матрице $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$, $\mathbf{G}$ и $\mathbf{Q}_d$ формирају се у односу на све дате тачке у мрежи;

- за део датих тачака мреже као:

$$\mathbf{P}_d = [\mathbf{S}_r \mathbf{Q}_d \mathbf{S}_r^T + \mathbf{G}_r (\mathbf{G}_r^T \mathbf{G}_r)^{-1} \mathbf{G}_r^T]^{-1} - \mathbf{G}_r (\mathbf{G}_r^T \mathbf{G}_r)^{-1} \mathbf{G}_r^T, \quad (5.8.2-6)$$

или:

$$\mathbf{P}_d = \mathbf{N}_{1r} (\mathbf{N}_{1r} + \mathbf{N}_{2r} + \mathbf{G}_r \mathbf{G}_r^T)^{-1} \mathbf{N}_{2r}, \quad (5.8.2-7)$$

где је:

$$\mathbf{S}_r = \mathbf{I} - \mathbf{G}_r (\mathbf{G}_r^T \mathbf{G}_r)^{-1} \mathbf{G}_r^T \quad (5.8.2-8)$$

$$\mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{N}'_{11} & \mathbf{N}'_{12} \\ \mathbf{N}'_{21} & \mathbf{N}'_{22} \end{bmatrix}, \quad (5.8.2-9)$$

$$\mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{N}''_{11} & \mathbf{N}''_{12} \\ \mathbf{N}''_{21} & \mathbf{N}''_{22} \end{bmatrix}, \quad (5.8.2-10)$$

$$\mathbf{N}_{1r} = \mathbf{N}'_{22} - \mathbf{N}'_{21} \mathbf{N}'_{11}{}^{-1} \mathbf{N}'_{12}, \quad (5.8.2-11)$$

$$\mathbf{N}_{2r} = \mathbf{N}''_{22} - \mathbf{N}''_{21} \mathbf{N}''_{11}{}^{-1} \mathbf{N}''_{12}, \quad (5.8.2-12)$$

док се $\mathbf{S}_r, \mathbf{Q}_d, \mathbf{G}_r, \mathbf{N}'_{11}, \mathbf{N}''_{11}$ односе само на део заједничких тачака.

Матрица кофактора $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{c}}}$ од $\hat{\mathbf{c}}$ гласи:

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{c}}} = (\mathbf{B}^T \mathbf{P}_d \mathbf{B})^{-1}. \quad (5.8.2-13)$$

Уколико се матрица $\mathbf{P}_d$ рачуна по изразима (5.8.2-3) и (5.8.2-4), односно (5.8.2-6) и (5.8.2-7), Chen (1983) предлаже одбацивање параметра ротације ω (једнак нули) у моделу деформације, јер је само у том случају оправдано искључити спољну оријентацију мреже (параметар ротације ω тада је сувишан и безначајан).

5.8.3. Провера модела деформације и избор најбољег модела

Глобална прихватљивост модела деформација може се тестирати користећи квадратну форму резидуала $\hat{\mathbf{v}}$. Глобални тест модела заснива се на следећој нултој хипотези:

$$\mathbf{H}_0 : \hat{\sigma}_{oc}^2 = \hat{\sigma}_o^2, \quad (5.8.3-1)$$

на супрот алтернативној која гласи:

$$\mathbf{H}_a : \hat{\sigma}_{oc}^2 \neq \hat{\sigma}_o^2, \quad (5.8.3-2)$$

где је $\hat{\sigma}_o^2$ заједничка варијанса мерења две епохе, а $\hat{\sigma}_{oc}^2$ је срачунато на основу израза:

$$\hat{\sigma}_{oc}^2 = \frac{\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P}_d \hat{\mathbf{v}}}{\mathbf{f}_c}, \quad (5.8.3-3)$$

где су:

$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{c}} - \mathbf{d}$ - вектор резидуала,

$\mathbf{P}_d$ - матрица тежина,

$\mathbf{f}_c = 2\mathbf{n} - \mathbf{d} - \mathbf{m}_c$ где је $\mathbf{n}$ број тачака које формирају матрицу $\mathbf{P}_d$,

$\mathbf{d}$ - дефект датума,

$\mathbf{m}_c$ - број параметара које треба оценити ($\hat{\mathbf{c}}$).

Тест статистика гласи:

$$\mathbf{T} = \frac{\hat{\sigma}_{oc}^2}{\hat{\sigma}_0^2} = \frac{\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P}_d \hat{\mathbf{v}}}{\mathbf{f}_c \hat{\sigma}_0^2} \sim \mathbf{F}_{\alpha, \mathbf{f}_c, \mathbf{f}}. \quad (5.8.3-4)$$

Уколико је $\mathbf{T} \leq \mathbf{F}_{\alpha, \mathbf{f}_c, \mathbf{f}}$ при нивоу значајности α нема основаности за одбацивање нулте хипотезе, тј. прихвата се нулта хипотеза или модел деформација се прихвата. У противном, уколико је $\mathbf{T} > \mathbf{F}_{\alpha, \mathbf{f}_c, \mathbf{f}}$, одбацује се нулта хипотеза. Значајност појединог параметра $\hat{\mathbf{c}}_i$ или групе (два или више) параметара $\hat{\mathbf{c}}_i'$ утврђује се применом следећих хипотеза:

- за појединачни параметар

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_o : \hat{\mathbf{c}}_i &= 0, \\ \mathbf{H}_a : \hat{\mathbf{c}}_i &\neq 0, \end{aligned} \quad (5.8.3-5)$$

- за групу параметара

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_o : \hat{\mathbf{c}}_i' &= 0, \\ \mathbf{H}_a : \hat{\mathbf{c}}_i' &\neq 0, \end{aligned} \quad (5.8.3-6)$$

Локална тест статистика гласи:

- за појединачни параметар

$$T_i = \frac{\hat{c}_i^2}{\hat{\sigma}_0^2 \mathbf{q}_{\hat{c}_i}} \sim F_{\alpha, 1, f}, \quad (5.8.3-7)$$

- за групу параметара

$$T_g = \frac{\hat{c}_i^T \mathbf{Q}_{\hat{c}_i} \hat{c}_i}{\hat{\sigma}_0^2 \mathbf{u}_i} \sim F_{\alpha, u_i, f}, \quad (5.8.3-8)$$

где су:

$\mathbf{q}_{\hat{c}_i}$ - i -ти дијагонални елемент од $\mathbf{Q}_{\hat{c}_i}$,

$\hat{c}_i$ - поједини параметар,

$\hat{\sigma}_0^2$ - заједничка варијанса,

f - збир степени слободе прве и друге епохе мерења,

$\hat{c}_i'$ - подскуп од $\hat{c}$,

$\mathbf{u}_i$ - број параметара у $\hat{c}_i'$,

$\mathbf{Q}_{\hat{c}_i}$ - субматрица од $\mathbf{Q}_{\hat{c}}$,

α - ниво значајности, обично $\alpha = 0.05$.

Нулте хипотезе (5.8.3-7) и (5.8.3-8) биће одбачене при нивоу значајности α уколико је:

$$T_i > F_{\alpha, 1, f}, \quad (5.8.3-9)$$

односно уколико је:

$$T_g > F_{\alpha, u_i, f}$$

за параметре се претпоставља да су статистички значајни. Уколико се испостави да нису статистички значајни, неопходно је одабрати нови модел деформација и поновити поступак оцењивања и тестирања значајности, све до прихватања глобалног теста модела, тј. избора таквог модела чији ће параметри бити статистички значајни.

С обзиром да понашање деформационе структуре обично није у целости извесно, најчешће постоји више могућих решења (модела). Најбољи модел бира се на основу следећих критеријума:

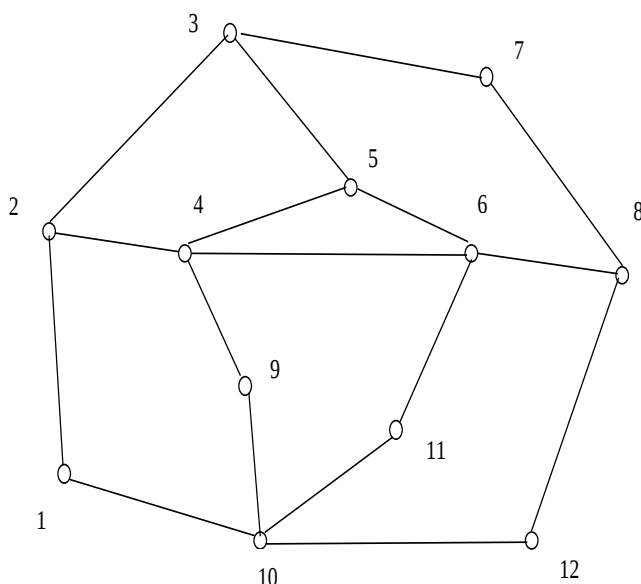
- модел је задовољио глобални тест и сви параметри модела су значајни,

- уколико више модела задовољава први критеријум, бира се модел са најмањим бројем параметара, и
- на бази оцене тренда померања или *a priori* односно неких других информација (механичких карактеристика и сл.).

ПРИМЕР 5.8.3-1. Испитати помереност тачака нивелманске мреже у више епоха мерења представљене на скици. Подаци мерења висинских разлика и приближне висине тачака су дати у табелама.

Приближне висине тачака

Тачка	H (m)
1	100.123
2	131.234
3	121.341
4	120.225
5	111.237
6	101.211
7	104.234
8	105.219
9	107.111
10	109.546
11	131.922
12	133.222



Мерење висинских разлика у више епоха

РБ	вис.раз	Эпоха 0	Эпоха 1	$d_i(\text{km})$	$\sigma_i(\text{mm})$
1	h_{2-4}	-11.0097	-11.0014	1.2	3.29
2	h_{2-1}	-31.1146	-31.1128	1.4	3.55
3	h_{1-10}	9.4237	9.4230	1.5	3.67
4	h_{9-10}	2.4370	2.4339	0.8	2.68
5	h_{4-9}	-13.1121	-13.1194	0.8	2.68
6	h_{2-3}	-9.8857	-9.8874	2.1	4.35
7	h_{4-5}	-8.9946	-9.0121	1.5	3.67
8	h_{3-5}	-10.1046	-10.1179	1.3	3.42
9	h_{3-7}	-17.1015	-17.1116	2.5	4.74
10	h_{5-6}	-10.0284	-10.0045	1.1	3.15
11	h_{6-8}	4.0063	4.0025	1.2	3.29
12	h_{4-6}	-19.0228	-19.0114	2.6	4.84
13	h_{7-8}	0.9798	0.9820	1.4	3.55
14	h_{10-11}	22.3737	22.3790	1.2	3.29
15	h_{6-11}	30.7090	30.7056	1.3	3.42
16	h_{8-12}	27.9983	28.0012	1.1	3.15
17	h_{10-12}	23.6733	23.6759	2.4	4.65

Ради тестирања хомогености тачности мерења двеју епоха, потребно је најпре спровести одвојено изравнање по методи посредног изравнања. При том се усваја да мерења нису корелисана.

- број мерења $n = 17$
- број непознатих $u = 12$
- број степени слободe $f = n - u + d = 6$

Усвајено $\sigma_0 = 1$

$$\sigma_i = 3\text{mm}\sqrt{D_i(\text{km})}$$

Функционални модел гласи: $\mathbf{l}_i + \hat{\mathbf{v}}_i = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_i$, док је стохастички $\mathbf{E}(\mathbf{v}) = 0$ са $\mathbf{K}_{\mathbf{l}_i} = \sigma^2$, $\mathbf{Q}_{\mathbf{l}_i} = \sigma^2 \mathbf{P}^{-1}$.

Посредно изравнање за мерења нулте епохе

Вредности у матрици тежина ($\mathbf{P}$) су одређене према $\mathbf{p}_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{\mathbf{l}_i}^2}$. Према ГММ матрица

кофицијената једначина поправака ($\mathbf{A}$) и вектор опажања ($\mathbf{f}$) изгледају:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0.70 \\ 3.60 \\ -0.70 \\ -2.00 \\ -1.90 \\ -7.30 \\ 6.60 \\ 0.60 \\ -5.50 \\ 2.40 \\ 1.70 \\ 8.80 \\ 5.20 \\ 2.30 \\ 2.00 \\ 4.70 \\ 2.70 \end{bmatrix}$$

Нормалне једначине гласе: $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$, $\mathbf{n} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{f}$.

Датум је дефинисан минималним трагом на свим тачкама мреже. Вектор непознатих параметара се одређује помоћу израза $\hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{N}^{-1}\mathbf{n}$ и вектор резидуала висина ($\hat{\mathbf{v}}$) из $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{f}$:

$$\mathbf{Q}_x = \text{diag} \begin{bmatrix} 7.4976 \\ 5.2939 \\ 6.0220 \\ 3.5189 \\ 4.3818 \\ 3.4463 \\ 9.2853 \\ 5.2261 \\ 4.7642 \\ 3.6777 \\ 6.1347 \\ 7.9578 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1.50 \\ 0.61 \\ 2.28 \\ 1.86 \\ -0.58 \\ -1.85 \\ 5.43 \\ -1.09 \\ 1.27 \\ 0.79 \\ -2.63 \\ -4.57 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 1.95 \\ 1.49 \\ 1.59 \\ -2.48 \\ -2.48 \\ -5.63 \\ 4.16 \\ -2.26 \\ -2.35 \\ 1.13 \\ 2.46 \\ 5.09 \\ -1.32 \\ -1.12 \\ 1.22 \\ 1.22 \\ -2.66 \end{bmatrix}$$

Оцена стандардног одступања $\hat{\sigma}_{0,0} = \sqrt{\frac{\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}}}{\mathbf{f}_0}} = 1.206$

Глобални тест модела: $H_0: E(\hat{\sigma}_{0,0}^2) = \sigma_0^2$ против $H_a: E(\hat{\sigma}_{0,0}^2) \neq \sigma_0^2$

$$T = \hat{\sigma}_{0,0}^2 / \sigma_0^2 \sim F(n-u+d, \infty)$$

$$T = 1.455 < 2.108$$

Закључак: За претпостављену вероватноћу нема основа за тврдњу да примењени модел није адекватан, односно одбацује се претпоставка да мерења садрже грубе грешке.

Посредно изравнање за мерења прве епохе

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} -7.60 \\ -1.80 \\ 0.00 \\ -1.10 \\ -5.40 \\ 5.60 \\ -24.10 \\ -13.90 \\ -4.60 \\ 21.50 \\ -5.50 \\ 2.60 \\ -3.00 \\ 3.00 \\ -5.40 \\ -1.80 \\ -0.10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 \begin{array}{c} \mathbf{P} = \text{diag} \\ \begin{bmatrix} 0.0924 \\ 0.0793 \\ 0.0742 \\ 0.1392 \\ 0.1392 \\ 0.0528 \\ 0.0742 \\ 0.0855 \\ 0.0445 \\ 0.1008 \\ 0.0924 \\ 0.0427 \\ 0.0793 \\ 0.0924 \\ 0.0855 \\ 0.1008 \\ 0.0462 \end{bmatrix} \end{array} & & \begin{array}{c} \mathbf{Q}_x = \text{diag} \\ \begin{bmatrix} 7.4976 \\ 5.2939 \\ 6.0220 \\ 3.5189 \\ 4.3818 \\ 3.4463 \\ 9.2853 \\ 5.2261 \\ 4.7642 \\ 3.6777 \\ 6.1347 \\ 7.9578 \end{bmatrix} \end{array} & & \begin{array}{c} \hat{\mathbf{x}} = \\ \begin{bmatrix} -2.07 \\ -1.15 \\ 2.54 \\ 6.77 \\ -14.26 \\ 7.03 \\ 1.25 \\ 0.11 \\ 0.68 \\ -1.12 \\ 1.76 \\ -1.54 \end{bmatrix} \end{array} & & \begin{array}{c} \hat{\mathbf{v}} = \\ \begin{bmatrix} 0.33 \\ 0.89 \\ 0.95 \\ -0.70 \\ -0.70 \\ -1.90 \\ 3.07 \\ -2.90 \\ 3.31 \\ -0.21 \\ -1.43 \\ -2.34 \\ 1.85 \\ -0.12 \\ 0.13 \\ 0.15 \\ -0.33 \end{bmatrix} \end{array}
 \end{array}$$

$$\text{Оцена стандардног одступања } \hat{\sigma}_{0,1} = \sqrt{\frac{\hat{\mathbf{V}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{V}}}{\mathbf{f}_1}} = 0.716$$

Глобални тест модела: $H_0: E(\hat{\sigma}_{0,1}^2) = \sigma_0^2$ против $H_a: E(\hat{\sigma}_{0,1}^2) \neq \sigma_0^2$

$$\mathbf{T} = \sigma_0^2 / \hat{\sigma}_{0,1}^2 \sim F(\infty, n-u+d)$$

$$T = 1.949 < 3.673$$

Закључак: За претпостављену вероватноћу нема основа за тврдњу да примењени модел није адекватан, односно, одбацује се претпоставка да мерења садрже грубе грешке.

Коначно, тест хомогености између мерења подразумева:

$$H_0: E(\hat{\sigma}_{0,0}^2) = E(\hat{\sigma}_{0,1}^2) = \sigma_0^2$$

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{f}_0 \cdot \hat{\sigma}_{0,0}^2 + \mathbf{f}_1 \cdot \hat{\sigma}_{0,1}^2}{\mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_1}} = 0.9920$$

$$\mathbf{F} = \frac{\hat{\sigma}_{0,0}^2}{\hat{\sigma}_{0,1}^2} = 2.8363 < \mathbf{F}_{0.95}(\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1) = 4.2839$$

Закључак: За претпостављену вероватноћу нема основа за тврдњу да мерења у две епохе нису хомогена.

1. метода – Робусна метода (1Д мрежа):

Овде ће бити описана метода трансформације сличности фигура са итеративним поступком промене тежина (IWST).

Дефинитивне висине тачака из одвојеног изравнања две епохе:

Тачка	$H_{\text{def},0}$ (m)	$H_{\text{def},1}$ (m)
1	100.1215	100.1209
2	131.2346	131.2329
3	121.3433	121.3435
4	120.2269	120.2318
5	111.2364	111.2227
6	101.2092	101.2180
7	104.2394	104.2353
8	105.2179	105.2191
9	107.1123	107.1117
10	109.5468	109.5449
11	131.9194	131.9238
12	133.2174	133.2205

Вектор померања тачака (разлика дефинитивних висина тачака из две епохе) и његова одговарајућа матрица Q_d изгледају:

$$d[\text{mm}] = \begin{bmatrix} \hat{H}_{1,1} - \hat{H}_{1,0} \\ \hat{H}_{2,1} - \hat{H}_{2,0} \\ \hat{H}_{3,1} - \hat{H}_{3,0} \\ \hat{H}_{4,1} - \hat{H}_{4,0} \\ \hat{H}_{5,1} - \hat{H}_{5,0} \\ \hat{H}_{6,1} - \hat{H}_{6,0} \\ \hat{H}_{7,1} - \hat{H}_{7,0} \\ \hat{H}_{8,1} - \hat{H}_{8,0} \\ \hat{H}_{9,1} - \hat{H}_{9,0} \\ \hat{H}_{10,1} - \hat{H}_{10,0} \\ \hat{H}_{11,1} - \hat{H}_{11,0} \\ \hat{H}_{12,1} - \hat{H}_{12,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.57 \\ -1.77 \\ 0.26 \\ 4.91 \\ -13.68 \\ 8.88 \\ -4.17 \\ 1.20 \\ -0.60 \\ -1.91 \\ 4.40 \\ 3.03 \end{bmatrix} \quad Q_d(\text{diag}) = \begin{bmatrix} 14.9952 \\ 10.5878 \\ 12.0440 \\ 7.0378 \\ 8.7636 \\ 6.8926 \\ 18.5706 \\ 10.4522 \\ 9.5284 \\ 7.3554 \\ 12.2694 \\ 15.9156 \end{bmatrix}$$

1. итерација:

$$d^{(1)} = S \cdot d$$

Пошто је изравнање мреже у обе епохе извршено минималним трагом на свим тачкама мреже и како су тачке мреже у обе епохе идентичне, у првој итерацији се

усваја $\mathbf{W} = \mathbf{I}$. Дозвољена разлика између $d^{(1)}$ и d се бира искуствено и треба да буде довољно мало.

S – трансформација: $S = [\mathbf{I} - \mathbf{G}(\mathbf{G}^T \mathbf{W}^k \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{W}^k]$ где је:

$$S = \begin{bmatrix} 0.917 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 \\ -0.083 & 0.917 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 \\ -0.083 & -0.083 & 0.917 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 \\ -0.083 & -0.083 & -0.083 & 0.917 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 \\ -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & 0.917 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 \\ -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & 0.917 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 \\ -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & 0.917 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 \\ -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & 0.917 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 \\ -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & 0.917 & -0.050 & -0.083 & -0.083 \\ -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & 0.917 & -0.083 & -0.083 \\ -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & 0.917 & -0.083 \\ -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & 0.917 \\ -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & 0.917 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{I}(\text{diag}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{W} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{d}^{(1)} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{d} = \begin{bmatrix} -0.57 \\ -1.77 \\ 0.26 \\ 4.91 \\ -13.68 \\ 8.88 \\ -4.17 \\ 1.20 \\ -0.60 \\ -1.91 \\ 4.40 \\ 3.03 \end{bmatrix} \quad |\mathbf{d}^{(1)} - \mathbf{d}| = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$$

Самим тим што је за све вредности $|\mathbf{d}^{(1)} - \mathbf{d}| = 0$, ово је и последња итерација. У случају да ове вредности нису довољно мале, дијагонална матрица $\mathbf{W}$ би се у

следећој итерацији формирала применом формуле $\mathbf{W}^{(k)} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{|\mathbf{d}_i^{(k)}|} \right\}$.

$$\mathbf{Q}_d^{(1)}(\text{diag}) = \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}_d \cdot \mathbf{S}^T = \begin{bmatrix} 14.9953 \\ 10.5878 \\ 12.0440 \\ 7.0379 \\ 8.7636 \\ 6.8925 \\ 18.5706 \\ 10.4522 \\ 9.5283 \\ 7.3554 \\ 12.2694 \\ 15.9157 \end{bmatrix}$$

Провера стабилности појединачних тачака:

ТАЧКА (j)	$T_j = \frac{(\mathbf{d}_j^{(1)})^T (\mathbf{Q}_{dj}^{(1)})^{-1} \mathbf{d}_j^{(1)}}{\hat{\sigma}_0^2}$	Релација	$F_{0.95}(1, 12)$
1	0.02494	<	4.7472
2	0.3569	<	4.7472
3	0.0064	<	4.7472
4	4.2756	<	4.7472
5	24.7658	>	4.7472
6	12.9101	>	4.7472
7	1.0961	<	4.7472
8	0.1992	<	4.7472
9	0.0501	<	4.7472
10	0.6499	<	4.7472
11	1.7498	<	4.7472
12	0.6865	<	4.7472

Закључак: За задату вероватноћу може се закључити да су тачке 5 и 6 значајно померене.

2. метода – Метода подударности (1Д мрежа):

1. итерација: Трансформација $\mathbf{d}$ и $\mathbf{Q}_d$ у нову рачунску базу:

$$\mathbf{S} = \mathbf{I} - \mathbf{G}(\mathbf{G}^T \mathbf{W} \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{W}, \text{ где су } \mathbf{I} \text{ и } \mathbf{W} \text{ јединичне матрице, а}$$

$$\mathbf{G}^T = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0.917 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 \\ -0.083 & 0.917 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 \\ -0.083 & -0.083 & 0.917 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 \\ -0.083 & -0.083 & -0.083 & 0.917 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 \\ -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & 0.917 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 \\ -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & 0.917 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 \\ -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & 0.917 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 \\ -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & 0.917 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 \\ -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & 0.917 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 \\ -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & 0.917 & -0.083 & -0.083 & -0.083 \\ -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & 0.917 & -0.083 & -0.083 \\ -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & 0.917 & -0.083 \\ -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & -0.083 & 0.917 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}[\text{mm}] = \begin{bmatrix} -0.57 \\ -1.77 \\ 0.26 \\ 4.91 \\ -13.68 \\ 8.88 \\ -4.17 \\ 1.20 \\ -0.60 \\ -1.91 \\ 4.40 \\ 3.03 \end{bmatrix} \quad \mathbf{d}^{(1)} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{d} = \begin{bmatrix} -0.57 \\ -1.76 \\ 0.26 \\ 4.91 \\ -13.68 \\ 8.88 \\ -4.19 \\ 1.20 \\ -0.59 \\ -1.91 \\ 4.39 \\ 3.03 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_d^{(1)}(\text{diag}) = \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}_d \cdot \mathbf{S}^T = \begin{bmatrix} 14.9953 \\ 10.5878 \\ 12.0440 \\ 7.0379 \\ 8.7636 \\ 6.8925 \\ 18.5706 \\ 10.4522 \\ 9.5283 \\ 7.3554 \\ 12.2694 \\ 15.9157 \end{bmatrix}$$

Пошто је матрица $\mathbf{Q}_d^{(1)}$ сингуларна, рачуна се њена псеудоинверзија:

$$\mathbf{Q}_{d_i}^{(1)+} = (\mathbf{Q}_{d_i}^{(1)} + \mathbf{G}\mathbf{G}^T)^{-1} - \mathbf{G}(\mathbf{G}^T\mathbf{G} \ \mathbf{G}^T\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}^T \quad \text{где је}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{па је:} \quad \mathbf{Q}_d^{(1)+}(\text{diag}) = \begin{bmatrix} 0.0767 \\ 0.1124 \\ 0.0914 \\ 0.1741 \\ 0.1303 \\ 0.1609 \\ 0.0619 \\ 0.1365 \\ 0.1389 \\ 0.1759 \\ 0.0890 \\ 0.0737 \end{bmatrix}$$

Тест статистика подударности групе тачака:

$$T^{(1)} = \frac{\mathbf{d}^{(1)T} \mathbf{Q}_d^{(1)+} \mathbf{d}^{(1)}}{h \hat{\sigma}_0^2} = 5.4908 > F_{0.95}(h, f) = 2.7173 \quad (h = 11, f = 12)$$

Закључак: За задату вероватноћу може се закључити да посматран скуп тачака није компактан и да су једна или више тачака значајно померене.

Локализација померања појединачних тачака:

Тестирање значајности померања поједине тачке:

ТАЧКА (j)	$T_j^{(1)} = \frac{(\mathbf{d}_j^{(1)})^T (\mathbf{Q}_{dj}^{(1)})^{-1} \mathbf{d}_j^{(1)}}{\hat{\sigma}_0^2}$	Релација	$F_{0.95}(1, 12)$
1	0.02494	<	4.7472
2	0.3569	<	4.7472
3	0.0064	<	4.7472
4	4.2756	<	4.7472
5	24.7658	>	4.7472
6	12.9101	>	4.7472
7	1.0961	<	4.7472
8	0.1992	<	4.7472
9	0.0501	<	4.7472
10	0.6499	<	4.7472
11	1.7498	<	4.7472
12	0.6865	<	4.7472

Закључак: За задату вероватноћу може се закључити да тачка 5 има највећу вредност тест статистике па се она проглашава сумњивом и избацује се из даље анализе.

2. итерација: Трансформација $d^{(1)}$ и $Q_d^{(1)}$ у нову рачунску базу, без сумњиве тачке 5:

$$G^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.909 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 \\ -0.091 & 0.909 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 \\ -0.091 & -0.091 & 0.909 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 \\ -0.091 & -0.091 & -0.091 & 0.909 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 \\ -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & 0.909 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 \\ -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & 0.909 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 \\ -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & 0.909 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 \\ -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & 0.909 & -0.091 & -0.091 & -0.091 \\ -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & 0.909 & -0.091 & -0.091 \\ -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & 0.909 & -0.091 \\ -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & -0.091 & 0.909 \end{bmatrix}$$

$$d^{(1)} = \begin{bmatrix} -0.57 \\ -1.77 \\ 0.26 \\ 4.91 \\ 8.88 \\ -4.17 \\ 1.20 \\ -0.60 \\ -1.91 \\ 4.40 \\ 3.03 \end{bmatrix} \quad d^{(2)} = S^{(1)} \cdot d^{(1)} = \begin{bmatrix} -1.81 \\ -3.01 \\ -0.98 \\ 3.67 \\ 7.64 \\ -5.42 \\ -0.04 \\ -1.84 \\ -3.15 \\ 3.15 \\ 1.78 \end{bmatrix} \quad Q_d^{(2)}(\text{diag}) = S^{(1)} \cdot Q_d^{(1)} \cdot S^{(1)T} = \begin{bmatrix} 14.6152 \\ 10.5474 \\ 12.6011 \\ 7.2745 \\ 7.2445 \\ 18.3888 \\ 10.2384 \\ 9.3700 \\ 7.0204 \\ 12.0940 \\ 15.4581 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad Q_d^{(2)+}(\text{diag}) = \begin{bmatrix} 0.0767 \\ 0.1124 \\ 0.0774 \\ 0.1636 \\ 0.1413 \\ 0.0619 \\ 0.1365 \\ 0.1389 \\ 0.1759 \\ 0.0890 \\ 0.0737 \end{bmatrix}$$

Тест статистика подударности групе тачака:

$$T^{(2)} = \frac{\mathbf{d}^{(2)T} \mathbf{Q}_d^{(2)} \mathbf{d}^{(2)}}{h \hat{\sigma}_0^2} = 1.4572 < F_{0.95}(h, f) = 2.7533 \quad (h = 10, f = 12)$$

Закључак: Преостала група тачака је компактна. тј. нема сумње на помереност преосталих тачака.

Пошто је $T < F$, врши се завршно тестирање померања појединачних тачака.

Завршно тестирање померања појединачних тачака:

ТАЧКА (j)	$T_j = \frac{(\mathbf{d}_j^{(2)})^T (\mathbf{Q}_{dj}^{(2)})^{-1} \mathbf{d}_j^{(2)}}{h \hat{\sigma}_0^2}$	релација	$F_{0.95}(1,12)$
1	0.2551	<	4.7472
2	1.0357	<	4.7472
3	0.0758	<	4.7472
4	2.2418	<	4.7472
6	8.3877	>	4.7472
7	1.8464	<	4.7472
8	0.0003	<	4.7472
9	0.4775	<	4.7472
10	1.7740	<	4.7472
11	0.9002	<	4.7472
12	0.2385	<	4.7472

Закључак: Завршно тестирање указује на помереност и тачке 6. Неопходно је поново спровести цео процес откривања и локализације могућих деформација.

3. итерација: Трансформација $\mathbf{d}^{(2)}$ и $\mathbf{Q}_d^{(2)}$ у нову рачунску базу преко нове матрице трансформације $\mathbf{S}^{(2)}$, без сумњивих тачака 5 и 6:

$$\mathbf{d}^{(2)} = \begin{bmatrix} -1.81 \\ -3.01 \\ -0.98 \\ 3.67 \\ -5.42 \\ -0.04 \\ -1.84 \\ -3.15 \\ 3.15 \\ 1.78 \end{bmatrix} \quad \mathbf{d}^{(3)} = \mathbf{S}^{(2)} \cdot \mathbf{d}^{(2)} = \begin{bmatrix} -1.04 \\ -2.25 \\ -0.22 \\ 4.44 \\ -4.65 \\ 0.72 \\ -1.07 \\ -2.39 \\ 3.92 \\ 2.55 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_d^{(3)}(\text{diag}) = \mathbf{S}^{(2)} \cdot \mathbf{Q}_d^{(2)} \cdot \mathbf{S}^{(2)T} = \begin{bmatrix} 14.1092 \\ 10.2079 \\ 12.5497 \\ 7.3057 \\ 18.2807 \\ 10.5568 \\ 9.1581 \\ 6.8271 \\ 12.5195 \\ 15.3688 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad Q_d^{(3)+}(\text{diag}) = \begin{bmatrix} 0.0745 \\ 0.1102 \\ 0.0752 \\ 0.1568 \\ 0.0597 \\ 0.1251 \\ 0.1367 \\ 0.1737 \\ 0.0794 \\ 0.0715 \end{bmatrix}$$

Тест статистика подударности групе тачака:

$$T^{(3)} = \frac{d^{(3)T} Q_d^{(3)+} d^{(3)}}{h\hat{\sigma}_0^2} = 1.0711 < F_{0.95}(h, f) = 2.7964 \quad (h = 9, f = 12)$$

Закључак: Преостала група тачака је компактна. тј. нема сумње на помереност преосталих тачака.

Пошто је $T < F$, врши се завршно тестирање померања појединачних тачака.

Завршно тестирање померања појединачних тачака:

ТАЧКА (j)	$T_j = \frac{(d_j^{(3)})^T (Q_{dj}^{(3)})^{-1} d_j^{(3)}}{h\hat{\sigma}_0^2}$	релација	$F_{0.95}(1,12)$
1	0.0827	<	4.7472
2	0.5654	<	4.7472
3	0.0036	<	4.7472
4	3.1365	<	4.7472
7	1.3140	<	4.7472
8	0.0658	<	4.7472
9	0.1605	<	4.7472
10	1.0050	<	4.7472
11	1.2382	<	4.7472
12	0.4720	<	4.7472

Закључак: Преостала група тачака је компактна. тј. нема сумње на помереност преосталих тачака. И може се закључити да је и метода подударности показала да су тачке 5 и 6 померене и оне се сматају тачкама на објекту. Сада је неопходно извршити ново изравнање мреже са датумом дефинисаним минималним трагом на делу тачака које нису померене (све сем тачака 5 и 6).

ПРИМЕР 5.8-2: На основу података мерења дужина у 2Д мрежи у две независне епохе. испитати помереност тачака

Тачка	Приближне координате тачака (m)	
	Y	X
1	300.0000	210.0000
2	560.0000	130.0000
3	850.0000	220.0000
4	160.0000	480.0000
5	950.0000	460.0000

У табели су приказане вредности мерених дужина

План мерења	Вредности срачунате из приближних координата	ЕПОХА 0	ЕПОХА 1
	Дужина (m)	Дужина (m)	Дужина (m)
1 - 5	696.4194	696.4155	696.4203
1 - 4	304.1381	304.1405	304.1383
1 - 2	272.0294	272.0317	272.0308
2 - 5	510.8816	510.8839	510.8712
2 - 4	531.5073	531.5094	531.5100
3 - 2	303.6445	303.6461	303.6297
3 - 1	550.0909	550.0942	550.0919
3 - 5	260.0000	259.9980	260.0003
4 - 3	737.3602	737.3625	737.3603
5 - 4	790.2531	790.2501	790.2600
	Дирекц. правци	Правци	Правци
2 - 1	287 06 10	359 59 56	359 59 59
2 - 3	72 45 31	145 39 22	145 39 31
2 - 4	311 11 09	24 05 00	24 05 04
2 - 5	49 45 49	122 39 41	122 39 53

Ради тестирања хомогености тачности мерења двеју епоха, потребно је најпре спровести одвојено изравнање по методи посредног изравнања са датумом дефинисаним минималним трагом на свим тачкама мреже. При том се усваја да мерења нису корелисана.

Усвајено: $\sigma_p = 3$, $\sigma_i = \sqrt{(3\text{mm})^2 + (3 \cdot D_i [\text{km}])^2}$ и $\sigma_0 = 1$.

Функционални модел гласи: $\mathbf{I}_i + \hat{\mathbf{v}}_i = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_i$, $i = 0, 1$ док је стохастички $E(v) = 0$ са $K_{ii} = \sigma^2$, $Q_{ii} = \sigma^2 P^{-1}$.

Посредно изравнање Епохе 0:

- број мерења $n = 14$
- број непознатих $u = 11$
- број степени слободе $f_0 = 6$

Тачка	Y [m]	X [m]	dy [mm]	dx [mm]	sy [mm]	sx [mm]
1	299.9991	209.9982	-0.92	-1.79	1.20	1.49
2	560.0002	129.9997	0.21	-0.34	1.05	1.34
3	850.0024	219.9996	2.36	-0.39	1.23	1.42
4	160.0006	480.0022	0.62	2.19	1.42	1.21
5	949.9977	460.0003	-2.27	0.33	1.43	1.20

Оцена стандардног одступања $\hat{\sigma}_{0,0} = \sqrt{\frac{\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}}}{\mathbf{f}_0}} = 0.754$

Глобални тест модела: Но : $\mathbf{E}|\hat{\sigma}_{0,0}^2| = \sigma^2$ против На : $\mathbf{E}|\hat{\sigma}_{0,0}^2| \neq \sigma^2$

$$T = \sigma_0^2 / \hat{\sigma}_{0,0}^2 \sim F(\infty, n-u+d)$$

$$T = 1.761 < 3.669$$

Закључак: Модел је адекватан и не постоји основана сумња у присутност грубих грешака.

Посредно изравнање Епохе 1:

- број мерења $n = 14$
- број непознатих $u = 11$
- број степени слободе $f_1 = 6$

Тачка	Y [m]	X [m]	dy [mm]	dx [mm]	sy [mm]	sx [mm]
1	299.9991	209.9989	-0.92	-1.08	1.38	1.71
2	560.0064	130.0070	6.36	7.04	1.21	1.54
3	849.9966	219.9981	-3.40	-1.86	1.42	1.64
4	159.9964	479.9991	-3.56	-0.93	1.63	1.39
5	950.0015	459.9968	1.52	-3.17	1.64	1.38

Оцена стандардног одступања $\hat{\sigma}_{0,1} = \sqrt{\frac{\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}}}{\mathbf{f}_1}} = 0.866$

Глобални тест модела: Но : $\mathbf{E}|\hat{\sigma}_{0,1}^2| = \sigma^2$ против На : $\mathbf{E}|\hat{\sigma}_{0,1}^2| \neq \sigma^2$

$$T = \sigma_0^2 / \hat{\sigma}_{0,1}^2 \sim F(\infty, n-u+d)$$

$$T = 1.333 < 3.669$$

Закључак: Модел је адекватан и не постоји основана сумња у присутност грубих грешака

Коначно. тест хомогености мерења подразумева:

$$H_0 : E|\sigma_{0,0}^2| = E|\sigma_{0,1}^2| = \sigma_0^2$$

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{f}_0 \cdot \hat{\sigma}_{0,0}^2 + \mathbf{f}_1 \cdot \hat{\sigma}_{0,1}^2}{\mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_1}} = 0.812$$

$$F = \frac{\hat{\sigma}_{0,1}^2}{\hat{\sigma}_{0,0}^2} = 1.320 < F_{0.95}(\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1) = 4.284$$

Дакле, мерења у две епохе су хомогена.

1. метода – Робусна метода (2Д мрежа):

Овде ће бити описана метода трансформације сличности фигура са итеративним поступком промене тежина (IWST).

Дефинитивне координате тачака из одвојеног изравнања две епохе

тачка	Епоха 0		Епоха 1	
	Y (m)	X (m)	Y (m)	X (m)
1	299.9991	209.9982	299.9991	209.9989
2	560.0002	129.9997	560.0064	130.0070
3	850.0024	219.9996	849.9966	219.9981
4	160.0006	480.0022	159.9964	479.9991
5	949.9977	460.0003	950.0015	459.9968

Вектор померања тачака (разлика дефинитивних координата тачака из две епохе):

$$\mathbf{d}[\text{mm}] = \begin{bmatrix} \hat{Y}_{1,1} - \hat{Y}_{1,0} \\ \hat{X}_{1,1} - \hat{X}_{1,0} \\ \hat{Y}_{2,1} - \hat{Y}_{2,0} \\ \hat{X}_{2,1} - \hat{X}_{2,0} \\ \hat{Y}_{3,1} - \hat{Y}_{3,0} \\ \hat{X}_{3,1} - \hat{X}_{3,0} \\ \hat{Y}_{4,1} - \hat{Y}_{4,0} \\ \hat{X}_{4,1} - \hat{X}_{4,0} \\ \hat{Y}_{5,1} - \hat{Y}_{5,0} \\ \hat{X}_{5,1} - \hat{X}_{5,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.71 \\ 0.00 \\ 7.38 \\ 6.15 \\ -1.47 \\ -5.76 \\ -3.11 \\ -4.18 \\ -3.50 \\ 3.79 \end{bmatrix}$$

Стандардна одступања померања тачака:

$$s_{d_{y_1}} = \sqrt{s_{y_{1,0}}^2 + s_{y_{1,1}}^2} = 1.83 \quad s_{d_{x_1}} = \sqrt{s_{x_{1,0}}^2 + s_{x_{1,1}}^2} = 2.27$$

$$\begin{aligned}
s_{d_{y_2}} &= \sqrt{s_{y_{2,0}}^2 + s_{y_{2,1}}^2} = 1.60 & s_{d_{x_2}} &= \sqrt{s_{x_{2,0}}^2 + s_{x_{2,1}}^2} = 2.04 \\
s_{d_{y_3}} &= \sqrt{s_{y_{3,0}}^2 + s_{y_{3,1}}^2} = 1.88 & s_{d_{x_3}} &= \sqrt{s_{x_{3,0}}^2 + s_{x_{3,1}}^2} = 2.17 \\
s_{d_{y_4}} &= \sqrt{s_{y_{4,0}}^2 + s_{y_{4,1}}^2} = 2.16 & s_{d_{x_4}} &= \sqrt{s_{x_{4,0}}^2 + s_{x_{4,1}}^2} = 1.85 \\
s_{d_{y_5}} &= \sqrt{s_{y_{5,0}}^2 + s_{y_{5,1}}^2} = 2.18 & s_{d_{x_5}} &= \sqrt{s_{x_{5,0}}^2 + s_{x_{5,1}}^2} = 1.84
\end{aligned}$$

1. итерација:

Пошто је изравнање мреже у обе епохе извршено минималним трагом на свим тачкама мреже и како су тачке мреже у обе епохе идентичне, у првој итерацији се усваја $\mathbf{W} = \mathbf{I}$. Дозвољена разлика између $d^{(k+1)}$ и d^k се, као и у претходном примеру, бира искуствено.

S – трансформација: $\mathbf{S} = [\mathbf{I} - \mathbf{G}(\mathbf{G}^T \mathbf{W}^k \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{W}^k]$ где је:

$$\mathbf{G}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ y_1^0 & -x_1^0 & y_2^0 & -x_2^0 & \dots & y_m^0 & -x_m^0 \\ x_1^0 & y_1^0 & x_2^0 & y_2^0 & \dots & x_m^0 & y_m^0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -264000 \\ 0 & 1 & 90000 \\ 1 & 0 & -4000 \\ 0 & 1 & 170000 \\ 1 & 0 & 286000 \\ 0 & 1 & 80000 \\ 1 & 0 & -404000 \\ 0 & 1 & -180000 \\ 1 & 0 & 386000 \\ 0 & 1 & -160000 \end{bmatrix} \quad \mathbf{I}(\text{diag}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{W} = \mathbf{I}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0.677 & 0.042 & -0.202 & 0.079 & -0.066 & 0.037 & -0.389 & -0.084 & -0.020 & -0.075 \\ 0.042 & 0.786 & 0.001 & -0.227 & -0.046 & -0.213 & 0.064 & -0.171 & -0.061 & -0.175 \\ -0.202 & 0.001 & 0.800 & 0.001 & -0.198 & 0.001 & -0.203 & -0.001 & -0.197 & -0.001 \\ 0.079 & -0.227 & 0.001 & 0.749 & -0.086 & -0.224 & 0.122 & -0.146 & -0.116 & -0.152 \\ -0.066 & -0.046 & -0.198 & -0.086 & 0.655 & -0.040 & 0.004 & 0.091 & -0.395 & 0.081 \\ 0.037 & -0.213 & 0.001 & -0.224 & -0.040 & 0.789 & 0.057 & -0.175 & -0.055 & -0.177 \\ -0.389 & 0.064 & -0.203 & 0.122 & 0.004 & 0.057 & 0.511 & -0.129 & 0.076 & -0.114 \\ -0.084 & -0.171 & -0.001 & -0.146 & 0.091 & -0.175 & -0.129 & 0.743 & 0.123 & -0.251 \\ -0.020 & -0.061 & -0.197 & -0.116 & -0.395 & -0.055 & 0.076 & 0.123 & 0.536 & 0.109 \\ -0.075 & 0.175 & -0.001 & -0.152 & 0.081 & -0.177 & -0.114 & -0.251 & 0.109 & 0.755 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}^{(1)} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0.71 \\ 0.00 \\ 7.38 \\ 6.15 \\ -1.47 \\ -5.76 \\ -3.11 \\ -4.18 \\ -3.50 \\ 3.79 \end{bmatrix} \quad |\mathbf{d}^{(1)} - \mathbf{d}| = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$$

Самим тим што је за све вредности $|\mathbf{d}^{(1)} - \mathbf{d}| = 0$, ово је и последња итерација. У случају да ове вредности нису довољно мале, дијагонална матрица $\mathbf{W}$ би се у

следећој итерацији формирала применом формуле $\mathbf{W}^{(k)} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{|\mathbf{d}_i^{(k)}|} \right\}$.

Провера стабилности појединачних тачака:

Тачка (j)	$T_j = \frac{(\mathbf{d}_j^{(1)})^T (\mathbf{Q}_{d_j}^{(1)})^{-1} \mathbf{d}_j^{(1)}}{2\hat{\sigma}_0^2}$	Релација	$F_{0.95}(2,12)$
1	0.0272	<	3.8853
2	8.6686	>	3.8853
3	3.5944	<	3.8853
4	0.8419	<	3.8853
5	0.8097	<	3.8853

Закључак: Робусна метода је показала да је померена тачка 2.

2. метода – Метода подударности (2Д мрежа):

1. итерација: Трансформација d и Q_d у нову рачунску базу:

$S = I - G(G^T W G)^{-1} G^T W$, где су I и W јединичне матрице

$$S = \begin{bmatrix} 0.677 & 0.042 & -0.202 & 0.079 & -0.066 & 0.037 & -0.389 & -0.084 & -0.020 & -0.075 \\ 0.042 & 0.786 & 0.001 & -0.227 & -0.046 & -0.213 & 0.064 & -0.171 & -0.061 & -0.175 \\ -0.202 & 0.001 & 0.800 & 0.001 & -0.198 & 0.001 & -0.203 & -0.001 & -0.197 & -0.001 \\ 0.079 & -0.227 & 0.001 & 0.749 & -0.086 & -0.224 & 0.122 & -0.146 & -0.116 & -0.152 \\ -0.066 & -0.046 & -0.198 & -0.086 & 0.655 & -0.040 & 0.004 & 0.091 & -0.395 & 0.081 \\ 0.037 & -0.213 & 0.001 & -0.224 & -0.040 & 0.789 & 0.057 & -0.175 & -0.055 & -0.177 \\ -0.389 & 0.064 & -0.203 & 0.122 & 0.004 & 0.057 & 0.511 & -0.129 & 0.076 & -0.114 \\ -0.084 & -0.171 & -0.001 & -0.146 & 0.091 & -0.175 & -0.129 & 0.743 & 0.123 & -0.251 \\ -0.020 & -0.061 & -0.197 & -0.116 & -0.395 & -0.055 & 0.076 & 0.123 & 0.536 & 0.109 \\ -0.075 & 0.175 & -0.001 & -0.152 & 0.081 & -0.177 & -0.114 & -0.251 & 0.109 & 0.755 \end{bmatrix}$$

$$d = \begin{bmatrix} 0.71 \\ 0.00 \\ 7.38 \\ 6.15 \\ -1.47 \\ -5.76 \\ -3.11 \\ -4.18 \\ -3.50 \\ 3.79 \end{bmatrix} \quad d^{(1)} = S \cdot d = \begin{bmatrix} 0.71 \\ 0.00 \\ 7.38 \\ 6.15 \\ -1.47 \\ -5.76 \\ -3.11 \\ -4.18 \\ -3.50 \\ 3.79 \end{bmatrix} \quad Q_d^{(1)}(\text{diag}) = S \cdot Q_d \cdot S^T = \begin{bmatrix} 7.8234 \\ 5.0615 \\ 6.3356 \\ 3.9051 \\ 7.1342 \\ 5.3652 \\ 5.1729 \\ 7.1117 \\ 5.1120 \\ 7.2057 \end{bmatrix}$$

Пошто је матрица $Q_d^{(1)}$ сингуларна, одређује се њена псеудоинверзија

$Q_{d_1}^{(1)+} = (Q_{d_1}^{(1)} + GG^T)^{-1} - G(G^T GG^T G)^{-1} G^T$, где је:

$$Q_{d_1}^{(1)+}(\text{diag}) = \begin{bmatrix} 0.0713 \\ 0.1353 \\ 0.1086 \\ 0.1440 \\ 0.0708 \\ 0.1299 \\ 0.0669 \\ 0.1037 \\ 0.0715 \\ 0.1030 \end{bmatrix}$$

Тест статистика подударности групе тачака:

$$T^{(1)} = \frac{\mathbf{d}^{(1)T} \mathbf{Q}_d^{(1)+} \mathbf{d}^{(1)}}{h\hat{\sigma}_0^2} = 4.9698 > F_{0.95}(h, f) = 2.9133$$

$$(h = 2n - d = 10 - 3 = 7, f = 12)$$

Закључак: Група тачака није компактна.

Пошто је $T > F$, врши се локализација нестабилних тачака.

ТАЧКА (j)	$T_j = \frac{(\mathbf{d}_j^{(2)})^T (\mathbf{Q}_{dj}^{(2)})^{-1} \mathbf{d}_j^{(2)}}{2\hat{\sigma}_0^2}$	Релација	$F_{0.95}(2, 12)$
1	0.0272	<	3.8853
2	8.6686	>	3.8853
3	3.5944	<	3.8853
4	0.8419	<	3.8853
6	0.8097	>	3.8853

Пошто T_2 (највише одступа) указује на помереност тачке 2, па се поново врши трансформација у нову рачунску базу преосталих тачака.

2. итерација:

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -265000 \\ 0 & 1 & -552500 \\ 1 & 0 & 285000 \\ 0 & 1 & -562500 \\ 1 & 0 & -405000 \\ 0 & 1 & -822500 \\ 1 & 0 & 385000 \\ 0 & 1 & -802500 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.617 & 0.066 & -0.107 & 0.061 & -0.453 & -0.069 & -0.057 & -0.059 \\ 0.066 & 0.717 & -0.071 & -0.281 & 0.101 & -0.216 & -0.096 & -0.221 \\ -0.107 & -0.071 & 0.596 & -0.066 & -0.032 & 0.074 & -0.457 & 0.063 \\ 0.061 & -0.281 & -0.066 & 0.722 & 0.094 & -0.218 & -0.089 & -0.223 \\ -0.453 & 0.101 & -0.032 & 0.094 & 0.440 & -0.105 & 0.045 & -0.090 \\ -0.069 & -0.216 & 0.074 & -0.218 & -0.105 & 0.714 & 0.100 & -0.281 \\ -0.057 & -0.096 & -0.457 & -0.089 & 0.045 & 0.100 & 0.470 & 0.086 \\ -0.059 & -0.221 & 0.063 & -0.223 & -0.090 & -0.281 & 0.086 & 0.724 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.71 \\ 0.00 \\ -1.47 \\ -5.76 \\ -3.11 \\ -4.18 \\ -3.50 \\ 3.79 \end{bmatrix} \quad \mathbf{d}^{(2)} = \mathbf{S}^{(1)} \cdot \mathbf{d}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.92 \\ 1.85 \\ 1.06 \\ -3.93 \\ -2.24 \\ -2.97 \\ -0.73 \\ 5.04 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_d^{(2)}(\text{diag}) = \mathbf{S}^{(1)} \cdot \mathbf{Q}_d^{(1)} \cdot \mathbf{S}^{(1)T} = \begin{bmatrix} 7.8626 \\ 4.7856 \\ 6.8731 \\ 5.0994 \\ 4.2473 \\ 6.9124 \\ 4.3277 \\ 6.9845 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_d^{(2)+}(\text{diag}) = \begin{bmatrix} 0.0599 \\ 0.1201 \\ 0.0621 \\ 0.1153 \\ 0.0595 \\ 0.0966 \\ 0.0638 \\ 0.0957 \end{bmatrix}$$

Тест статистика подударности групе тачака:

$$T^{(2)} = \frac{\mathbf{d}^{(2)T} \mathbf{Q}_d^{(2)+} \mathbf{d}^{(2)}}{h \hat{\sigma}_0^2} = 1.7581 < F_{0.95}(h, f) = 3.1059 \quad (h = 5, f = 12)$$

Закључак: Преостала група тачака је компактна, тј. нема сумње на помереност преосталих тачака.

Пошто је $T < F$, врши се завршно тестирање померања појединачних тачака:

ТАЧКА (j)	$T_j = \frac{(\mathbf{d}_j^{(3)})^T (\mathbf{Q}_{dj}^{(3)})^{-1} \mathbf{d}_j^{(3)}}{2\hat{\sigma}_0^2}$	Релација	$F_{0.95}(2, 12)$
1	0.1729	<	3.8853
3	0.5351	<	3.8853
4	0.1695	<	3.8853
5	0.6566	<	3.8853

Закључак: Дакле, и ова метода указује на помереност тачке 2.

6. ОТКРИВАЊЕ РЕЗУЛТАТА МЕРЕЊА КОЈИ НЕ ПРИПАДАЈУ ОЧЕКИВАНОМ СКУПУ – OUTLIER DETECTION

У класичној теорији грешака, према врсти утицаја грешке се деле на: случајне, систематске и грубе. Случајне грешке су неизбежне, обично су по величини мале и представљају разлику између опажања и њихових очекиваних вредности. Не могу се прогнозировать али се понашају у складу са одређеним статистичким претпоставкама. Једино је могуће моделовати неко њихово просечно понашање, док појединачну вредност није могуће изразити математичком једначином. У геодетским оценама и процедурама тестирања генерално се претпоставља да случајне грешке следе закон нормалне расподеле.

Систематска грешка се дефинише као разлика одабраног и стварног функционалног модела. Типични примери ове врсте односе се на неадекватну редукцију мерења због непотпуног моделовања утицаја рефракције, константи инструмента, грешака пројекције и изостављања пратећих параметара. Теоријски, систематске грешке се могу избећи адекватним математичким моделовањем, и то на два начина:

- ако је систематска грешка резултат неадекватног функционалног модела неопходно је исти потпуније дефинисати, и
- ако је систематска грешка резултат неадекватног стохастичког модела неопходно је узети у обзир корелацију или користити мешовите моделе (фиксни и случајни параметри).

Грубе грешке су резултат неисправности инструмента или грешке оператора. Типични примери ове врсте су: погрешно читавање, неисправност инструмента, лоше напајање или екстремни услови рада. Теоријски, грубе грешке се могу избећи строгим поштовањем процедуре и открити пажљивим планирањем мерења.

Анализа понашања грешака јесте кључна са аспекта разумевања модела изравнања, али од мале користи у дефинисању стратегије откривања грубих грешака у ГММ. Разлог за то лежи у немогућности јасног класификовања грешака. Процедура оцене дефинише резидуале (поправке, *residuals*) које у себи садрже мешавину различитих типова грешака. Да би ипак дошли до одређених сазнања о појави грубих грешака, нужно је увести одређене претпоставке у вези стохастичких својстава резидуала. У том смислу, под резултатом који одскаче у односу на друге резултате (*outlier*) третира се резидуал која према одређеним правилима одступа од неке претпоставке.

Наведена дефиниција резултата који одскаче одговара стратегији теста и чисто статистичком концепту, али је релативна у односу на ниво одабраног ризика, претпостављени распоред и тест процедуру. Упркос фундаменталној разлици између дефиниције одскачућег резултата и грубих грешака, природно је очекивати да је одскачући резултат последица појаве грубих грешака. Након откривања одскачућег резултата, неопходно је проверити опажања не би ли се открио узрок. Уколико није детектован узрок грубе грешке, одговарајуће опажање се одбацује и по потреби понавља. Откривање одскачућих резултата засновано је на примени Гаус-Марковљевог модела. Први корак јесте примена глобалног теста модела.

6.1. Глобални тест модела

Како је већ у поглављу 2.9 дефинисано, а као увод у следећа разматрања, глобални тест модела у основи анализира ГММ:

$$\begin{aligned} \mathbf{l} + \mathbf{v} &= \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} & \mathbf{K}_1 &= \sigma_0^2 \mathbf{Q}_1 & \mathbf{P} &= \mathbf{Q}_1^{-1} \\ (\mathbf{A}) &= \mathbf{n} \times \mathbf{u}, & \mathbf{r}(\mathbf{A}) &= \mathbf{r} \leq \mathbf{u}, & \mathbf{N} &= \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \end{aligned} \quad (6.1-1)$$

Оцене од $\mathbf{x}$ по МНК методи зависе од избора геодетског датума (види поглавље 3) и добијају се на основу израза:

$$\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} \quad \mathbf{Q}_{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{N} (\mathbf{N}^{-1})^T, \quad (6.1-2)$$

где је $\mathbf{N}^{-1}$ било која $\mathbf{g}$ инверзија од $\mathbf{N}$, а оцена референтне варијансе је непомерена и гласи:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} &= \mathbf{l}^T \mathbf{P} \mathbf{Q}_v \mathbf{P} \mathbf{Q}_v \mathbf{P} \mathbf{l} \\ s_0^2 &= \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{\mathbf{n} - \mathbf{u}} \quad \text{са} \quad \mathbf{f} = \mathbf{n} - \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (6.1-3)$$

С обзиром да тестови почивају на статистичким расподелама, мора се увести одговарајући стохастички концепт. Уобичајена је претпоставка да се опажања померавају нормалном распореду, тј.

$$\mathbf{l} \sim \mathbf{N}(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{K}_1), \quad (6.1-4)$$

$$\mathbf{v} \sim \mathbf{N}(0, \sigma_0^2 \mathbf{Q}_v), \quad (6.1-5)$$

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} \sim \sigma_0^2 \chi_f^2. \quad (6.1-6)$$

Глобални тест модела почива на поређењу *a постериори* фактора варијансе (дисперзије) s_0^2 и σ_0^2 , тј. хипотеза H_0 гласи:

H_0 : Модел је адекватан - претпоставка о расподели је коректна.

Тест адекватности гласи:

$$T = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{\sigma_0^2} = \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{s}_0^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_f^2.$$

Уколико је $\chi_{1-\alpha/2;f}^2 \leq T \leq \chi_{\alpha/2;f}^2$, нема основа за одбацивање нулте хипотезе.

6.2. Моделовање грешака опажања

Уколико глобални тест модела укаже на контрадикторност постављеног модела и реалности која почива на стварним резултатима мерења и уколико је то последица неадекватног функционалног модела, да би се проблем адекватно сагледао, неопходно је опажањима додати вектор Δ , тј.

$$\bar{\mathbf{I}} = \mathbf{I} + \Delta, \quad (6.2-1)$$

што ће модел довести у сагласност са реалношћу. У том случају оцене у ГММ се добијају на основу следећих израза:

$$\hat{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^- \mathbf{A}^T \mathbf{P} (\mathbf{I} + \Delta) = \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{N}^- \mathbf{A}^T \mathbf{P} \Delta, \quad (6.2-2)$$

$$\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v} - \mathbf{Q}_v \mathbf{P} \Delta, \quad (6.2-3)$$

$$\bar{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} + \Delta^T \mathbf{P} \mathbf{Q}_v \mathbf{P} \mathbf{Q}_v \mathbf{P} \Delta - 2 \Delta^T \mathbf{P} \mathbf{Q}_v \mathbf{P} \mathbf{v}. \quad (6.2-4)$$

Ако је:

$$\mathbf{P} \mathbf{Q}_v \cdot \mathbf{P} \mathbf{Q}_v = \mathbf{P} \mathbf{Q}_v, \quad \mathbf{E}(\bar{\mathbf{v}}) = 0, \quad \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = 0,$$

и уз претпоставку да су $\bar{\mathbf{v}}$ и Δ независни, након замене $\mathbf{v}$ са $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{Q}_v \mathbf{P} \Delta$ добија се израз (6.2-4), тј.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{v}} &= \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} + \Delta^T \mathbf{P} \mathbf{Q}_v \mathbf{P} \mathbf{Q}_v \mathbf{P} \Delta - 2 \Delta^T \mathbf{P} \mathbf{Q}_v \mathbf{P} \bar{\mathbf{v}} \\ \mathbf{E}(\bar{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{v}}) &= \mathbf{E}(\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}) - \mathbf{E}(\Delta^T \mathbf{P} \mathbf{Q}_v \mathbf{P} \Delta) \\ \sigma_0^2 &= \mathbf{E}(s_0^2) - \mathbf{E}(\Delta^T \mathbf{P} \mathbf{Q}_v \mathbf{P} \Delta) / f \end{aligned} \quad (6.2-5)$$

Очекивана вредност од s_0^2 , тј. фактор варијансе срачунат на основу некоректног модела, увек је већи или једнак правој вредности варијансе σ_0^2 где једнакост важи када је:

$$\Delta = 0 \text{ или } \mathbf{Q}_v \mathbf{P} \Delta = 0,$$

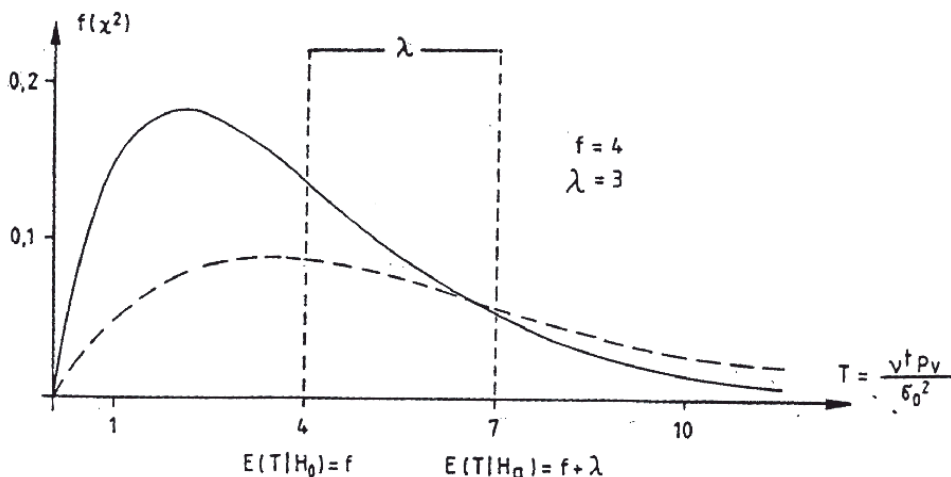
тј. однос очекиване и праве вредности варијансе дат је изразом:

$$\mathbf{E}(s_0^2) \geq \sigma_0^2 \quad \text{за } \forall \Delta \in \mathbf{IR}^n. \quad (6.-2-6)$$

Случај $\mathbf{Q}_v \mathbf{P} \Delta = 0$ појављује се уколико Δ припада нултом простору од $\mathbf{Q}_v \mathbf{P} = (\mathbf{I} - \mathbf{A} \mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T \mathbf{P})$, тј. ако је $\Delta = \mathbf{A} \mathbf{g}$, за било који вектор $\mathbf{g}$. Глобални тест модела не може открити све грешке у функционалном моделу. Он не може доказати ни да је примењени модел најбољи модел. Уколико се претпостави да Δ постоји, тада квадратна форма $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} / \sigma_0^2$ има нецентралну χ^2 расподелу са $\mathbf{f} = \mathbf{n} - \mathbf{r}$ степени слободе и параметром нецентралности λ :

$$\mathbf{H}_a : \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{\sigma_0^2} \sim \chi_{f, \lambda}^2 \quad (6.2-7)$$

$$\lambda = \frac{\Delta^T \mathbf{P} \mathbf{Q}_v \mathbf{P} \Delta}{\sigma_0^2}. \quad (6.2-8)$$



Слика 6.1 : Функција густине $f(\chi^2)$ у случају хипотезе $\mathbf{H}_0$ и $\mathbf{H}_a$ за f степени слободе (пуна линија: централна χ^2 расподела при $f = 4$ и $\lambda = 0$; испрекидана линија: нецентрална χ^2 расподела при $f = 4$ и $\lambda = 3$)

6.3. Конвенционалне алтернативне хипотезе

Избор конвенционалне алтернативне хипотезе врши се из већег броја могућих решења. Конвенционално, алтернативна хипотеза јесте једини случај за који је одговарајући али једноставан статистички концепт установљен.

H_a : Једно опажање изазвало је одбацивање H_0 .i

У том случају вектор Δ има следећи облик:

$$\Delta = \mathbf{e}_i \Delta_i, \quad (6.3-1)$$

уколико се разматра i -то опажање. i -ти јединични вектор (вектор са 1 на i -том положају, док су остали чланови 0) као и константна груба грешка опажања $\mathbf{l}_i$ означавају се са $\mathbf{e}_i$ и Δ_i . Тада (6.2-1) постаје :

$$\bar{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \Delta = \mathbf{l} + \mathbf{e}_i \Delta_i \quad (6.3-2)$$

где су:

$\bar{\mathbf{l}} = (\bar{l}_1, \bar{l}_2, \dots, \bar{l}_i, \dots, \bar{l}_n)^T$ - коректна опажања,
 $\bar{\mathbf{l}} = (\bar{l}_1, \bar{l}_2, \dots, \bar{l}_i - \Delta_i, \dots, \bar{l}_n)^T$ - груба грешка Δ_i у $\mathbf{l}_i$,
 $\mathbf{e}_i \Delta_i = (0, 0, \dots, \Delta_i, \dots, 0)^T$ - резидуал од $\mathbf{l}_i$.

Уколико се примене опште једначине (6.2-2), (6.2-3) и (6.2-4) и усвоји претпоставка да важи H_a , добијају се следећи изрази:

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{N}^+ \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{e}_i \Delta_i = \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{N}^+ \mathbf{a}_i \mathbf{p}_i \Delta_i, \quad (6.3-3)$$

где је $\mathbf{a}_i$ i -та колона од $\mathbf{A}^T$, а $\mathbf{p}_i$ тежина од $\mathbf{l}_i$ заснована на уобичајеном стохастичком моделу:

$$\mathbf{P} = \text{diag}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_i, \dots, \mathbf{p}_n).$$

Вектор резидуала изгледа:

$$\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v} - \mathbf{Q}_v \mathbf{P} \mathbf{e}_i \Delta_i = \mathbf{v} - \mathbf{q}_{vi} \mathbf{p}_i \Delta_i \quad (6.3-4)$$

где је $\mathbf{q}_{vi}$ i -та колона од $\mathbf{Q}_v$.

Израз (6.3-4) јасно показује разлог због чега је ташко открити грубу грешку. Наиме, цео вектор резидуала загађен је са Δ_i , а чак је могуће да ће ефекат од Δ_i на остале резидуале бити већи него на $\mathbf{v}_i$.

Квадратна форма $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$ се мења и гласи:

$$\bar{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} - \Delta_i^2 \mathbf{p}_i^2 \mathbf{q}_{v_i v_i} - 2 \Delta_i \mathbf{p}_i \mathbf{q}_{v_i}^T \bar{\mathbf{v}}_i \quad (6.3-5)$$

$$\sigma_0^2 = \mathbf{E}(\mathbf{s}_0^2) - \Delta_i^2 \mathbf{p}_i^2 \mathbf{q}_{v_i v_i} / \mathbf{f}$$

$$\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{\sigma_0^2} \sim \chi(\mathbf{f}, \lambda) \text{ са } \lambda_i = \frac{\Delta_i^2 \mathbf{p}_i^2 \mathbf{q}_{v_i v_i}}{\sigma_0^2} \quad (6.3-6)$$

где је $\mathbf{q}_{v_i v_i}$ дијагонални елемент од $\mathbf{Q}_v$ који се односи на $\mathbf{v}_i$. Груба грешка - Δ_i може се изразити као функција параметара нецентралности λ_i (6.3-6):

$$\Delta_i = \frac{\sigma_0}{\mathbf{p}_i} \sqrt{\frac{\lambda_i}{\mathbf{q}_{v_i v_i}}} \quad (6.3-7)$$

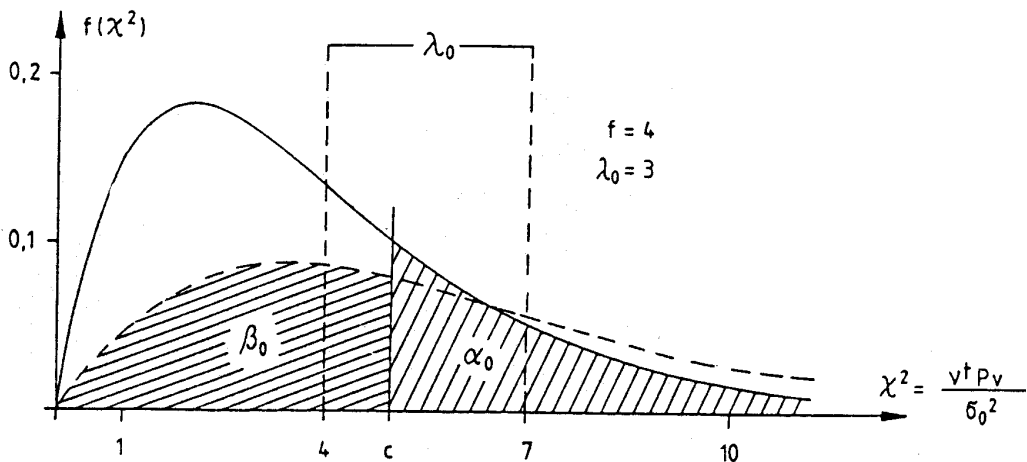
6.4. Метода откривања грубих грешака при познатој вредности фактора варијансе – Baarda's Data Snooping

Уколико се при тестирању резидуала, за $\alpha = \alpha_0$ фиксира грешка I врсте, а грешка II врсте за $\beta = \beta_0$ (види поглавље 5.3), тада параметар нецентралности λ од χ^2 распореда једино зависи од броја степени слободе $\mathbf{f}$. **Параметар нецентралности** може се одредити из таблица или номограма нецентралне χ^2 расподеле (види слику 6.4-2) и представља одступање очекиване вредности тест статистике, под условом да важи $\mathbf{H}_a$, од њој коресподентне критичне вредности $\chi_{\alpha_0}^2(\mathbf{f})$.

Другим речима, λ представља одступање очекиване вредности тест статистике од вредности коју би она требала достићи да би тестирана вредност резидуала премашила критичну вредност са вероватноћом $1 - \beta_0$. Ако означимо *граничну вредност* λ са λ_0 , тада се поменута вероватноћа дефинише као:

$$\mathbf{P}\{\chi^2(\mathbf{f}, \lambda_0) > \chi_{\alpha_0}^2(\mathbf{f})\} = 1 - \beta_0 \quad (6.4-1)$$

што се може илустровати следећим цртежом.



Слика 6.4-1: Централна и нецентрална χ^2 расподела за дато α_0 , β_0 и f

$$1 - \alpha_0 = \int_0^c f(\chi^2(f)) d\chi^2, \quad 1 - \beta_0 = \int_0^\infty f(\chi^2(f, \lambda_0)) d\chi^2, \quad c = \chi_{\alpha_0}^2(f) = \chi_{1-\beta_0}^2(f, \lambda_0)$$

Конвенционална алтернативна хипотеза претпоставља да постоји само једна груба грешка. Полазећи од λ_0 за $f = 1$, за свако опажање може се одредити критична вредност Δ_{0i} . Уколико груба грешка достигне вредност Δ_{0i} , тада је вероватноћа њеног откривања износи $1 - \beta_0$, док је вероватноћа одбацавања коректног опажања једнака α_0 . Критична вредност грешке рачуна се као:

$$\Delta_{0i} = \frac{\sigma_0}{p_i} \sqrt{\frac{\lambda_0}{q_{v_i v_i}}}. \quad (6.4-2)$$

и њен утицај на вектор резидуала изгледа:

$$\Delta v_0 = q_{v_i} p_i \Delta_{0i} = q_{v_i} \sigma_0 \sqrt{\frac{\lambda_0}{q_{v_i v_i}}}, \quad (6.4-3)$$

односно, појединачно:

$$\Delta v_{0i} = \sigma_0 \sqrt{\lambda_0 q_{v_i v_i}}. \quad (6.4-4)$$

Бардин тест претпоставља да се резидуали поковавају *нормаланој расподели* и да је σ_0 *познато*. Тест је заснован на *стандардизованим резидуалима*:

$$\mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{v}_i}{\sigma_{v_i}} = \frac{\mathbf{v}_i}{\sigma_0 \sqrt{\mathbf{q}_{v_i v_i}}} = \frac{\bar{\mathbf{v}}_i}{\sigma_0 \sqrt{\mathbf{q}_{v_i v_i}}} + \frac{\mathbf{p}_i \sqrt{\mathbf{q}_{v_i v_i}}}{\sigma_0} \Delta_i. \quad (6.4-5)$$

Израз (6.4-5) може се представити и као:

$$\mathbf{u}_i = \bar{\mathbf{u}}_i + \Delta \mathbf{u}_i,$$

са јасним одређењем оба члана са десне стране. Расподела од $\mathbf{u}_i$ дата је са:

$$\mathbf{u}_i | \mathbf{H}_0 \sim \mathbf{N}(0,1); \quad \mathbf{u}_i | \mathbf{H}_a \sim \mathbf{N}(\Delta \mathbf{u}_i, 1). \quad (6.4-6)$$

Критична вредност $\mathbf{u}_{\alpha_0}$ стандардизоване нормалне расподеле једино зависи од α_0 . Вредност ће бити премашена са вероватноћом $1 - \beta_0$ уколико се сходно једначини (6.4-2) појави груба грешка величине Δ_{0i} . Неке вредности $\sqrt{\lambda_0}$ за одабране нивое ризика α_0 , β_0 и $\mathbf{f} = 1$ (претпоставља се да постоји само једна груба грешка) дате су у табели 6.4-1.

Табела 6.4-1: Вредности $\sqrt{\lambda_0}$ за дате вредности α_0 , β_0 и $\mathbf{f} = 1$

β_0 [%]	α_0 [%]							
	0.001	0.005	0,01	0.05	0.1	1.0	2.5	5
10	5.6	5.3	5.2	4.8	4.6	3.9	3.5	3.2
20	5.3	4.9	4.7	4.3	4.1	3.4	3.1	2.8
30	4.9	4.6	4.3	4.0	3.8	3.1	2.8	2.5

Ради бољег разумевања начина функционисања *data snooping* процедуре, грубу грешку Δ_i изразићемо као производ стандардног одступања одговарајућег опажања, тј.

$$\Delta_i = \mathbf{k}_i \sigma_i = \frac{\mathbf{k}_i \sigma_0}{\sqrt{\mathbf{p}_i}}. \quad (6.4-7)$$

Узимајући у обзир (6.3-7) следи:

$$\mathbf{k}_i = \sqrt{\frac{\lambda_i}{\mathbf{p}_i \mathbf{q}_{v_i v_i}}},$$

тј. имајући у виду (6.4-2):

$$\mathbf{k}_{oi} = \sqrt{\frac{\lambda_0}{\mathbf{p}_i \mathbf{q}_{v_i v_i}}}; \quad \Delta_{oi} = \mathbf{k}_{oi} \sigma_i. \quad (6.4-8)$$

Да би била откривена са вероватноћом $1 - \beta_0$, груба грешка неког опажања мора достићи вредност $\mathbf{k}_{oi} \sigma_i$. Вредност $\mathbf{k}_{oi}$ зависи од $\sqrt{\lambda_0}$, тежине $\mathbf{p}_i$ и кофактора $\mathbf{q}_{v_i v_i}$ одговарајућег резидуала. Да би се откриле могућности ГММ у утврђивању присуства грубих грешака у резултатима мерења, све наведене вредности могуће је срачунати пре мерења, у фази планирања.

Ниво ризика α , $\mathbf{f}$ - димензионалног глобалног теста модела (поглавље 6.1) неопходно је **повезати** са вероватноћом грешке *I врсте* α_0 и вероватноћом грешке *II врсте* β_0 једнодимензионалног теста, тако да појава грубе грешке Δ_{oi} изазове одбацивање нулте хипотезе (теста) са вероватноћом $1 - \beta_0$. То се постиже коришћењем исте алтернативне хипотезе $\mathbf{H}_a$, односно избором истог параметра нецентралности у оба теста. Симболично, то изгледа овако:

$$\lambda_0 = \lambda(\alpha_0, \beta_0, 1) = \lambda(\alpha, \beta_0, \mathbf{f}). \quad (6.4-9)$$

Решење за α представља *вероватноћу грешке I врсте* глобалног теста модела. Уместо (6.4-9) за решење проблема могу се користити и одговарајући номограми. На слици 6.4-2 конструисан је номограм за $\beta_0 = 20\%$ (Baarda, 1968), где је $\lambda_0 = \lambda(\alpha_0, \beta_0 = 0.20, 1) = \lambda(\alpha, \beta_0 = 0.20, \mathbf{f})$.

ПРИМЕР 6.4-1: На основу података у номограму (слика 6.4-2) за $\alpha_0 = 0.001$ или ($\alpha_0 = 0.1\%$):

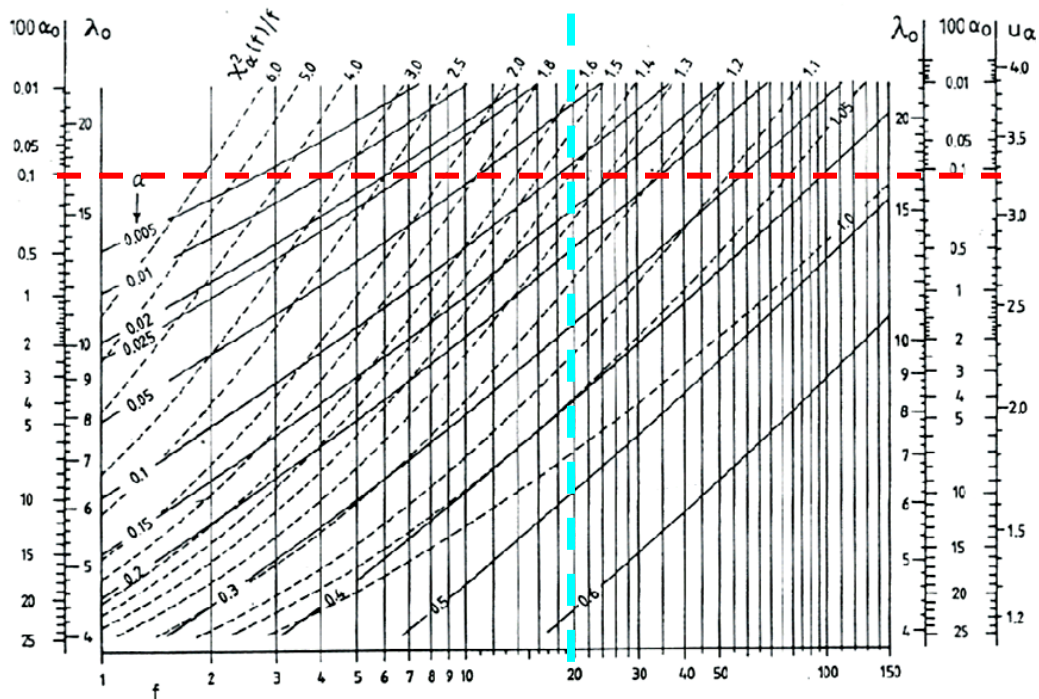
- а) одредити вредност параметра нецентралности λ_0 и критичну вредност тест статистике једнодимензионалног теста по методи *data snooping*,
- б) за дати број степени модела $\mathbf{f} = 20$, дефинисати ниво значајности α глобалног тест модела и критичну вредност тест статистике глобалног теста модела:

РЕШЕЊЕ:

- а) $100 = 3.29$ - црвена испрекидана линија
 - б) $100 = 0.1$
-

На основу 20. годишњег искуства у примени *data-snooping* (у Холандији *data-snooping* у катастру представља стандард), **Baarda** препоручује коришћење вредности $\beta_0 = 20\%$ и $\alpha_0 = 0.1\%$. Ниво ризика од $\alpha = 1\%$ коресподентан је наведеним вредностима за $\mathbf{f} = 20$. Ако се ради о већим мрежама препоручује

се подела на више делова одговарајуће величине, које погодују примени наведеног теста.



Слика 6.4-2: Номограм за одређивање λ_0 и u_{α_0} у функцији α_0 и α и $\chi^2_{\alpha}(f)$ као функција од α_0 и f , за $\beta_0 = 20\%$

6.5. Тау метода оцене грубих грешака – Pope's Tau Method

За разлику од *data snooping* процедуре, *Pope* је пошао од претпоставке да је σ_0^2 непознато. Сходно томе, *Pope*-ов приступ се заснива на *студентизованим резидуалима* облика:

$$\frac{\mathbf{v}_i}{s_{v_i}}.$$

Нажалост, $\mathbf{v}_i$ и s_{v_i} се обично одређују из истог скупа података, па су из тог разлога *статистички зависне* величине, што значи да се $\mathbf{t}$ расподела не може директно применити на статистику $\mathbf{v}_i/s_{v_i}$. Из тих разлога, уместо студентовог, користи се τ (тау) расподела са $\mathbf{f} = \mathbf{n} - \mathbf{r}$ степени слободе, а тест статистика гласи:

$$T_i = \frac{|\mathbf{v}_i|}{s_{v_i}} = \frac{|\mathbf{v}_i|}{s_0 \sqrt{\mathbf{q}_{v_i v_i}}} \sim \tau(\mathbf{f}). \quad (6.5-1)$$

Таблице τ расподеле није тако једноставно приказати као у случају $\mathbf{t}$ расподеле. У практичним применама препоручује се трансформисање τ променљиве у $\mathbf{t}$ променљиву и обрнуто, тј.

$$\tau(\mathbf{f}) = \frac{\sqrt{\mathbf{f}}}{\sqrt{\mathbf{f} - 1 + \mathbf{t}_{(\mathbf{f}-1)}^2}} \cdot \mathbf{t}_{(\mathbf{f}-1)}, \quad (6.5-2)$$

$$\mathbf{t}_{(\mathbf{f}-1)} = \sqrt{\frac{(\mathbf{f}-1)\tau_{(\mathbf{f})}^2}{\mathbf{f} - \tau_{(\mathbf{f})}^2}} \quad \text{за} \quad \tau^2 < \mathbf{f}, \quad (6.5-3)$$

након чега се отвара могућност коришћења $\mathbf{t}$ расподела. Нулта хипотеза τ теста претпоставља да сва опажања имају нормалну расподелу са $\mathbf{E}(\mathbf{l}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$, тако да се и МНК оцене резидуала поковавају закону нормалне расподеле и имају очекивање 0, тј.

$$\mathbf{H}_0 : \mathbf{E}(\mathbf{v}_i) = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, \mathbf{n}\} \quad (6.5-4)$$

Конвенционална алтернативна хипотеза гласи:

$\mathbf{H}_a$: *један резидуал је последица присуства грубе грешке.*

За вероватноћу грешке *I врсте* теста, који се састоји из $\mathbf{n}$ појединачних тестова, обично се бира $\alpha = 5\%$. Строго решење нивоа ризика α_0 од $\mathbf{n}$ једнодимензионалних тестова није могуће, јер су резидуали и тестови међусобно статистички зависни.

Приближна вредност α_0 , имајући у виду ову зависност, може се одредити као:

$$\alpha_0 \approx 1 - (1 - \alpha)^{1/\mathbf{n}}. \quad (6.5-5)$$

Хипотеза $\mathbf{H}_0$ се одбацује уколико важи следећи однос:

$$T_k > \tau_{\alpha_0/2}(\mathbf{f}), \quad (6.5-6)$$

који представља *двострани тест* (види поглавље 5). Опажање коресподентно тестираном резидуалу по дефиницији садржи грубу грешку и нужно је утврдити (ако је могуће) одакле она потиче.

Data snooping као и t метод тестирања засновани су на претпоставци да само **једно опажање** у ГММ садржи грубу грешку. Целокупна теорија губи смисао уколико су два или више опажања оптерећена grubим грешкама. Ако више тест статистика прелазе критичну вредност једнодимензионалног теста, у пракси се користи један прагматичан поступак који обично, али не и увек, даје коректне резултате. Опажање са највећом тест статистиком се одбацује, а изравнање преосталих **n-1** опажања се понавља, што води до рачунања нових резидуала и нове оцено фактора веријансе s_0^2 . Након тога, рачуна се нова вредност α_0 , а потом се спроводи нови тест са **f-1** степени слободе. Процес се понавља све до идентификовања и отклањања свих резултата који одскачу.

Обе тест стратегије (*data snooping* и *Tau* тест) примењују се доста често у пракси и то веома успешно. Успех примене је чак и већи од очекиваног, а неопходне претпоставке на којима методе почивају гласе:

- опажања се померавају нормалној расподели,
- ГММ је адекватан, осим у случају једног опажања које садржи грубу грешку,
- модел је такав да груба грешка максимизира тест статистику одговарајућег резидуала, и
- **n** једнодимензионалних тестова су статистички међусобно независни.

6.6. Данска метода

Данску методу први је предложио Крауп (Kraup, Juhl and Kubik, 1980 и Caspary, 1987) и успешно се примењује већ годинама у геодезији и фотограметрији. Основна идеја своди се на то да највећи резидуали указују на најмање тачна опажања и обрнуто. Тако, након примене класичне МНК методе *a priori* тежине се замењују новим које су функције резидуала. Затим се новим тежинама рачунају нове оцено параметара и резидуали, на основу чега се рачунају нове тежине. Процес се понавља све до постизања жељене конвергенције, што најчешће значи од 5 до 10 итерација. Данска метода спада у чисто *хеуристичке*, тј. није теоријски (статистички) заснована, односно нису уведене било какве претпоставке о стохастичким особинама опажања, што значи и да не подлеже било каквом статистичком тестирању.

Предложено је неколико функција за рачунање тежина и то:

$$p_{v+1} = p_v f(v_v), \quad v = 1, 2, \dots, n$$

$$f(v_v) = \begin{cases} 1 & \text{ако је } \frac{|v_v| \cdot \sqrt{p_i}}{s_0} < c \\ \exp - \frac{|v_v| \cdot \sqrt{p_i}}{c \cdot s_0} & \text{иначе} \end{cases} \quad (6.6-1)$$

Израз (6.6-1) дефинише интервал облика $-c < v\sqrt{p_i}/s_0 < c$ у којем се *a priori* тежине налазе. Тежине опажања чији резидуали се налазе ван наведеног интервала редукују се. Константа c бира се између 2 и 3, зависно од редундантности ГММ и квалитета података. Циљ стратегије дефинисања тежина јесте редукција утицаја одређених опажања на оцену параметара и добијање резултата блиских очекиваним вредностима.

Сви резидуали ван утврђене границе указују на постојање грубих грешака. Оне се проверавају и по потреби поправљају. Очигледна одступања се одбацују и по потреби понављају.

Наведени метод је врло ефикасан и једноставан у третману грубих грешака у оквиру ГММ и заслужује много већу пажњу него што је то до сада био случај. Метод је врло близак методу *робусног* оцењивања, какав је дао Huber (1964 i 1981; и Caspary, 1988).

При оцени параметара јављају се две алтернативе:

- након одбацивања свих сумњивих резултата врши се ново МНК изравнање са *a priori* тежинама,
- параметри последње итерације се усвајају као коначна и најбоља оцена при чему се ниједно опажање не одбацује.

Важно је истаћи да ниједна од наведених метода није савршена и не гарантује откривање сумњивих резултата. По могућству, треба применити што више метода, при чему треба означити сва опажања за која се претпоставља да садрже грубу грешку, на основу чега искусни геодеа сам доноси одлуку о даљем поступању.

ПРИМЕР 6.6-1: На основу датих података у 2Д мрежи:

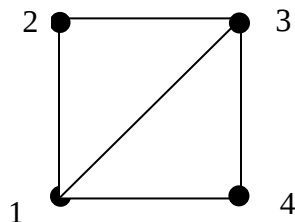
а) Тестирати модел на адекватност; вредност за α ускладити са $\alpha_0=0.1\%$ и бројем степени слободе.

б) Оценити величине грешака које се могу открити за $\lambda_i = 17$ ($\alpha_0=0.1\%$ и $\beta_0=20\%$, табела 6.4-1);

ц) Тестирати резултате мерења на присуство грубих грешака, по све три приказане методе, за $\alpha_0=0.1\%$. При употреби Данске методе користити $c = 2$.

Дате координате

Тачка	x	y
4	0	150
3	150	150
2	150	0
Приближне вредности координата тачке 1		
1	0	0



Мерени углови и дужине

Мерења	Вредност	s (m)
Угао 321	90°00'01"	5"
Угао 214	90°00'02"	5"
Угао 314	40°00'09"	5"
дужина12	150.016 m	0.005 m
дужина14	150.007 m	0.005 m
дужина13	212.138 m	0.005 m

РЕШЕЊЕ:

		dx1	dy1
ug321		0	-1,3751
ug214		1,3751	1,3751
ug314		0,6875	0,6875
A= d12		-1	0
d14		0	-1
d13		-0,7071	-0,7071

$$\sigma_0 = 5 \rightarrow P=|$$

ug321	-1	"	n= dx1 12387,17 dy1 12379.54
ug214	-2	"	
ug314	17991	"	
d12	-16	mm	
d14	-7	mm	
d13	-5,97	mm	

v=	ug321	1209,94	"
	ug214	-4724,13	"
	ug314	15629,93	"
	d12	2537,41	mm
	d14	873,62	mm
	d13	2422,26	mm

$$Q_x = \begin{array}{c|cc} & dx1 & dy1 \\ dx1 & 0,4101 & -0,2041 \\ dy1 & -0,2041 & 0,2753 \end{array}$$

$$\hat{\sigma}_0 = 8383,69$$

$$a) \mathbf{n} = 6 \Rightarrow \alpha = 1 - (1 - \alpha_0)^n = 0,006$$

$$\mathbf{T} = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} = 2811452 > 3,613 = \mathbf{F}_{\alpha, n-u, \infty} \Rightarrow \text{модел није адекватан}$$

$$b) \sqrt{\lambda_i} = 4,123$$

Qv=	ug321	0,47939	0,13475	0,06737	0,28061	-0,37860	-0,06929
	ug214	0,13475	0,47571	-0,26214	0,28328	0,09799	0,26960
	ug314	0,06737	-0,26214	0,86893	0,14164	0,04900	0,13480
	d12	0,28061	0,28328	0,14164	0,58993	0,20406	-0,14567
	d14	-0,37860	0,09799	0,04900	0,20406	0,72468	-0,05039
	d13	-0,06929	0,26960	0,13480	-0,14567	-0,05039	0,86137

$$\Delta_i = \frac{\sigma_0}{\mathbf{p}_i} \sqrt{\frac{\lambda_i}{\mathbf{q}_{v_i, v_i}}}$$

Величина грубе грешке која се може открити при $\lambda_i = 17$:

$\Delta_i =$	ug321	29,8	"
	ug214	29,9	"
	ug314	22,1	"
	d12	26,8	mm
	d14	24,2	mm
	d13	22,2	mm

ц) Тестирање резултата мерења на присуство грубих грешака

- Бардин тест

$$u_i = \frac{v_i}{\sigma_{v_i}} = \frac{v_i}{\sigma_0 \sqrt{q_{v_i v_i}}}$$

	ug321	349,50	$\sim t_{1-\alpha/2} = t_{0,9995} = 3,29$
	ug214	-1369,87	
	ug314	3353,48	
$u_i =$	d12	660,73	
	d14	205,25	
	d13	521,98	

- Тау тест

$$T_i = \frac{|v_i|}{s_{v_i}} = \frac{|v_i|}{s_0 \sqrt{q_{v_i v_i}}} \sim \tau(f)$$

	ug321	0,2084	< 1,989
	ug214	0,8170	< 1,989
$T_i =$	ug314	2,0000	> 1,989
	d12	0,3941	< 1,989
	d14	0,1224	< 1,989
	d13	0,3113	< 1,989

- Данска метода

	ug321	0,1443	< 2
	ug214	0,5635	< 2
	ug314	1,8643	< 2
	d12	0,3027	< 2
	d14	0,1042	< 2
	d13	0,2889	< 2

Сва три теста су указала на исти резултат мерења као могућу грубу грешку. Угао 314 је у сва три теста имао највећу вредност тест статистике, с тим што је код Бардиног и тау теста та вредност већа од референтне вредности. Код Данске методе та вредност није већа од референтне, али се као највећа вредност тест статистике може сматрати могућом грубом грешком.

Уколико се резултат мерења *ug314* избаци и поново уради изравнање, сада се добија да је модел адекватан што значи да у резултатима мерења више нема грубих грешака.

$$\hat{\sigma}_0 = 9,20$$

$$\mathbf{T} = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} = 3,39 < 4,151 = \mathbf{F}_{\alpha, f-1, \infty} \Rightarrow \text{модел је адекватан}$$

7. КОНЦЕПТ ПОУЗДАНОСТИ

С обзиром да се деформациона анализа заснива на упоређивању оцена положаја тачака у мрежама за праћење померања објеката у различитим временским епохама, квалитет мрежа је од виталног значаја. Традиционалан приступ описивању квалитета мрежа мерама тачности није довољан, јер је заснован на датумски зависним величинама и не уважава аспект поузданости.

Узмимо, на пример, локалну трилатерациону мрежу у којој су дужине мерене са ЕДМ који садржи непознату грешку фреквенције. Уколико нема других грешака, све мере тачности ће бити коректне, али ће оцењене координате бити померене. Једини начин откривања ове грешке јесте увођењем независног извора информација који је везан за размеру мреже. Уколико шема опажања није у стању да обезбеди откривање жељене информације, онда облик мреже као и оцене положаја тачака нису поуздани, а деформациона анализа заснована на помереним оценама води ка доношењу погрешних закључака.

Треба истаћи да нема апсолутне поузданости. Различите мере се односе на различите аспекте концепта. Наиме, неке мреже зависе од геодетског датума што изазива извесне проблеме.

Приликом контроле квалитета, поузданост производног процеса или производа јесте од великог значаја. Мере које се користе у овој области представљају временски зависне функције. Најчешће коришћена мера која игра важну улогу у спецификацији војне опреме је тзв. средње време између застоја (Mean Time Between Failures - MTBF). Наравно, геодете не могу прихватити овај појам без модификације. Међутим, фундаменталне идеје које су већ нашле потврду у пракси, стимулативно су утицале на развој концепта поузданости и примену ГММ. Први кораци приписују се Барди (1968).

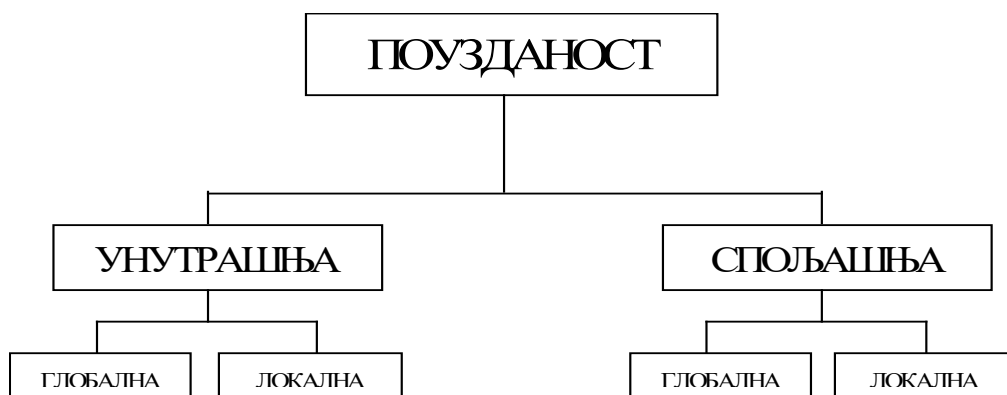
7.1. Општи аспекти и дефиниције

Уопштено посматрано, поузданост геодетских операција захтева:

- добро увежбане, одговорне и пажљиве, тј. поуздане геодетске професионалце,
- прецизне и самотестирајуће инструменте, који су у стању да игноришу мерења изведена под неповољним околностима,

- поуздане мерне процедуре (нпр. мерења напред-назад, КЛ, КД, затворени полигони и сл.),
- поуздане мреже тачака код којих су опажања добро контролисана.

Мере поузданости су повезане са строгим математичким формулацијама и применљиве су у ГММ, уз све претпоставке које важе када је реч о особинама распореда опажања. Следећи Бардину теорију, основни критеријуми поузданости геодетских мрежа класификују се као што је приказано на шеми:



Слика 1. Критеријуми поузданости геодетских мрежа

Унутрашња поузданост односи се на жељену особину ГММ да омогући откривање **систематских** грешака као и локализацију **грубих** грешака без додатних информација (самоконтролишући модел).

Спољашња поузданост ГММ представља меру отпорности модела на неоткривене систематске и грубе грешке, односно њихов утицај на оцену параметара.

У случају локалних и глобалних разматрања, мере и критеријуми су различити. Ради даље анализе, на самом почетку наведени су основни елементи ГММ:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{l} + \mathbf{v} &= \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} \quad , \quad \mathbf{K}_l = \sigma_0^2 \cdot \mathbf{Q} \quad , \quad \mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1} \\
 \mathbf{E}(\mathbf{l}) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \\
 \mathbf{o}(\mathbf{A}) &= \mathbf{n} \times \mathbf{u} \quad , \quad \mathbf{r}(\mathbf{A}) = \mathbf{r} \leq \mathbf{u} < \mathbf{n}
 \end{aligned}
 \tag{7.1-1}$$

7.2. Глобалне мере унутрашње поузданости

Мере **унутрашње поузданости** еквивалентне су вероватноћи откривања девијација модела, посебно грубих и систематских грешака. Израз глобална мера подразумева да је откривање независно од могућности њихове локализације. Очигледна и једноставна мера јесте број сувишних мерења. Уколико су мерења у оквиру мреже равномерно распоређена, то је вероватноћа откривања грешака већа.

Нешто сложенији критеријум поузданости везан је за глобални тест модела. Као што је речено у поглављу 6, грешка у функционалном моделу ГММ увек се може компензовати вектором Δ који се додаје вектору опажања $\mathbf{l}$ да би се добио вектор $\bar{\mathbf{l}}$:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{l}} &= \mathbf{l} + \Delta \\ \mathbf{E}(\bar{\mathbf{l}}) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{l}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \Delta.\end{aligned}\tag{7.2-1}$$

Квадратна форма вектора резидуала:

$$\frac{\mathbf{V}^t \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{V}}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(\mathbf{f}, \lambda),\tag{7.2-2}$$

поседује нецентрални χ^2 распоред са $f=p$ -и степени слободe и параметром нецентралности:

$$\lambda = \frac{\Delta^t \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_v \cdot \mathbf{P} \cdot \Delta}{\sigma_0^2}.\tag{7.2-3}$$

Моћ глобалног теста, тј. вероватноћа откривања постојања вектора грешака Δ , зависиће директно од вредности λ . Анализом (7.2-3) може се утврдити да вектор Δ , за који је $\lambda=0$, неће тестом бити откривен. Матрица форме $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_v \cdot \mathbf{P}$, садржана у (7.2-3), ортогонална је на матрицу $\mathbf{A}$, тј:

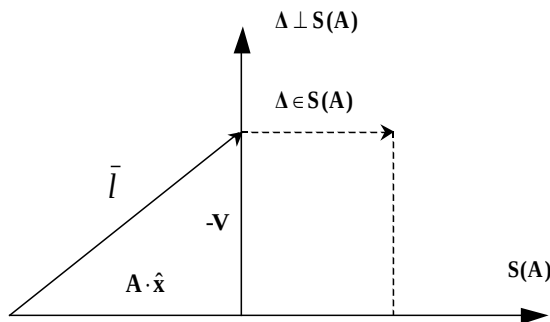
$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_v \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = 0.\tag{7.2-4}$$

Тако, било који вектор Δ облика:

$$\Delta = \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}\tag{7.2-5}$$

за одређено $\mathbf{b}$, даје $\lambda=0$.

Геометријска интерпретација овог резултата је дата на слици 7.2-1. Грешка паралелна са $\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}$, тј. $\Delta \in \mathbf{S}(\mathbf{A})$, не мења резидуале и зато остаје неоткривена. Грешка паралелна са $\mathbf{v}$ и ортогонална на $\mathbf{S}(\mathbf{A})$, креираће максималну вредност λ . Како се у пракси вектор Δ не може контролисати, мора се имати у виду да је ГММ у целости непоуздан када је реч о грешкама $\Delta \in \mathbf{S}(\mathbf{A})$. Пример који ово илуструје раније је поменут у случају мерења дужина са ЕДМ, када ЕДМ поседује константну грешку фреквенције.



Слика 7.2-1: Ефекти од Δ паралелно и управно са $\mathbf{S}(\mathbf{A})$

Основу развоја мера поузданости у односу на грешку $\Delta \notin \mathbf{S}(\mathbf{A})$, представља Рајлијева неједнакост која гласи:

$$\Lambda_{\min} \leq \frac{\mathbf{g}^t \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{g}}{\mathbf{g}^t \cdot \mathbf{g}} \leq \Lambda_{\max}, \forall \mathbf{g} \quad (7.2-6)$$

где Λ репрезентује сопствене вредности матрице $\mathbf{M}$, а $\mathbf{g}$ је било који вектор одговарајућег реда. Упоређујући (7.2-4) са (7.2-1) води за $\mathbf{M} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_v \cdot \mathbf{P}$ и $\Delta := \mathbf{g}$, ка вези облика:

$$\lambda = \frac{\Delta^t \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_v \cdot \mathbf{P} \cdot \Delta}{\sigma_0^2} \leq \frac{\Delta^t \cdot \Delta \cdot \Lambda_{\max}}{\sigma_0^2} \quad (7.2-7)$$

Израз (7.2-7) дефинише горњу границу параметра нецентралности λ , који је пропорционалан максималној сопственој вредности $\lambda_{\max}$ од $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_v \cdot \mathbf{P}$. Како поузданост расте са λ , $\lambda_{\max}$ може користити као **глобална мера унутрашње поузданости**. То значи да за дати вектор грешака $\Delta \notin \mathbf{S}(\mathbf{A})$ вероватноћа његовог откривања зависи од вредности $\lambda_{\max}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_v \cdot \mathbf{P})$. С обзиром да је $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_v \cdot \mathbf{P}$ независно од избора датума, исто важи и за $\lambda_{\max}$.

Употребљивост $\lambda_{\max}$ се не сме преценити, јер није јасно колики је утицај λ у (7.2-7). Уколико су сва мерења исте тачности, тј. $\mathbf{P} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{I}$, $\lambda_{\max}$ може бити бескорисна као мера поузданости, јер матрица $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_v \cdot \mathbf{P}$ садржи $\mathbf{r}(\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{A}))$ сопствених вредности једнаких нули и $\mathbf{f}(\mathbf{f} = \mathbf{n} - \mathbf{r})$ сопствених вредности једнаких $\mathbf{p}$ ($\mathbf{p}$ је тежина). Стога је $\lambda_{\min} = 0$ и $\lambda_{\max} = \mathbf{p}$, а остале сопствене вредности не постоје. Повећањем броја мерења, повећаће се вероватноћа откривања грешке, али се неће променити вредност $\lambda_{\max}$. У том случају у (7.2-7) се показује да је $\lambda \leq \frac{\Delta^t \cdot \Delta}{\sigma^2}$, уколико се тежине одређују као $\mathbf{p} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma}$.

Из генералног израза облика:

$$\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{X}\| \quad (7.2-8)$$

може се извести алтернативна мера.

Ако се узме да је $\mathbf{x} := \Delta$ и $\mathbf{A} := \mathbf{Q}_v^{1/2} \cdot \mathbf{P}$ и коришћењем *Еуклидове норме*, која се дефинише као:

$$\text{вектор: } \|\mathbf{X}\| = (\mathbf{X}^t \cdot \mathbf{X})^{1/2}$$

$$\text{марица: } \|\mathbf{A}\| = (\text{tr} \mathbf{A}^t \mathbf{A})^{1/2},$$

након квадрирања добија се израз облика:

$$\|\mathbf{Q}_v^{1/2} \cdot \mathbf{P} \cdot \Delta\|^2 \leq \|\mathbf{Q}_v^{1/2} \cdot \mathbf{P}\|^2 \cdot \|\Delta\|^2,$$

или експлицитно:

$$\Delta^t \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_v \cdot \mathbf{P} \cdot \Delta \leq \Delta^t \cdot \Delta (\text{tr}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_v \cdot \mathbf{P})). \quad (7.2-9)$$

Заменом раније дефинисане једнакости $\Delta^t \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_v \cdot \mathbf{P} \cdot \Delta / \sigma_0^2$, добија се:

$$\lambda \leq \frac{\Delta^t \cdot \Delta}{\sigma_0^2} \cdot \text{tr} \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_v \cdot \mathbf{P}. \quad (7.2-10)$$

Израз указује да $\text{tr}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_v \cdot \mathbf{P})$ за дати вектор грешака Δ дефинише горњу границу параметра нецентралности λ . Тако, $\text{tr}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_v \cdot \mathbf{P})$ може служити као мера поузданости, на исти начин као $\lambda_{\max}$.

Упоређењем израза (7.2-10) и (7.2-7) заједно са релацијом $\text{tr}(\mathbf{M}) = \Sigma \lambda$, показује да је $\lambda_{\max}$ ближе граници од λ и зато има предност као мера. Са друге стране, са аспекта примене рачунара, критеријум трага има предност. У случају да сва опажања имају једнаке тежине, важи следећа релација:

$$\text{tr}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_v \cdot \mathbf{P}) = \mathbf{p} \cdot \text{tr}(\mathbf{Q}_v) \cdot \mathbf{P} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{f}. \quad (7.2-11)$$

Додатна опажања ће повећати број степени слободе $\mathbf{f}$, као и вредност трага, што значи и већу вероватноћу откривања грешака. Обе мере су на сличан начин погодне за упоређивање геометрије модела и требају се примењивати врло опрезно, што значи да на овом пољу има још простора за истраживање.

7.3. Локална мере унутрашње поузданости

Концепт локалне поузданости уско је везан са вероватноћом откривања резултата који одскачу. Што је већа вероватноћа лоцирања неочекиваних резултата, већи је степен унутрашње поузданости модела.

Помак (shift) $\Delta \mathbf{v}$ вектора поправака, изазване једном грубом грешком Δ_i у опажању $\mathbf{I}_i$, износи:

$$\Delta \mathbf{v} = -\mathbf{q}_{vi} \cdot \mathbf{p}_i \cdot \Delta_i \quad (7.3-1)$$

где је $\mathbf{p}_i$ а *приори* тежина од $\mathbf{I}_i$ и $\mathbf{q}_{vi}$ *i*-та колона кофакторске матрице $\mathbf{Q}_v$. *i*-та компонента од $\Delta \mathbf{v}$:

$$\Delta v_i = -\mathbf{q}_{v_i v_i} \cdot \mathbf{p}_i \cdot \Delta_i = -\mathbf{f}_i \cdot \Delta_i \quad (7.3-2)$$

јесте некориговани систематски утицај (*bias*) од $\mathbf{v}_i$ - поправка загађеног опажања.

Што је веће Δ_{v_i} поједине грешке Δ_i , већа је вероватноћа локализације сумњивог опажања $\mathbf{I}_i$. Такође, посматрајући (7.3-2), кофакторска матрица $\mathbf{Q}_v$ треба да садржи строго доминантне елементе на дијагонали $\mathbf{q}_{v_i v_i}$. Како за дату грешку Δ_i вредност Δ_{v_i} зависи од везе:

$$\mathbf{q}_{v_i v_i} \cdot \mathbf{p}_i = \mathbf{f}_i \quad (7.3-3)$$

(тзв. доприноса редудантности) израз (7.3-3) може се користити као *локална мера унутрашње поузданости*.

Да би се остварио увид у поузданост модела, рачунају се вредности $\mathbf{f}_i$ за сва опажања, и то пре извршења мерења. Анализа $\mathbf{f}_i$ омогућује издвајање слабих места у мрежи на које треба обратити посебну пажњу. Даља интерпретација и оправданост изрази *”допринос редудантности”* за $\mathbf{f}_i$ (7.3-3) може се извести из генералног изрази:

$$\bar{\mathbf{V}} - \mathbf{V} = \Delta \mathbf{V} = -\mathbf{Q}_v \cdot \mathbf{P} \cdot \Delta, \quad (7.3-4)$$

где је:

$$\mathbf{Q}_v \cdot \mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_x \cdot \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{P}, \quad (7.3-5)$$

$$\text{tr}(\mathbf{Q}_v \cdot \mathbf{P}) = \mathbf{r}(\mathbf{Q}_v \cdot \mathbf{P}) = \mathbf{r}(\mathbf{I}) - \mathbf{r}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_x \cdot \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{P}), \text{ или}$$

$$\text{tr}(\mathbf{Q}_v \cdot \mathbf{P}) = \mathbf{n} - \mathbf{r}(\mathbf{A}) = \mathbf{f}. \quad (7.3-6)$$

Ако је матрица $\mathbf{P}$ дијагонална (независна опажања), $\mathbf{Q}_v \cdot \mathbf{P}$ има дијагоналне елементе $\mathbf{q}_{v_i v_i} \cdot \mathbf{p}_i = \mathbf{f}_i$, тако да је:

$$\text{tr}(\mathbf{Q}_v \cdot \mathbf{P}) = \sum \mathbf{f}_i = \mathbf{f}. \quad (7.3-7)$$

Збир $\mathbf{f}_i$ свих опажања једнак је броју степени слободе (редудантности) модела. Свака поједина вредност $\mathbf{f}_i$, представља допринос опажања $\mathbf{I}_i$ укупној редувантности модела.

Заменом кофакторске матрице изравнатих опажања:

$$\mathbf{Q}_i = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_x \cdot \mathbf{A}^t, \quad \hat{\mathbf{I}} = \mathbf{I} + \mathbf{v}$$

у једначину (7.3-5) добија се израз облика:

$$\mathbf{Q}_v \cdot \mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{Q}_i \cdot \mathbf{P} \quad (7.3-8)$$

Сада се израз (7.3-3) може написати као:

$$f_i = 1 - \mathbf{q}_{i,i} \cdot \mathbf{p}_i = 1 - \frac{\mathbf{p}_i}{\mathbf{p}_i} \quad (7.3-9)$$

где је $\mathbf{q}_{i,i}$ i -ти дијагонални елемент кофакторске матрице $\mathbf{Q}_i$, а $\mathbf{p}_i$ тежина изравнатог опажања $\hat{\mathbf{l}}_i$. Како је *a постериори* тежина $\mathbf{p}_i$ једног опажања увек већа или једнака *a priori* тежини $\mathbf{p}$, допринос редудантности ограничен је изразом (7.3-9), тј:

$$0 \leq f_i \leq 1. \quad (7.3-10)$$

Доња граница добија се при:

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}. \quad (7.3-11)$$

У том случају одговарајуће $\mathbf{l}_i$ није контролисано од стране других опажања. Такође, извесни параметри модела се не могу срачунати без $\mathbf{l}_i$. Горња граница добија се за $\mathbf{p}_i = \infty$. То значи да је $\mathbf{p}_i$ добро контролисано моделом и да је варијанса изравнатог опажања једнака нули.

Типичне вредности доприноса редудантности у геодетским мрежама износе:

- Полигонске мреже: $f_i = 0.1 - 0.2$
- Трилатерационе мреже: $f_i = 0.3 - 0.6$
- Комбиноване мреже $f_i = 0.5 - 0.8$
- Нивелманске мреже $f_i = 0.2 - 0.5$

Већина аутора се слаже да минимална вредност f_i у геодетским мрежама треба да буде око $f_i = 0.3$.

Унутрашњу поузданост могуће је представити и на следећи начин (види поглавље 6):

$$\mathbf{k}_{oi} = \sqrt{\frac{\lambda_0}{f_i}}. \quad (7.3-12)$$

За уобичајене вредности $\alpha_0 = 0.1\%$ и $\beta_0 = 20\%$, (7.3-12) добија следећи облик:

$$k_{oi} = \frac{4.1}{\sqrt{f_i}}. \quad (7.3-13)$$

Уколико се узму у обзир типичне вредности за f_i , добија се:

$$5 \leq k_{oi} \leq 13,$$

а $k_{oi} \cdot \sigma_i$ је минимална вредност грубе грешке која се може открити са вероватноћом $1 - \beta_0$.

Просечна вредност доприноса редуваности износи:

$$\bar{f} = \frac{\mathbf{f}}{\mathbf{n}} \quad (7.3-14)$$

и представља *глобалну меру поузданости*, уз услов да су f_i у мрежи равномерно распоређене. Мере унутрашње поузданости f_i и $\bar{f}$ не зависе од геодетског датума.

7.4. Глобална мера спољашње поузданости

Без обзира на све постојеће процедуре тестирања, никада се са сигурношћу не може тврдити да су откривене све грубе и систематске грешке у ГММ. Могуће је да постоје грешке које су испод утврђених граничних вредности. Једна од најважнијих ствари у анализи модела јесте утврдити ефекте утицаја ових (неоткривених) грешака на оцену параметара модела. За математички модел се каже да има *високу спољашњу поузданост уколико није осетљив на утицаје неоткривених грешака*. Одступање вектора непознатих параметара изазвано вектором грешака Δ дефинисан је изразом облика:

$$\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}} = \Delta \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{N}^- \mathbf{A}^T \mathbf{P} \Delta, \quad (7.4-1)$$

где је $\mathbf{N}^-$ уопштена инверзија од $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$.

У општем случају, када је Δ непозната систематска грешка која оптерећује сва или само нека опажања, израз (7.4-1) није од велике користи. Али, било

би веома корисно открити ефекте одређених одступања који би се могли моделовати, као што су на пример грешке размере, атмосферски утицаји код ЕДМ мерења, непредвидиви индекси рефракције код мерења зенитних углова или систематске грешке у нивелману.

Израз (7.4-1) показује да $\Delta\hat{\mathbf{x}}$ зависи од избора геодетског датума као и $\hat{\mathbf{x}}$. Једна инваријантна просечна мера ефекта одступања Δ може се добити као:

$$\mathbf{q}_{\Delta\hat{\mathbf{x}}} = \Delta\hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}^{-1} \Delta\hat{\mathbf{x}}. \quad (7.4-2)$$

Вредност $\mathbf{q}_{\Delta\hat{\mathbf{x}}}$ не зависи од избора датума и код поузданих модела вредности треба да су што мање. Проширењем израза (7.4-2) са $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}^{-1} = \mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$ добија се:

$$\mathbf{q}_{\Delta\hat{\mathbf{x}}} = \Delta^T \mathbf{P} \mathbf{A} (\mathbf{N}^{-1})^T \mathbf{N} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \Delta = \Delta^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \Delta = \Delta^T \mathbf{P} \mathbf{Q}_i \mathbf{P} \Delta \quad (7.4-3)$$

Полазећи од (7.2-3) могуће је поставити следећи критеријум:

$$\Delta^T \Delta \Lambda_{\max} \geq \Delta^T \mathbf{P} \mathbf{Q}_i \mathbf{P} \Delta, \quad \text{за} \quad \forall \Delta \in \mathfrak{R}^n \quad (7.4-4)$$

где је $\Lambda_{\max}$ максимална сопствена вредност од $\mathbf{P} \mathbf{Q}_i \mathbf{P}$. Тако, мање $\Lambda_{\max}$ даје мањи максимални могући ефекат грешке Δ на оцену параметара, а тиме је и модел поузданији (робуснији).

Треба истаћи и да је интерпретација вредности $\Lambda_{\max}$ од $\mathbf{P} \mathbf{Q}_i \mathbf{P}$ једнако сложена као и $\Lambda_{\max}$ од $\mathbf{P} \mathbf{Q}_v \mathbf{P}$.

Пошто је $\mathbf{Q}_i \mathbf{P}$ идемпотентно, његове сопствене вредности су нуле или јединице, а уколико су мерења једнаких тежина, $\mathbf{P} \mathbf{Q}_i \mathbf{P}$ има r сопствених вредности једнаких $\mathbf{p}$ и $\mathbf{n}-r=f$ сопствених вредности једнаких нули.

Додатна опажања са тежинама $\mathbf{p}$ неће променити $\Lambda_{\max}$ нити вредност трага од $\mathbf{P} \mathbf{Q}_i \mathbf{P}$, већ ће једино утицати на мењање (повећање) броја f – нултих јединичних вредности.

7.5. Локална мера спољашње поузданости

Уколико (7.4-1) описује ефекат грубе грешке у једном опажању према изразу $\Delta = \mathbf{e}_i \Delta_i$, тада је:

$$\Delta \hat{\mathbf{x}}_i = \mathbf{N}^- \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{e}_i \Delta_i = \mathbf{N}^- \mathbf{a}_i \mathbf{p}_i \Delta_i \quad (7.5-1)$$

где је $\mathbf{a}_i$ i -та колона од $\mathbf{A}^T$.

Сви параметри померени услед утицаја једног Δ_i . У пракси, сви параметри који се појављују у i -тој једначини опажања са вектором коефицијената $\mathbf{a}_i$ очекује се да су више загађени од других, тако да се ефекат једне грешке третира као локални. Међутим, израз (7.5-1) нема јасну интерпретацију, јер $\Delta \hat{\mathbf{x}}_i$ зависи од избора геодетског датума. Уколико се у недостатку бољих мера ипак користи квадратна форма од $\Delta \hat{\mathbf{x}}_i$ може се закључити да *мале вредности* од:

$$\mathbf{q}_{\Delta \hat{\mathbf{x}}_i} = \Delta \hat{\mathbf{x}}_i^T \cdot \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}^- \cdot \Delta \hat{\mathbf{x}}_i = \Delta_i^2 \mathbf{p}_i^2 \mathbf{a}_i^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{a}_i, \quad (7.5-2)$$

указују на *добру* локалну поузданост.

Како Δ_i није могуће контролисати, захтев поузданости може се добити и у другој форми, тј:

$$\mathbf{p}_i^2 \mathbf{a}_i^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{a}_i = \mathbf{p}_i (1 - \mathbf{f}_i) = \min \text{ за } \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (7.5-3)$$

Критеријум (7.5-3) може се срачунати за сва опажања *унапред*. Њиме се омогућује *провера поузданости модела* у фази дизајнирања мреже, када још увек постоји могућност побољшања геометрије. Из укупног збира свих појединачних вредности (7.5-3) могуће је срачунати просечну вредност локалне поузданости, тј:

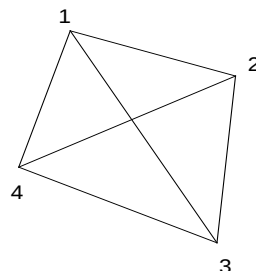
$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i^2 \mathbf{a}_i^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{a}_i = \frac{1}{n} \text{tr}(\mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{N}^- \mathbf{A}^T \mathbf{P}) = \frac{1}{n} \text{tr}(\mathbf{P} \mathbf{Q}_i \mathbf{P}). \quad (7.5-4)$$

Вредност израза (7.5-4) треба да буде што *мања* и представља алтернативу израза (7.4-4) као *глобалне мере*.

ПРИМЕР 7.5-1: На основу датих података мерења у једној слободној мрежи одредити:

1. Мере унутрашње поузданости
2. Мере спољашње поузданости

Правац 1-2	0°	00'	00"
Правац 1-3	41°	40'	38"
Правац 1-4	90°	03'	48"
Од - до	дужина	σ	
d_{12}	2065.361	0.0061	
d_{14}	2000.014	0.0060	
d_{23}	2339.767	0.0067	
d_{34}	2584.902	0.0072	
d_{13}	3436.920	0.0089	
d_{24}	2876.516	0.0078	



Тачка	x	y
1	3622.010	1517.160
2	2991.012	3483.771
3	661.667	3263.248
4	1718.255	904.157

Решење:

$$\sigma_{pr} = 5'', \sigma_0 = 1$$

$$n=9, u=9, d=3 \Rightarrow f=n-u+d=3$$

Матрица дизајна A:

dx1	dy1	dx2	dy2	dx3	dy3	dx4	dy4	dz1
0,0951	0,0305	-0,0951	-0,0305	0	0	0	0	1
0,0305	0,0517	0	0	-0,0305	-0,0517	0	0	1
-0,0316	0,0982	0	0	0	0	0,0316	-0,0982	1
0,3055	-0,9522	-0,3055	0,9522	0	0	0	0	0
0,9519	0,3065	0	0	0	0	-0,9519	-0,3065	0
0	0	0,9955	0,0943	-0,9955	-0,0943	0	0	0
0	0	0	0	-0,4088	0,9126	0,4088	-0,9126	0
0,8613	-0,5080	0	0	-0,8613	0,5080	0	0	0
0	0	0,4425	0,8968	0	0	-0,4425	-0,8968	0

Вектор слободних чланова f и дијагонални елементи матрице тежина P :

$f=$	-4,36	"	$P(diag)=$	0,0400
	-5,92	"		0,0400
	10,28	"		0,0400
	-0,30	mm		0,0269
	0,06	mm		0,0278
	6,64	mm		0,0223
	5,76	mm		0,0193
	-5,08	mm		0,0126
	4,44	mm		0,0164

Матрица датумских услова S^T којом је проширена матрица N :

1	0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0
-774924	-1373774	1191687	-742776	971164	1586569	-1387927	529981	206264,8

Матрица кофактора оцена непознатих параметара Qx :

15,1179	-3,2259	-5,9101	-5,7309	-4,8694	3,8468	-4,3383	5,1101	-0,1645
-3,2259	11,1682	3,4876	-4,2789	3,9368	-0,3852	-4,1985	-6,5041	-0,4064
-5,9101	3,4876	14,5620	4,4737	-5,6926	-7,7629	-2,9593	-0,1984	0,1142
-5,7309	-4,2789	4,4737	14,8628	3,8032	-6,0254	-2,5459	-4,5585	0,6678
-4,8694	3,9368	-5,6926	3,8032	13,7570	-2,2329	-3,1949	-5,5071	-0,4353
3,8468	-0,3852	-7,7629	-6,0254	-2,2329	13,9037	6,1490	-7,4932	-0,7660
-4,3383	-4,1985	-2,9593	-2,5459	-3,1949	6,1490	10,4925	0,5954	0,4856
5,1101	-6,5041	-0,1984	-4,5585	-5,5071	-7,4932	0,5954	18,5558	0,5046
-0,1645	-0,4064	0,1142	0,6678	-0,4353	-0,7660	0,4856	0,5046	8,3322

Вектор оцена непознатих параметара:

$x=$	dx1	3,50	mm
	dy2	-2,08	mm
	dx2	-4,20	mm
	dy2	-2,28	mm
	dx3	1,01	mm
	dy3	-0,55	mm
	dx4	-0,32	mm
	dy4	4,90	mm
	dz1	0,02	mm

Оцена стандардног одступања јединице тежине:

$\hat{\sigma}_0 = 1.41 \Rightarrow$ глобални тест адекватности модела је показао да је модел адекватан

Кофакторска матрица оцена поправака $\mathbf{Q}_{\hat{\gamma}}$:

16,3586	-8,2860	-8,0726	-0,8549	-1,0631	1,6347	0,1329	-2,5010	2,6058
-8,2860	16,5509	-8,2649	-0,2850	0,1225	-1,5356	1,7613	-0,0015	0,0274
-8,0726	-8,2649	16,3375	1,1399	0,9407	-0,0990	-1,8942	2,5024	-2,6332
-0,8549	-0,2850	1,1399	4,0073	3,4537	3,8199	4,4150	-10,9601	-7,5717
-1,0631	0,1225	0,9407	3,4537	2,9865	3,2428	3,8265	-9,4021	-6,5458
1,6347	-1,5356	-0,0990	3,8199	3,2428	4,0123	4,3714	-11,1805	-7,0677
0,1329	1,7613	-1,8942	4,4150	3,8265	4,3714	5,5015	-13,1021	-8,2764
-2,5010	-0,0015	2,5024	-10,9601	-9,4021	-11,1805	-13,1021	32,3031	20,4128
2,6058	0,0274	-2,6332	-7,5717	-6,5458	-7,0677	-8,2764	20,4128	14,3674

Кофакторска матрица оцена мерених величина $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{i}}}$:

8,6414	8,2860	8,0726	0,8549	1,0631	-1,6347	-0,1329	2,5010	-2,6058
8,2860	8,4491	8,2649	0,2850	-0,1225	1,5356	-1,7613	0,0015	-0,0274
8,0726	8,2649	8,6625	-1,1399	-0,9407	0,0990	1,8942	-2,5024	2,6332
0,8549	0,2850	-1,1399	33,2027	-3,4537	-3,8199	-4,4150	10,9601	7,5717
1,0631	-0,1225	-0,9407	-3,4537	33,0135	-3,2428	-3,8265	9,4021	6,5458
-1,6347	1,5356	0,0990	-3,8199	-3,2428	40,8777	-4,3714	11,1805	7,0677
-0,1329	-1,7613	1,8942	-4,4150	-3,8265	-4,3714	46,3385	13,1021	8,2764
2,5010	0,0015	-2,5024	10,9601	9,4021	11,1805	13,1021	46,9069	-20,4128
-2,6058	-0,0274	2,6332	7,5717	6,5458	7,0677	8,2764	-20,4128	46,4726

Глобална мера унутрашње поузданости:

$$\text{tr}(\mathbf{PQ}_{\hat{\gamma}}\mathbf{P}) = 0.0971$$

Локалне мере унутрашње поузданости:

$$\mathbf{f}_{\mathbf{i}} = 1 - \mathbf{q}_{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}}} \cdot \mathbf{p}_{\mathbf{i}} = 1 - \frac{\mathbf{p}_{\mathbf{i}}}{\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{i}}}} =$$

0,65
0,66
0,65
0,11
0,08
0,09
0,11
0,41
0,24

$$\mathbf{k}_{\text{oi}} = \frac{4.1}{\sqrt{\mathbf{f}_{\mathbf{i}}}} =$$

5,16
5,13
5,16
12,71
14,48
13,95
12,80
6,53
8,58

Просечна вредност доприноса редуваности као глобална мера унутрашње поузданости:

$$\bar{\mathbf{f}} = \frac{\mathbf{f}}{\mathbf{n}} = \frac{\sum \mathbf{f}_i}{\mathbf{n}} = \frac{3}{9} = 0.33$$

Локалне мере спољашње поузданости:

$$\mathbf{p}_i^2 \mathbf{a}_i^T \mathbf{Q}_{\hat{x}} \mathbf{a}_i = \mathbf{p}_i (1 - \mathbf{f}_i) = \begin{array}{|c} 0,01 \\ 0,01 \\ 0,01 \\ 0,02 \\ 0,03 \\ 0,02 \\ 0,02 \\ 0,01 \\ 0,01 \end{array}$$

Глобална мера спољашње поузданости:

$$\frac{1}{\mathbf{n}} \sum_{i=1}^{\mathbf{n}} \mathbf{p}_i^2 \mathbf{a}_i^T \mathbf{Q}_{\hat{x}} \mathbf{a}_i = \frac{1}{\mathbf{n}} \text{tr}(\mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}) = \frac{1}{\mathbf{n}} \text{tr}(\mathbf{P} \mathbf{Q}_{\hat{x}} \mathbf{P}) = 0.02$$

8. ОЦЕНА КОМПОНЕНАТА ВАРИЈАНСИ

Као што је већ неколико пута истакнуто, примарни циљ првог корака деформационе анализе јесте успостављање одговарајућег ГММ. За разлику од претходних поглавља где смо говорили углавном о функционалном делу ГММ, овде ће бити речи о стохастичком моделу. Стохастичке особине резултата мерења (опажања) моделују се матрицом коваријанси облика:

$$\mathbf{K}_l = \mathbf{E}[(\mathbf{l} - \mathbf{A}\mathbf{x})(\mathbf{l} - \mathbf{A}\mathbf{x})^T] = \sigma_0^2 \mathbf{Q}. \quad (8-1)$$

Матрица $\mathbf{Q}$ је позната матрица кофактора, а σ_0^2 је *a priori* фактор варијансе, који се често замењује са својом оценом s_0^2 (уколико модел није адекватан):

$$s_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{f}. \quad (8-2)$$

Ако посматрамо једну сложенију геодетску мрежу са хетерогеним мерењима дужина и углова, различитим инструментима и од стране различитих оператора, тада није нимало лако поставити одговарајући стохастички модел.

Први покушаји да се једноставни модел (8-1) замени нешто сложенијим учинио је Ф.Р. Хелмерт давне 1924. године. Касније, 1970. Године, индијски статистичар Ц. А. Рао развио је стохастички модел које је показао потпуну сагласност са Хелмертовим, уколико је претпоставка о нормалности опажања задовољена. Након тога уследили су бројни радови у овој области који су пронашли своју пуну примену у пракси.

8.1. Стохастички модел

Гаус-Марковљев модел приказан са (8-1) може се проширити и приказати у следећем облику:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{l}) &= \mathbf{A}\mathbf{x}, & \mathbf{l} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T) &= \mathbf{K}_l = \sum_{i=1}^k \sigma_i^2 \mathbf{Q}_i, \end{aligned} \quad (8.1-1)$$

где матрица коваријанси $\mathbf{K}_l$ представља суму k компоненти варијанси σ_i^2 , помножених одговарајућим матрицама кофактора $\mathbf{Q}_i$. Проблем гласи – како

оценити параметре $\mathbf{x}$ и $\mathbf{k}$ компонената варијанси σ_i^2 и представља специјалан случај модела (8-1) за $\mathbf{k} = 1$. $\mathbf{K}_1$ се дефинише на следећи начин: Вектор истинитих грешака ε представља збир линеарних функција различитих независних елементарних грешака ε_i . Свака елементарна грешка ε_i припада одређеном извору грешака и у вези је са матрицом познатих коефицијената $\mathbf{G}$, односно:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^k \mathbf{G}_i \varepsilon_i. \quad (8.1-2)$$

На основу (8.1-1) следи:

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{E}(\varepsilon \varepsilon^T) = \sum_{i=1}^k \mathbf{G}_i \mathbf{E}(\varepsilon_i \varepsilon_i^T) \mathbf{G}_i^T, \quad (8.1-3)$$

и која се након увођења претпоставки облика:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\varepsilon_i \varepsilon_i^T) &= \sigma_{\varepsilon_i}^2 \mathbf{I}, & \mathbf{E}(\varepsilon_i \varepsilon_j^T) &= \mathbf{0} \text{ за } i \neq j, \\ \mathbf{G}_i \mathbf{G}_i^T &= \mathbf{Q}_i, & \mathbf{E}(\varepsilon_i) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (8.1-4)$$

може поједноставити тако да у коначном облику, стохастички модел гласи:

$$\mathbf{K}_1 = \sigma_1^2 \alpha_1^2 \mathbf{Q}_1 + \sigma_2^2 \alpha_2^2 \mathbf{Q}_2 + \dots + \sigma_k^2 \alpha_k^2 \mathbf{Q}_k = \sigma_1^2 \mathbf{V}_1 + \sigma_2^2 \mathbf{V}_2 + \dots + \sigma_k^2 \mathbf{V}_k, \quad (8.1-5)$$

где су α_i^2 познате, приближне вредности производа $\sigma_i^2 \alpha_i^2$.

8.2. Примери модела компонената варијанси

Илустрација практичне важности проширеног стохастичког модела приказаће се на примеру два геодетска проблема.

8.2.1. Модел компонената варијанси у геометријском нивелману

У геометријском нивелману три су главна извора грешака мерења садржана у укупној грешци: грешка очитавања летве која не зависи од величине дужине визуре, грешка пропорционална дужини визуре и грешка размере летве пропорционална висинској разлици (Caspary, 1988). Тако, j -та компонента вектора грешака ε има следећи облик:

$$\varepsilon_j = \varepsilon_{1j} + \sqrt{d_j} \varepsilon_{2j} + \Delta H_j \varepsilon_{3j}, \quad (8.2.1-1)$$

односно:

$$\varepsilon = \mathbf{G}_1 \varepsilon_1 + \mathbf{G}_2 \varepsilon_2 + \mathbf{G}_3 \varepsilon_3, \quad (8.2.1-2)$$

са матрицом коефицијената облика:

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \dots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{d_1} & & & \\ & \sqrt{d_2} & & \\ & & \dots & \\ & & & \sqrt{d_k} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_3 = \begin{bmatrix} \Delta H_1 & & & \\ & \Delta H_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \Delta H_k \end{bmatrix} \quad (8.2.1-3)$$

На основу (8.1-4) следи:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1 &= \mathbf{G}_1 \mathbf{G}_1^T = \mathbf{I} \\ \mathbf{Q}_2 &= \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_2^T = \text{diag}(d_1 \ d_2 \ \dots \ d_k) \\ \mathbf{Q}_3 &= \mathbf{G}_3 \mathbf{G}_3^T = \text{diag}(\Delta H_1^2 \ \Delta H_2^2 \ \dots \ \Delta H_k^2) \end{aligned}, \quad (8.2.1-4)$$

а матрица коваријанси гласи:

$$\mathbf{K}_1 = \sigma_1^2 \alpha_1^2 \mathbf{Q}_1 + \sigma_2^2 \alpha_2^2 \mathbf{Q}_2 + \sigma_3^2 \alpha_3^2 \mathbf{Q}_3 = \sigma_1^2 \mathbf{V}_1 + \sigma_2^2 \mathbf{V}_2 + \sigma_3^2 \mathbf{V}_3 \quad (8.2.1-5)$$

и садржи три непознате компоненте варијанси (дисперзија) σ_i^2 које је неопходно оценити, док су α_i^2 познате приближне вредности производа $\sigma_i^2 \alpha_i^2$.

8.2.2. Модел компонентата варијанси у 2Д и 3Д геодетским мрежама

Замислимо да су у једној геодетској мрежи реализована следећа мерења:

- **p** праваца,
- **d** дужина,
- **z** зенитних углова и
- **s** ГПС вектора.

Свака група опажања има своје посебне карактеристике и може се одвојено моделовати. Матрица коваријанси $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$, са $\mathbf{n} = \mathbf{p} + \mathbf{d} + \mathbf{z} + \mathbf{s}$, може се дефинисати као:

$$\mathbf{K}_1 = \sigma_p^2 \alpha_p^2 \mathbf{Q}_p + \sigma_d^2 \alpha_d^2 \mathbf{Q}_d + \sigma_z^2 \alpha_z^2 \mathbf{Q}_z + \sigma_s^2 \alpha_s^2 \mathbf{Q}_s = \sigma_p^2 \mathbf{V}_p + \sigma_d^2 \mathbf{V}_d + \sigma_z^2 \mathbf{V}_z + \sigma_s^2 \mathbf{V}_s. \quad (8.2.2-1)$$

Уколико се опажања групишу у наведеном реду, матрице $\mathbf{V}$ изгледају:

$$\mathbf{V}_p = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{V}}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{V}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{V}}_d & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{V}_z = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{V}}_z & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{V}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{V}}_s \end{bmatrix},$$

где су поједине субматрице дефинисане сагласно стохастичким својствима одговарајућих типова опажања које оне представљају, респективно. Тако на пример за дужине, матрица $\tilde{\mathbf{V}}_d = \sigma_1^2 \mathbf{V}_{1d} + \sigma_2^2 \mathbf{V}_{2d}$, при чему су $\mathbf{V}_{1d} = \mathbf{I}$, док је $\mathbf{V}_{2d} = \mathbf{diag}(\mathbf{d}_1^2 \ \mathbf{d}_2^2 \ \dots \ \mathbf{d}_n^2)$ итд.

Модел описан у (8.2.1-1) спада у *адитивне* или *збирне*, а модел описан у (8.2.2-1) у моделе *групних* варијанси.

8.3. Најбоља квадратна непомерена оцена – НКНО

Нека је $\mathbf{p}^T \boldsymbol{\sigma}$ линеарна функција компонената варијанси, где је $\mathbf{p}$ дати $\mathbf{k} \times 1$ вектор, док вектор

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1^2 \ \sigma_2^2 \ \dots \ \sigma_k^2]^T, \quad (8.3-1)$$

треба оценити користећи линеарну функцију $\mathbf{l}^T \mathbf{Dl}$, где је $\mathbf{D}$ непозната $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ матрица која је симетрична и формира квадратну форму опажања $\mathbf{l}$.

Најбоља квадратна непомерена оцена добија се задовољавањем следећих услова:

1. $\mathbf{E}(\mathbf{l}^T \mathbf{Dl}) = \mathbf{p}^T \boldsymbol{\sigma}$, (односно $\mathbf{tr}(\mathbf{DK}_1) + \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{D} \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{p}^T \boldsymbol{\sigma}$)
 2. $\mathbf{V}(\mathbf{l}^T \mathbf{Dl}) = \min$, (са $\mathbf{V}(\mathbf{l}^T \mathbf{Dl}) = 2\mathbf{tr}(\mathbf{DK}_1 \mathbf{DK}_1) + 4\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{DK}_1 \mathbf{D} \mathbf{A} \mathbf{x}$)
- (8.3-2)

Да би оцена компонената варијанси била независна од оцене непознатих параметара $\mathbf{x}$, неопходно је да буде задовољен услов:

$$\mathbf{DA} = \mathbf{0}. \quad (8.3-3)$$

Полазећи од (8.3-3), други услов у (8.3-2) може се написати у облику:

$$\mathbf{V}(\mathbf{I}^T \mathbf{DI}) = 2\text{tr}(\mathbf{DK}_1 \mathbf{DK}_1), \quad (8.3-4)$$

односно сагласно првом услову у (8.3-2), (8.3-4) мења облик и гласи (Koch, 1998):

$$\text{tr}(\mathbf{DV}_i) = \mathbf{p}_i. \quad (8.3-5)$$

Уколико постоји симетрична матрица $\mathbf{D}$, квадратна форма $\mathbf{I}^T \mathbf{DI}$ представља најбољу инваријантну квадратну непомерену оцену од $\mathbf{p}^T \boldsymbol{\sigma}$, која доводи до минимума од (8.3-4) и задовољава услове (8.3-3) и (8.3-5).

Да би минимизирали (8.3-4), непознате варијансе садржане у $\mathbf{K}_1$ изједначавају се са један, јер су сходно (8.2.1-5), дате приближне вредности $\sigma_i^2 \alpha_i^2$. Дакле, вредности σ_i^2 су блиске јединици, а приближна матрица коваријанси $\mathbf{K}_0$ гласи:

$$\mathbf{K}_0 = \sum_{i=1}^k \mathbf{V}_i. \quad (8.3-6)$$

Оцењивачи компонената варијанси зависе од приближних вредности α_i^2 и веома је тешко доћи до јединственог најбољег решења. Сагласно томе, често се изводе изрази за *локалне најбоље инваријантне квадратне непомерене оцењиваче*.

Да би се извршило минимизирање функције (8.3-4) уз задовољење услова (8.3-3) и (8.3-5) формира се Лагранжова функција облика:

$$\mathbf{w}(\mathbf{D}) = 2\text{tr}(\mathbf{DK}_0 \mathbf{DK}_0) - 4\text{tr}(\mathbf{DA} \boldsymbol{\Lambda}^T) - 4 \sum_{i=1}^k \lambda_i (\text{tr}(\mathbf{DV}_i) - \mathbf{p}_i). \quad (8.3-7)$$

Изједначавањем првих извода функције (8.3-7) са нулом, доводи до израза облика:

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{D} \mathbf{K}_0 - \frac{1}{2} (\mathbf{A} \mathbf{A}^T + \mathbf{A}^T \mathbf{A}) - \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{V}_i = \mathbf{0}. \quad (8.3-8)$$

Матрицом $\mathbf{I} - \mathbf{R}$, где је $\mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{K}_0^{-1}$ ортогонални пројекциони оператор, врши се пројектовање из n -димензионалног простора на простор дефинисан колонама матрице $\mathbf{A}$ која је слободног ранга, у ознаци $\mathbf{R}(\mathbf{A})$ при чему важи услов $(\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{A} = \mathbf{0}$. С обзиром да је $\mathbf{D}$ симетрично, уводи се симетрична матрица $\mathbf{W} = \mathbf{K}_0^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{R})$ која задовољава услов $\mathbf{W}\mathbf{A} = \mathbf{0}$, а сходно (8.3-3) и следећи услов

$$\mathbf{W} \mathbf{K}_0 \mathbf{D} \mathbf{K}_0 \mathbf{W} = \mathbf{D}. \quad (8.3-9)$$

Множењем (8.3-8) слева и с десна са $\mathbf{W}$, долази се до решења $\hat{\mathbf{D}}$ од $\mathbf{D}$, тј.

$$\hat{\mathbf{D}} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{W} \mathbf{V}_i \mathbf{W} \quad \text{са} \quad \mathbf{W} = \mathbf{K}_0^{-1} - \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{K}_0^{-1}. \quad (8.3-10)$$

Заменом (8.3-10) у (8.3-5) даје

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \text{tr}(\mathbf{W} \mathbf{V}_i \mathbf{W} \mathbf{V}_j) = \mathbf{p}_j, \quad \text{за} \quad \mathbf{j} \in (1, 2, \dots, k). \quad (8.3-11)$$

Уколико $\mathbf{p}^T \boldsymbol{\sigma}$ представља оцењивач од $\mathbf{p}^T \boldsymbol{\sigma}$, тада је:

$$\mathbf{p}^T \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{l}^T \hat{\mathbf{D}} \mathbf{l} = \lambda^T \mathbf{q}, \quad (8.3-12)$$

са:

$$\lambda = (\lambda_i) \quad \text{и} \quad \mathbf{q} = (\mathbf{q}_i) = \mathbf{l}^T \mathbf{W} \mathbf{V}_i \mathbf{W} \mathbf{l} \quad \text{за} \quad \mathbf{i} \in (1, 2, \dots, k).$$

С обзиром да је $\hat{\mathbf{v}} = -\mathbf{K}_0 \mathbf{W} \mathbf{l}$, тада је:

$$\mathbf{q} = (\mathbf{q}_i) = (\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{V}_i \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{v}^T), \quad \text{за} \quad \mathbf{i}, \mathbf{j} \in (1, 2, \dots, k). \quad (8.3-12a)$$

Ако означимо да је:

$$\mathbf{H} = \text{tr}(\mathbf{W} \mathbf{V}_i \mathbf{W} \mathbf{V}_j) \quad \text{са} \quad \mathbf{i}, \mathbf{j} \in (1, 2, \dots, k), \quad (8.3-12b)$$

тада се на основу (8.3-11) добија израз облика $\mathbf{H}^T \lambda = \mathbf{p}$, који заједно са (8.3-12) дефинише **локални најбољи инваријантни квадратни непомерени оцењивач** $\hat{\mathbf{p}}^T \sigma$ од $\mathbf{p}^T \sigma$, као:

$$\hat{\mathbf{p}}^T \sigma = \mathbf{p}^T \mathbf{H}^- \mathbf{q}, \quad (8.3-13)$$

односно:

$$\hat{\sigma} = \mathbf{H}^- \mathbf{q}. \quad (8.3-14)$$

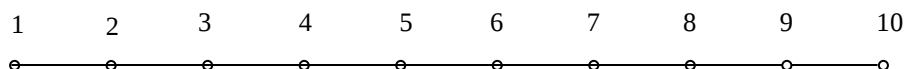
Оцењивач је **јединствен** и не зависи од уопштене инверзије матрице $\mathbf{H}$.

Оцене од σ_i^2 се добијају итеративно, а број итерација зависи од приближних вредности α_i^2 и геометрије модела.

Поред строгих решења, користе се и нека поједностављена која доводе до истих резултата, али са нешто већим бројем итерација. Тако, на пример, Forstner (Koch, 1988) предлаже следеће изразе:

$$\hat{\sigma} = \mathbf{H} \mathbf{q}, \text{ са } \mathbf{H} = [\text{diag}(1/\text{tr}(\mathbf{WV}_i))] \text{ и } \mathbf{q} = \hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{K}_0^{-1} \zeta_i \mathbf{K}_0^{-1} \hat{\mathbf{v}}^T. \quad (8.3-15)$$

ПРИМЕР 8.3-1: На основу симулираних вредности резултата мерења дужина на калибрационој бази, оценити компоненте варијанси мерења.



Rasponi dužina (km):

od	do	X_{ij}	od	do	X_{ij}	od	do	X_{ij}
1	2	0.100	2	3	0.100	3	4	0.090
	3	0.199		4	0.190		5	0.100
	4	0.290		5	0.200		6	0.300
	5	0.300		6	0.400		7	0.500
	6	0.500		7	0.600		8	0.800
	7	0.700		8	0.900		9	1.500
	8	1.000		9	1.600		10	2.000
	9	1.700		10	2.010			
	10	2.200						

1. Модел мерења:

$$\mathbf{l}_{ij} + \mathbf{v}_{ij} = \mathbf{x}_{1j} - \mathbf{x}_{1i} + \mathbf{a} \text{ ili } \mathbf{Ax} = \mathbf{l} + \mathbf{v}$$

$$\mathbf{K}_1 = \sigma_1^2 \mathbf{V}_1 + \sigma_2^2 \mathbf{V}_2$$

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_k$$

$$\mathbf{V}_2 = \text{diag}(\mathbf{l}_1^2, \mathbf{l}_2^2, \dots, \mathbf{l}_k^2)$$

Варијанса појединог мерења: $\sigma_{i_{ij}}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \mathbf{l}_{ij}^2$

2. Формирање матрице $A_{27 \times 11}$:

Модел симулирања грешака мерења: *усвајамо вредности* $\sigma_1 = 2$ и $\sigma_2 = 1$

$\mathbf{e}_i = \sigma_1 \cdot \mathbf{t}_{1i} + \sigma_2 \cdot \mathbf{t}_{2i} \cdot \mathbf{l}_i$, где су t_{1i} и t_{2i} вектори случајних бројева.

F = мерено – приближно = e_i вектор слободних чланова (у mm)

-0,320013
-0,190396
1,5069792
0,0388075
0,9096777
1,6915767
3,5402559
1,5100425
-3,264629
1,2239989
-0,158578
-1,31274
-3,577634
-4,130065
-0,973587
-0,329057
-6,004811
0,9211733
2,4834235
-1,148195
-1,155774
-2,940088
1,4768284
-5,581073

Формирање матрице A (коэффициент у последњој колони односи се на адициону константу, док су остали коэффицијенти формирани сагласно плану мерења и распореду тачака, а према наведеном моделу грешака):

X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}	X_{16}	X_{17}	X_{18}	X_{19}	X_{110}	a
1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
-1	1	0	0	0	0	0	0	0	1
-1	0	1	0	0	0	0	0	0	1
-1	0	0	1	0	0	0	0	0	1
-1	0	0	0	1	0	0	0	0	1
-1	0	0	0	0	1	0	0	0	1
-1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
-1	0	0	0	0	0	0	1	0	1
-1	0	0	0	0	0	0	0	1	1
0	-1	1	0	0	0	0	0	0	1
0	-1	0	1	0	0	0	0	0	1
0	-1	0	0	1	0	0	0	0	1
0	-1	0	0	0	1	0	0	0	1
0	-1	0	0	0	0	1	0	0	1
0	-1	0	0	0	0	0	1	0	1
0	-1	0	0	0	0	0	0	1	1

Сагласно (8.3-15):

$$\mathbf{q} = \begin{vmatrix} 31,914241 \\ 20,476173 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{vmatrix} 0,147691 & 0 \\ 0 & 0,053242 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{s} = \begin{vmatrix} 4,713 \\ 1,090 \end{vmatrix}$$

Коначно, већ након прве итерације добија се очекивано решење:

$$s_1 = \sqrt{4.713} = 2.17$$

$$s_2 = \sqrt{1.090} = 1.04$$

9. ИНТЕРПОЛАЦИЈА ПО МЕТОДИ НАЈМАЊИХ КВАДРАТА, ФИЛТРИРАЊЕ И КОЛОКАЦИЈА

9.1. Уводна разматрања

У претходним лекцијама рачуна изравнања упознали смо се са применама методе најмањих квадрата приликом решавања проблема изравнања које је укључивало случајне променљиве и одговарајуће математичке моделе. У проблемима те врсте, одабрани математички модели су супериорно третирани у односу на дати узорак, док је принцип најмањих квадрата коришћен да би се оценио други скуп случајних променљивих који је конзистентан одабраном моделу. Дакле, процедура изравнања третирана је као једна врста статистичке оценое у случају када је математички модел био *a priori* познат.

Поред у таквим, оцена параметара по методи најмањих квадрата може се применити и у случајевима који су у основи ослоњени на концепте стохастичких процеса. Један од модела који припада таквим процесима јесте **предикција** по методи најмањих квадрата где је **време** та интересантна променљива уз помоћ које се оцењује (предвиђа) шта ће се десити у будућности на основу сазнања из праћења претходних догађања (прошлости). У геодезији, бројни су случајеви где се уместо времена, као тражена величина појављује положај или позиција, при чему се у значајној мери користе интерполација и екстраполација по методи најмањих квадрата. Задатак интерполације јесте да оцени вредност променљиве (интерполује) у положају (или тренутку) различитом у односу на опажане, дате вредности. Како и сами дати или опажани подаци садрже одређене грешке, процедура оцењивања се реализује кроз **филтрирање** присутних нежељених утицаја и изводи оцена за задате услове, што се у терминологији оцењивања назива **филтрирањем по методи најмањих квадрата** (*least square filtering*). Приликом интерполације, користе се линеарни и нелинеарни модели. Први су чешће заступљени тако да ће се њима и поклонити значајнија пажња у овом поглављу. Осим интерполације, приликом решавања геодетских проблема, уопштени принцип најмањих квадрата уз комбиновање класичног изравнања са интерполацијом и филтрирањем довели су до појаве специфичне технике обраде, познатије као **колокација по методи најмањих квадрата** (*least square collocation*), (Mikhail and Ackerman, 1976).

9.1.1. Случајне (стохастичке) функције

Да би се објаснио појам интерполације или филтрирања по методи најмањих квадрата, неопходно је објаснити појам случајних функција. Случајна или

стохастичка функција јесте функција која је одређена исходом експеримента и која понављањем експеримента може имати различите реализације. Њу чини скуп случајних променљивих. Реализација случајне функције (*random function, sample function*, функција узорка) јесте дати скуп вредности функције који варира од једног до другог експеримента. Општи израз *случајна функција* (*random function*) користи се да би истакао случајну секвенцу (*random sequence*), односно случајни процес (*random process*). Код случајних секвенци, функционалне променљиве су дискретне (целобројне вредности), док код случајних процеса променљиве могу имати било коју вредност. Случајне функције су специфициране моментима (обично са прва два) њихових функција расподеле. Први момент јесте средња вредност, док је други момент коваријанса (варијанса). Ако са $\mathbf{s}(\mathbf{u})$ означимо случајну функцију, тада се средња вредност $\mu_s(\mathbf{u}_1)$ за одређену вредност $\mathbf{u}_1$ дефинише као:

$$\mu_s(\mathbf{u}_1) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \mathbf{s}_k(\mathbf{u}_1). \quad (9.1.1-1)$$

Слично, заједнички момент (који се назива *аутокорелационом функцијом*) $\mathbf{K}_s(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 + \Delta)$ за две различите вредности $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_1 + \Delta$ дефинисан је као:

$$\mathbf{K}_s(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 + \Delta) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \mathbf{s}_k(\mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{s}_k(\mathbf{u}_1 + \Delta). \quad (9.1.1-2)$$

У практичним применама, μ_s и $\mathbf{K}_s$ често су сасвим довољни приликом одређења случајне функције.

9.1.2. Стационарне, нестационарне и ергодичне функције

Уколико се у току реализације услови експеримента (од чега зависи исход случајне функције) не мењају, тада се ради о *стационарним функцијама*. У противном, ради се о *нестационарним функцијама*. Код нестационарних функција, вредности μ_s и $\mathbf{K}_s$ се мењају са променом вредности $\mathbf{u}_1$, док се код стационарних функција μ_s и $\mathbf{K}_s$ не мењају са променом $\mathbf{u}_1$. То има за последицу да је код стационарних функција средња вредност константна (најчешће једнака нули) док аутокорелациона функција једино зависи од инкремента Δ .

Да би се из датих података оценили средња вредност и аутокорелација, неопходно је обезбедити значајан обим реализација случајне функције $\mathbf{s}_k$,

што је веома често непрактично и захтева посебан третман. У већини практичних случајева, могуће је описати карактеристике стационарне функције из само једне реализације. Наиме, ако су средња вредност и аутокорелација

$$\mu_s(\mathbf{k}) = \lim_{U \rightarrow \infty} \frac{1}{U} \int_0^U s_k(\mathbf{u}) d\mathbf{u}, \quad (9.1.2-1)$$

$$K_s(\Delta, \mathbf{k}) = \lim_{U \rightarrow \infty} \frac{1}{U} \int_0^U s_k(\mathbf{u}) \cdot s_k(\mathbf{u} + \Delta) d\mathbf{u}, \quad (9.1.2-2)$$

исти, независно од одабране реализације $\mathbf{k}$, тада се за стационарну случајну функцију каже да припада тзв. **ergodic** функцијама. Важна карактеристика таквих функција огледа се у особини - када је средња вредност таквих функција једнака нули, тада је:

$$\lim_{\Delta \rightarrow \infty} K_s(\Delta) = 0. \quad (9.1.2-3)$$

Другим речима, када је функција стационарна и има нормалну расподелу (што је у пракси честа појава) са средњом вредношћу нула и коваријационом функцијом која конвергира ка нули при неодређеном повећању интервала Δ , тада се ради о тзв. **ergodic** функцији. Код **ергодских** функција, на основу података једног узорка извлаче се закључци о особинама сличних, сродних или других хомогених узорака.

9.1.3. Вишедимензионалне случајне функције – случајна поља

Уколико се уместо случајне функције са једном променљивом $\mathbf{u}$ која може али не мора бити време, користи n -димензионални вектор случајних функција (вектор процеса) са такође једном независном променљивом $\mathbf{u}$, тада је изглед вектора следећи:

$$\mathbf{s}(\mathbf{u}) = [s_1(\mathbf{u}) \ s_2(\mathbf{u}) \ \dots \ s_n(\mathbf{u})]^T. \quad (9.1.3-1)$$

У том случају, средња вредност је $\mathbf{n}$ -вектор μ_s , али је концепт корелације другачији. Наиме, поред аутокорелисаних (аутоковаријационих) функција за свако $s_i(\mathbf{u})$ постоје и **међукорелационе** (кроскорелационе, међуваријационе или кросковаријационе) функције за сваки пар $s_i(\mathbf{u})$ и $s_j(\mathbf{u})$, за $i \neq j$. За последицу имамо да се коваријациона функција $\mathbf{K}(\mathbf{u})$ замењује коваријационом матрицом $\mathbf{K}(\mathbf{u})$. За стационарне случајне векторе, матрица $\mathbf{K}(\mathbf{u})$ је **симетрична** и сваки пар $s_i(\mathbf{u})$ и $s_j(\mathbf{u})$ за $i \neq j$ јесте **једино**

стационарно корелисана, тј. **међуковаријациона** функција једино зависи од разлике ($\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j$).

Иако вектор садржи више случајних функција са једном променљивом $\mathbf{u}$, случајно поље (*random field*) чини само **једна** случајна функција са више независних променљивих. На пример, $\mathbf{s}(\mathbf{u})$ је случајно поље које је функција вектора случајних променљивих $\mathbf{u}$. Брзина ветра јесте пример за четвородимензионално случајно поље, где $\mathbf{u}$ укључује четири независне променљиве – време и три димензије Еуклидовог простора. Код поља, концепт стационарности замењује се концептом **хомогености** и **изотропије**. За поље се каже да је хомогено ако му је средња вредност константна, а аутоковаријације зависе од међусобног растојања вектора (по правцу и интензиту) између различитих тачака у пољу, а не и од њихових апсолутних положаја. Уколико су аутоковаријације инваријантне у односу на ротацију, тј. уколико зависе само од величине међусобног растојања вектора, тада је поље не само **хомогено** већ и **изотропно**.

Вишедимензионална случајна функција представља комбинацију до сада објашњених појмова. Случајно векторско поље чини више случајних функција (или процеса) од којих сваку чини функција вектора променљивих $\mathbf{u}$, односно:

$$\mathbf{s}(\mathbf{u}) = [\mathbf{s}_1(\mathbf{u}) \ \mathbf{s}_1(\mathbf{u}) \ \dots \ \mathbf{s}_1(\mathbf{u})]^T. \quad (9.1.3-2)$$

Особине тако комплексног поља описују се просечним вредностима појединих параметара поља.

9.1.4. Линеарна интерполација и филтрирање

У примењеним наукама и инжењерству често се јавља потреба за оцењивањем случајне величине на основу расположивих података. Генерално, случајна величина често се приказује као нелинеарна функција променљивих репрезентована датим подацима, што је у том случају понекад веома значајан аналитички изазов. Из тих разлога, да би се проблем поједноставио, често се користе линеарни модели те отуда и назив линеарна интерполација и филтрирање. Ради објашњења интерполације и филтрирања дефинисаћемо три случајне функције $\mathbf{l}(\mathbf{u})$, $\mathbf{s}(\mathbf{u})$, $\mathbf{r}(\mathbf{u})$, такве да важи однос:

$$\mathbf{l}(\mathbf{u}) = \mathbf{s}(\mathbf{u}) + \mathbf{r}(\mathbf{u}). \quad (9.1.4-1)$$

Нека је $\mathbf{l}(\mathbf{u})$ функција опажања, $\mathbf{r}(\mathbf{u})$ грешка мерења (шум), а $\mathbf{s}(\mathbf{u})$ сигнал или одговор (реакција, одзив енг. *response*) који је неопходно оценити.

Интерполација и филтрирање представљају проблеме проналажења оцено $\hat{\mathbf{s}}(\mathbf{u}_0)$ случајне функције $\mathbf{s}(\mathbf{u}_0)$ у $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ на основу реализованих вредности $\mathbf{l}(\mathbf{u})$ дискретног скупа функција $\mathbf{l}(\mathbf{u}_1), \mathbf{l}(\mathbf{u}_2), \dots, \mathbf{l}(\mathbf{u}_n)$. Оцена се тражи тако да $\hat{\mathbf{s}}(\mathbf{u}_0)$ представља линеарну комбинацију $\mathbf{l}(\mathbf{u}_i)$ вредности функција или:

$$\hat{\mathbf{s}}_0 = \hat{\mathbf{s}}(\mathbf{u}_0) = \mathbf{a}^T \mathbf{l}, \quad (9.1.4-2)$$

где је $\mathbf{a}^T = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \mathbf{a}_n]$ вектор коефицијената, а $\mathbf{l} = [\mathbf{l}(\mathbf{u}_1) \ \mathbf{l}(\mathbf{u}_2) \ \dots \mathbf{l}(\mathbf{u}_n)]^T$ вектор резултата мерења (дати подаци).

Два су специјална случаја од (9.1.4-1):

- Када је $\mathbf{r}(\mathbf{u}) = 0$, тада је $\mathbf{l}(\mathbf{u}) = \mathbf{s}(\mathbf{u})$, односно грешке мерења су занемарљиве, што представља проблем *интерполације* где је $\mathbf{s}(\mathbf{u}_0)$ исто што и $\mathbf{l}(\mathbf{u}_0)$;
- Када је шум $\mathbf{r}(\mathbf{u}) \neq 0$ и тада се оцењује $\mathbf{s}(\mathbf{u}_0)$ у $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ на основу датих вредности $\mathbf{l}(\mathbf{u}_i)$, што представља проблем *филтрирања*.

Уколико је независна променљива $\mathbf{u}$ време, тада се процес оцењивања назива *предикцијом* (*prediction*). Код предикције, дати подаци репрезентују *прошлост* (*past*) случајне функције док се вредности сигнала оцењују у неком *будућем* (*future*) времену, времену које долази или очекујућем времену. У сваком случају оцењивач је линеаран. Но, пре детаљнијих разматрања појмова интерполације и филтрирања, неопходно је представити концепт корелационих (коваријационих) функција. Под условом да се ради о стационарним функцијама, треба претпоставити да је средња вредност једнака нули, тј.

$$\begin{aligned} \mu_s &= \mathbf{E}(\mathbf{s}) = 0 \\ \mu_r &= \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \\ \mu_l &= \mathbf{E}(\mathbf{l}) = 0 \end{aligned} \quad (9.1.4-3)$$

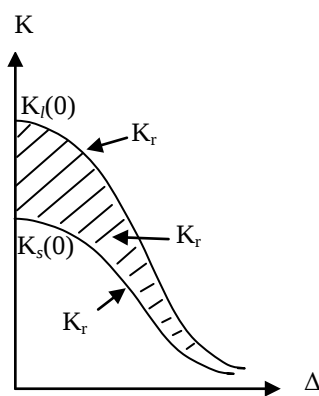
Стационарност се огледа пре свега у значењу да је аутокорелација $\mathbf{K}$ једино у функцији помака Δ . Функција која повезује $\mathbf{K}$ и Δ назива се *корелационом* или *коваријационом* функцијом. Генерално, постоје три корелационе функције: $\mathbf{K}_l(\Delta)$, $\mathbf{K}_s(\Delta)$ и $\mathbf{K}_r(\Delta)$, које су под претпоставком да су средње вредности једнаке нули и да су $\mathbf{r}$ и $\mathbf{s}$ стационарно некорелисане, повезане изразом облика:

$$\mathbf{K}_l(\Delta) = \mathbf{K}_s(\Delta) + \mathbf{K}_r(\Delta), \quad (9.1.4-4)$$

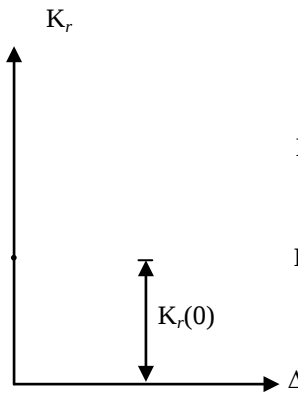
и

$$K_{is}(\Delta) = K_s(\Delta) \quad (9.1.4-5)$$

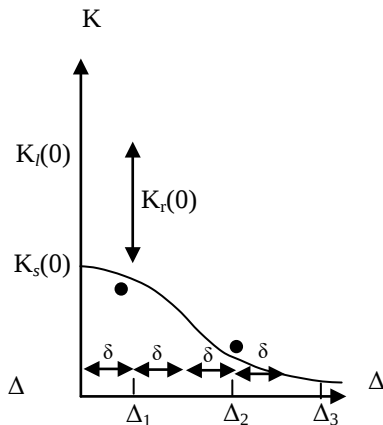
Слика 9.1.4-1 илуструје израз (9.1.4-4) где осенчена површ репрезентује корелациону функцију шума.



Слика 9.1.4-1а



Слика 9.1.4-1б



Слика 9.1.4-1ц

У пракси шум $\mathbf{r}(\mathbf{u})$ се најчешће третира као некорелисана величина, па се стога $K_r(\Delta)$ може сматрати као појединачна тачка (репрезентује варијансу шума, слика 9.1.4-1б). Три коваријационе функције, у нашем случају, представљене су на слици 9.1.4-1ц и под условом да $\Delta \rightarrow 0$ однос између варијанси изгледа:

$$K_I(0) = K_s(0) + K_r(0). \quad (9.1.4-6)$$

Коваријационе функције су или теоријски познате или се могу дефинисати на основу експерименталних података, о чему ће бити више речи касније. Када се функција успостави, коваријанса $K(\Delta)$ се може одредити за било које две, за вредност Δ међусобно одвојене тачке.

9.2. Линеарна интерполација стационарних функција

Као што је истакнуто, у првом случају, подаци који се односе на $\mathbf{s}(\mathbf{u})$ могу се користити замењујући $\mathbf{l}$ са $\mathbf{s}$. Нека је одступање оцено $\hat{\mathbf{s}}$ од $\mathbf{s}$ једнако:

$$\mathbf{v} = \mathbf{s}(\mathbf{u}_0) - \hat{\mathbf{s}}(\mathbf{u}_0) = \mathbf{s}_0 - \mathbf{a}^T \mathbf{s}(\mathbf{u}), \quad (9.2-1)$$

или

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{a}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{s}_0 \\ \mathbf{s}(\mathbf{u}) \end{bmatrix}, \quad (9.2-2)$$

при чему је варијанса одступања једнака:

$$\sigma_v^2 = \mathbf{J} \Sigma \mathbf{J}^T, \quad (9.2-3)$$

где су $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{a}^T \end{bmatrix}$ одговарајућа **Јакобијан** матрица. Коваријациона матрица случајних променљивих дефинисана је као:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{s_0}^2 & \sigma_{s_0 \mathbf{s}} \\ \sigma_{\mathbf{s} s_0} & \Sigma_{\mathbf{s} \mathbf{s}} \end{bmatrix}, \quad (9.2-4)$$

и представља квадратну симетричну матрицу аутоковаријанси и кросковаријанси са $\sigma_{s_0}^2$ варијансом од s_0 (скалар) који је једнак $\mathbf{C}_s(0)$, $\sigma_{\mathbf{s} s_0} = \sigma_{s_0 \mathbf{s}}^T$ је $\mathbf{n} \times 1$ вектор **међуковаријанси** између s_0 и сваког елемента $\mathbf{s}(\mathbf{u}_i)$ од $\mathbf{s}$, док је $\Sigma_{\mathbf{s} \mathbf{s}}$ $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ симетрична аутоковаријациона матрица од $\mathbf{s}$. Дијагонални елементи матрице $\Sigma_{\mathbf{s} \mathbf{s}}$ су једнаки $\mathbf{C}_s(0)$ док се вандијагонални елементи добијају на основу коваријационе матрице користећи $\Delta_{ij} = \mathbf{u}_i \mathbf{u}_j$ као аргументе.

Применом израза (9.2-2) и (9.2-1) следи:

$$\sigma_v^2 = \sigma_{s_0}^2 - 2\mathbf{a}^T \sigma_{\mathbf{s} s_0} + \mathbf{a}^T \Sigma_{\mathbf{s} \mathbf{s}} \mathbf{a}, \quad (9.2-5)$$

која представља средњу квадратну грешку или варијансу интерполације. Да би варијанса интерполације била минимална, вектор $\mathbf{a}$ се бира уз услов:

$$\frac{\partial \sigma_v^2}{\partial \mathbf{a}} = -2\sigma_{\mathbf{s} s_0}^T + 2\mathbf{a}^T \Sigma_{\mathbf{s} \mathbf{s}} = 0, \quad (9.2-6)$$

тако да након транспоновања:

$$\mathbf{a} = \Sigma_{\mathbf{s} \mathbf{s}}^{-1} \sigma_{\mathbf{s} s_0}, \quad (9.2-7)$$

коначан облик израза за оцену тачности интерполације гласи:

$$\hat{\mathbf{s}}_0 = \sigma_{s_0 s} \cdot \Sigma_{ss}^{-1} \cdot \mathbf{s}, \quad (9.2-8)$$

а њена мера прецизности рачуна се као:

$$\sigma_{\hat{s}_0}^2 = \sigma_v^2 = \sigma_{s_0}^2 - 2\mathbf{a}^T \sigma_{ss_0} + \mathbf{a}^T \Sigma_{ss} \mathbf{a}, \quad (9.2-9)$$

и уз уважавање (9.2-7), следи:

$$\sigma_{\hat{s}_0}^2 = \sigma_{s_0}^2 - \mathbf{a}^T \sigma_{ss_0} = \mathbf{K}_s(0) - \mathbf{a}^T \sigma_{ss_0} = \mathbf{K}_s(0) - \sigma_{ss_0}^T \Sigma_{ss}^{-1} \sigma_{ss_0} \quad (9.2-10)$$

Коначно:

$$\sigma_{\hat{s}_0}^2 = \sigma_{s_0}^2 - \mathbf{a}^T \Sigma_{ss} \mathbf{a} = \mathbf{K}_s(0) - \mathbf{a}^T \Sigma_{ss} \mathbf{a}. \quad (9.2-11)$$

9.3. Линеарно филтрирање стационарних функција

Линеарно филтрирање у пракси се чешће користи у односу на интерполацију. На сличан начин као у случају интерполације, оцена $\hat{\mathbf{s}}_0$ филтрирања добија се на следећи начин:

$$\mathbf{v} = \mathbf{s}_0 - \mathbf{a}^T \mathbf{l} = \begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{a}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{s}_0 \\ \mathbf{l} \end{bmatrix}, \quad (9.3-1)$$

односно:

$$\sigma_v^2 = \begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{a}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{a} \end{bmatrix}. \quad (9.3-2)$$

Коваријациона матрица Σ добија се као:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{s_0}^2 & \sigma_{s_0 \mathbf{l}} \\ \sigma_{\mathbf{l} s_0} & \Sigma_{\mathbf{ll}} \end{bmatrix}. \quad (9.3-3)$$

Варијанса $\sigma_{s_0}^2$ у Σ једнака је $\mathbf{K}_s(0)$, вектор $\sigma_{s_0 \mathbf{l}}$ садржи међуковаријансе (кросковаријансе) $\mathbf{K}_{s\mathbf{l}}(\Delta)$, сагласно (9.1.4-5). Коначно, $\Sigma_{\mathbf{ll}}$ представља коваријациону матрицу датих величина, чији су дијагонални елементи исти и једнаки као у $\mathbf{K}_\mathbf{l}(0)$, а вандијагонални су исти и једнаки као у Σ_{ss} .

Проширењем σ_v^2 и минимизирањем њеног диференцијала, добија се израз сличан (9.2-7), тј:

$$\mathbf{a} = \Sigma_{\Pi}^{-1} \sigma_{Is_0} . \quad (9.3-4)$$

Коначно:

$$\hat{\mathbf{s}}_0 = \sigma_{s_0 I} \cdot \Sigma_{\Pi}^{-1} \cdot \mathbf{I} , \quad (9.3-5)$$

док је,

$$\sigma_{\hat{s}_0}^2 = \mathbf{K}_I(0) - \mathbf{a}^T \Sigma_{\Pi} \mathbf{a} . \quad (9.3-6)$$

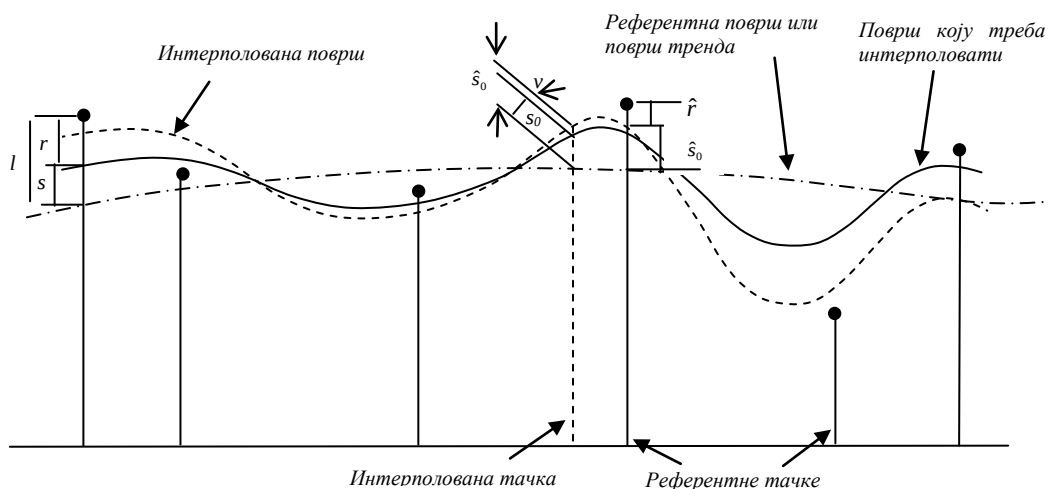
На крају, може се закључити да су интерполација и филтрирање ограничени на оцењивање искључиво једне случајне функције. У практичним применама, најчешћи су случајеви дводимензионалних и тродимензионалних случајних вектора. И интерполација и филтрирање се могу проширити и на вишедимензионалне случајеве.

9.4. Површи тренда и коваријациона функције

Случајне стационарне функције карактеришу константна средња вредност и чињеница да корелациона функција $\mathbf{K}(\Delta)$ конвергира средњој вредности када $\Delta \rightarrow \infty$. Због једноставности, приказана формулација интерполације и филтрирања претпоставила је нулту средњу вредност, тј. $\mathbf{K}(\Delta) \rightarrow 0$ када $\Delta \rightarrow \infty$. Уколико се код датих резултата мерења таква једна претпоставка узме у обзир, тада се **тренд** одмах на почетку мора искључити. Општа дефиниција подразумева тренд као компоненту случајног карактера чија периода је већа од периоде узорка прикупљених резултата мерења.

Тренд се увек представља линеарном функцијом или полиномом нижег реда. Дати скуп података се претходно обради како би се отклонио тренд, трансформацијом података у другу површ која се назива референтном или површи тренда (слика 9.4-1). На слици, површ сигнала (мора се интерполовати) уместо датумском површи представља се као површ тренда. Као последица, дате вредности I_i у референтним тачкама (датим) мериле би се у односу на површ тренда. Површ сигнала и дате тачке понашају се по принципу случајности у односу на површ тренда, респектујући чињеницу да су средње вредности једнаке нули, а што је један од услова отклањања тренда.

Отклањање или одбацивање тренда јесте веома значајна операција. Уколико се он адекватно не одбаци, појавиће се значајне дисторзије које ће угрозити резултате. Из тих разлога се и тип функције одабране да репрезентује површ тренда у основи бира према природи датих података. Уколико се заиста с правом претпоставља да су деформације присутне, тада је важно открити њихов тренд и искључити га. Након адекватног избора функције тренда, даља обрада података реализује се применом методе најмањих квадрата, поготово ако се има у виду често веома респективан број сувишних мерења. Једна од највише примељиваних процедура јесте провлачење (*фитовање*) површи или криве кроз дати скуп тачака по методи најмањих квадрата. Када се дати скуп моделује са одговарајућом кривом или површи и када се подаци даље ослањају на нови модел, тада се може срачунати и коваријациона функција. Рачунање тренда може се комбиновати са интерполацијом или филтрирањем у једној операцији, која се назива *колокацијом*.



Слика 9.4-1: Дата, интерполована и површ тренда

Иако је у специјалним случајевима могуће теоријски одредити коваријациону функцију, често је неопходно исту дефинисати из датих података. С обзиром да смо се ограничили на стационарне случајне функције (или поља), коваријациона функција има општи изглед дефинисан сликама 9.1-4. Полазећи од једнодимензионалног случаја, варијансе и коваријансе се из датих података I_i могу срачунати као:

$$K_1(0) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I_k^2, \quad (9.4-1)$$

$$K_1(\Delta_k) = \frac{1}{n_k} \sum_{i < j} I_i I_j, \quad (9.4-2)$$

респективно.

Израз (9.4-1) показује да се варијанса рачуна поделом збира кавадрата датих вредности I_k са укупним бројем референтних тачака n . Уколико нема шумова или грешака мерења, срачуната вредност $K_1(0)$ биће идентична са $K_s(0)$, варијансом сигнала која се одређује интерполацијом. У противном, две варијансе биће различите за износ $K_r(0)$ - варијансу грешке (слика 9.1-4ц).

Рачунање вредности $K_1(\Delta)$ на основу датих података, претпоставља поделу Δ на једнаке интервале. На пример, сходно слици 9.1-4ц, први интервал је $\Delta_1 = \delta$, други $\Delta_2 = 3\delta$ и сл, тј. вредност интервала једнака 2δ . Тако, средња вредност свих могућих n_k производа $I_i I_j$ у тачкама одвојеним за Δ_{ij} које се налазе у интервалу $\Delta_k + \delta$ се срачуна као и коваријанса $K_1(\Delta_k)$ у Δ_k , сагласно (9.4-2). Величина δ се најчешће слободно дефинише, на основу природе датих података. Након оцене извесног броја коваријационих тачака, може се дефинисати и одговарајућа коваријациона функција. Да би се дошло до одговарајућег израза функције, препоручује се скицирање положаја коваријационих тачака, као на слици 9.1-4ц. Анализом облика као и претходних знања и искустава, бира се и одговарајућа функција. Најчешће се користе синусоидна, Гаусова, експоненцијална и сл. функције. На слици 9.1-4ц, приказана је Гаусова функција облика:

$$K(\Delta) = K(0) \cdot e^{-k^2 \Delta^2}. \quad (9.4-3)$$

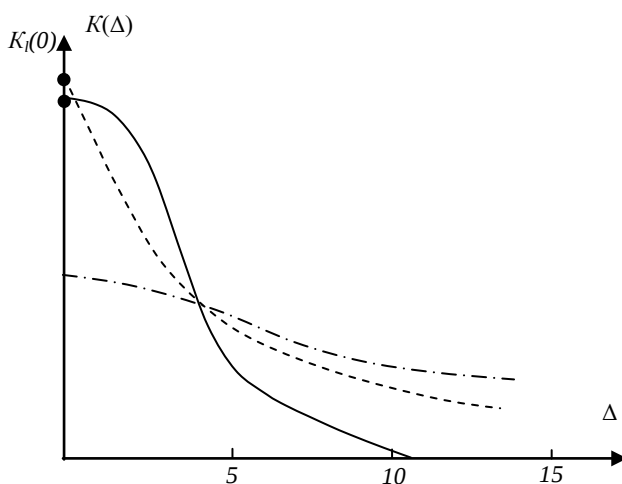
Уобичајено је да број коваријационих тачака буде већи од непознатог броја коефицијената коваријационе функције, тако да се у том случају провлачи права кроз задати скуп, по методи најмањих квадрата. На пример, у случају Гаусове криве (слика 9.1-4ц), $K(0)$ и k одређују се преко свих коваријационих тачака, осим тачке $K_1(0)$ дуж коваријационе осе, уколико се и филтрирање узима у обзир. Као што је још од раније познато у теорији најмањих квадрата, линеаризација израза (9.4-3) захтева адекватну апроксимацију приближних вредности аргумената. Уколико се интерполација реализује без филтрирања, тада ће се користити $K_1(0)$, уз услов да крива коваријационе функције кроз њу и пролази.

Када се $K(0)$ и k једном одреде, тада се коваријанса за било коју вредност Δ одређује помоћу израза (9.4-3). Коначно, могуће је дефинисати и аутоковаријациону матрицу Σ у оба случаја, интерполацији и филтрирању. У случају да се спроводи само поступак интерполације, дијагонални елемент Σ_{ss} једнак је $K_s(0)$, а који је у том случају такође једнак и са $K_1(0)$.

Недијагонални елементи у Σ_{ss} добијају се по Δ , за сваки одговарајући пар тачака и рачунају одговарајуће коваријансе према изразу (9.4-3).

У случају филтрирања, дијагонални елементи од Σ_{ll} једнаки су $K_l(0)$, што је различито од $K_s(0)$, што је уједно и главна разлика у односу на филтрирање. Преостали недијагонални елементи од $K_l(0)$ рачунају се на исти начин као код Σ_{ss} .

О значају коваријационе функције најбоље илуструје следећи симулирани проблем једнодимензионалног филтрирања. Слика 9.4-1 садржи емпиријске коваријационе функције, ограничене на Гаусову функцију и функцију експоненцијалног типа.



Слика 9.4-1: Различите функције коваријанси

До сада се углавном говорило о једнодимензионалним случајевима. Укључивањем случајних поља, тј. када је аргумент једне случајне функције вишедимензионалан, решење не представља значајан проблем, посебно ако је поље хомогено и изотропно. Тада се као инкремент Δ користи растојање између тачака. Уколико поље није изотропно, поред међусобног растојања, приликом дефинисања коваријационе функције користи се и азимут међусобног правца, што није тако чест случај. Када се користе функције случајних вектора, морају се оценити аутоковаријационе и међуковаријационе функције. Аутоковаријациона функција се одређује за сваки елемент случајног вектора, на начин описан у претходном делу. Такође, за сваки пар елемената, оцењује се и међуковаријациона функција. Уколико су међуковаријационе функције за сваки пар значајно мале вредности, $\mathbf{n}$ - димензионалних случајних вектора претвара се у $\mathbf{n}$ једнодимензионалних случајних функција. Коначно, и интерполација и

филтрирање случајних вектора може се реализовати као $\mathbf{n}$ одвојених операција при чему свака одговара једној једнодимензионалној случајној функцији.

Уколико међукорелисаност није значајна, дефинисање међуковаријационе функције изводи се на сличан начин као у случају аутоковаријационе функције. Као пример послужиће дводимензионални вектор случајних променљивих са компонентама $\mathbf{x}(\mathbf{u})$ и $\mathbf{y}(\mathbf{u})$. Аутоковаријационе функције $\mathbf{K}_{xx}(\Delta)$ и $\mathbf{K}_{yy}(\Delta)$ следе на основу (9.4-2), тј:

$$\mathbf{K}_{xx}(\Delta_k) = \frac{1}{\mathbf{n}_k} \sum_{i < j} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j, \quad (9.4-4)$$

$$\mathbf{K}_{yy}(\Delta_k) = \frac{1}{\mathbf{n}_k} \sum_{i < j} \mathbf{y}_i \mathbf{y}_j. \quad (9.4-5)$$

Међуковаријационе функције $\mathbf{K}_{xy}(\Delta)$ и $\mathbf{K}_{yx}(\Delta)$ рачунају се као:

$$\mathbf{K}_{xy}(\Delta_k) = \frac{1}{\mathbf{n}_k} \sum_{i < j} \mathbf{x}_i \mathbf{y}_j, \quad (9.4-6)$$

$$\mathbf{K}_{yx}(\Delta_k) = \frac{1}{\mathbf{n}_k} \sum_{i < j} \mathbf{y}_i \mathbf{x}_j. \quad (9.4-7)$$

Када се функције аутоковаријација и међуковаријација једном одреде, елементи коваријационих матрица Σ_{xx} , Σ_{xy} итд, одређују се на основу одабраних функција.

Метод филтрирања описан у 9.3 практично се може оценити узимајући у обзир могућност филтрирања у свакој од $\mathbf{n}$ датих референтних тачака. Наиме, за сваку $\mathbf{i}$ -ту тачку сходно изразу (9.3-5) оцена се рачуна као:

$$\hat{\mathbf{s}}_i = \sigma_{ii} \cdot \Sigma_{ii}^{-1} \cdot \mathbf{l}. \quad (9.4-8)$$

Сагласно претходним разматрањима везаним за коваријациону функцију, вектор σ_{ii} идентичан је $\mathbf{i}$ -тој колони матрице Σ_{ii} , осим у случају дијагоналног елемента σ_{ii} . Ради комплетности приказа, детаљно ће се описати претходна тврдња:

$$\sigma_{ii} = \begin{bmatrix} \sigma_{i1} \\ \sigma_{i2} \\ \dots \\ \sigma_{ii} = K_s(0) \\ \dots \\ \sigma_{in} \end{bmatrix} \text{ и } \Sigma_{ii} = \begin{bmatrix} K_1(0) & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ & K_1(0) & \dots & \sigma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & K_1(0) \end{bmatrix}, \quad (9.4-9)$$

$$\bar{\Sigma}_{ii} = \begin{bmatrix} K_s(0) & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ & K_s(0) & \dots & \sigma_{2n} \\ & & \dots & \\ & & & K_s(0) \end{bmatrix}. \quad (9.4-10)$$

Вектор σ_{ii} може се прихватити као колона квадратне матрице Σ_{ii} . Коначан вектор оцена сигнала у n референтних тачака гласи:

$$\hat{s} = \bar{\Sigma}_{ii} \Sigma_{ii}^{-1} \mathbf{1}. \quad (9.4-11)$$

Узимајући у обзир да је $\mathbf{s} + \mathbf{r} = \mathbf{1}$, оцена вектора грешака $\mathbf{r}$ гласи:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}} &= \mathbf{1} - \hat{\mathbf{s}} = (\mathbf{I} - \bar{\Sigma}_{ii} \Sigma_{ii}^{-1}) \mathbf{1} \\ \hat{\mathbf{r}} &= (\Sigma_{ii} - \bar{\Sigma}_{ii}) \Sigma_{ii}^{-1} \mathbf{1}. \end{aligned} \quad (9.4-12)$$

Матрице Σ_{ii} и $\bar{\Sigma}_{ii}$ једино се разликују по дијагоналним елементима. Израз (9.4-12) може се написати и у другом облику, као:

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{K}_r(0) \Sigma_{ii}^{-1} \mathbf{1}, \quad (9.4-13)$$

и као такав представља вектор компонената филтрираних у референтним тачкама. Уколико се протпостави да је очекивана средња вредност једнака нули, *a posteriori* оцена од $\mathbf{K}_r(0)$ се може срачунати као:

$$\hat{\mathbf{K}}_r(0) = \frac{1}{n} \hat{\mathbf{r}}^T \hat{\mathbf{r}}. \quad (9.4-14)$$

$\mathbf{K}_r(0)$ је често *a priori* познато на основу датих података (при дефинисању коваријационе функције) док се $\hat{\mathbf{K}}_r(0)$ оцењује након филтрирања тако да њихов релативан однос може послужити као индикација квалитета

филтрирања. Као пример, у оквиру једнодимензионалног проблема нека је а *приори* варијанса $K_r(0)=0.0026$, а оцена $\hat{K}_r(0)=0.019$. На основу датих показатеља може се констатовати да је 86% од r одбачено филтрирањем. Овакав тип оцене квалитета једнако је ефикасан као и референтна варијанса σ_0^2 у изравнању.

9.5. Колокација по методи најмањих квадрата

Као што је у претходним поглављима истакнуто, колокација по методи најмањих квадрата представља комбинацију техника изравнања, интерполације и филтрирања. Мориц (1972) успешно разматра могућност комбиновања техника изравнања индиректних мерења и интерполацију, тако да ће се углавном детаљније објаснити његови резултати, који ће се додатно проширити са неким специфичним техникама изравнања резултата мерења и функционално независним параметрима који се посебним условима уводе, као на пример:

$$A(l + v) + B\Delta = d, \quad (9.5-1)$$

са Σ коваријационом матрицом резултата мерења. Нови скуп еквивалентних опажања I_e може се увести као:

$$I_e + v_e = (-Al + d) + (Av), \quad (9.5-2)$$

такав да важи:

$$\begin{aligned} I_e &= -Al + d, \\ v_e &= Av, \end{aligned} \quad (9.5-3)$$

док на основу закона простирања грешака следи:

$$\Sigma_e = A\Sigma\Sigma^T, \quad (9.5-4)$$

која представља коваријациону матрицу од I_e . Израз (9.5-1) сада се може представити као:

$$v_e = -B\Delta + I_e, \quad (9.5-5)$$

и представља трансформацију технике комбинованих опажања (резултата мерења) и параметара у технику индиректних опажања. У изразу (9.5-5)

резидуали $\mathbf{v}_e$ декомпоновани су у корелисане компоненте (сигнал) $\mathbf{s}$ и шум $\mathbf{r}$, односно $\mathbf{v}_e = \mathbf{s} + \mathbf{r}$, тј:

$$\mathbf{r} + \mathbf{s} = \mathbf{l}_e - \mathbf{B}\Delta. \quad (9.5-6)$$

Поређење (9.5-6) и (9.1.4-1) показује да одузимање $\mathbf{B}\Delta$ од $\mathbf{l}_e$ резултује показатељем тренда. Значи, колокација представља симултану комбинацију оцене тренда са интерполацијом и филтрирањем.

С обзиром да су $\mathbf{s}$ и $\mathbf{r}$ случајни вектори чије су очекиване вредности нулти вектори, односно:

$$\begin{aligned} \mu_r &= E(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \\ \mu_s &= E(\mathbf{s}) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (9.5-7)$$

тј. $\mu_{v_e} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{B}\Delta$ репрезентују вектор средњих вредности од $\mathbf{l}_e$ или $E(\mathbf{l}_e)$.

Коначно:

$$\Sigma_{v_e} = E(\mathbf{l}_e - \mathbf{B}\Delta\Delta^T)(-\mathbf{B}\Delta\Delta^T = E(\mathbf{l}_e - E(\mathbf{l}_e))(\mathbf{l}_e - E(\mathbf{l}_e))^T, \quad (9.5-8)$$

по дефиницији представља коваријациону матрицу од $\mathbf{l}_e$ или:

$$\Sigma_{v_e v_e} = \Sigma_e. \quad (9.5-9)$$

Вектор опажања по природи се узима као познат у $\mathbf{n}$ тачака (референтне или дате тачке). Заједно са оценом Δ , често се жели интерполовати и филтрирати у неком другом скупу од $\mathbf{m}$ тачака где ће се по правилу користити $\mathbf{s}_0$, који представља вектор оцене сигнала у m тачака које се најчешће разликују у односу на дати, познати скуп тачака у којима су реализована мерења. Комбиновањем два вектора $\mathbf{s}_0$ и $\mathbf{v}_e$ у један, као:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_0 \\ \mathbf{v}_e \end{bmatrix} \text{ са } \mathbf{p} = \mathbf{m} + \mathbf{c}, \quad (9.5-10)$$

израз (9.5-5) постаје:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{s}_0 \\ \mathbf{v}_e \end{bmatrix} + \mathbf{B}\Delta = \mathbf{l}_e = \mathbf{f}, \quad (9.5-11)$$

или:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathbf{\Lambda} = \mathbf{f} . \quad (9.5-12)$$

Узимајући да је *a priori* варијанса једнака јединици, коваријациона и кофакторска матрица од (9.5-12) гласе:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_{s_0 s_0} & \mathbf{\Sigma}_{s_0 e} \\ \mathbf{\Sigma}_{s_0 e} & \mathbf{\Sigma}_e \end{bmatrix} = \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{s_0 s_0} & \mathbf{Q}_{s_0 e} \\ \mathbf{Q}_{s_0 e} & \mathbf{Q}_e \end{bmatrix} . \quad (9.5-13)$$

Оцена од $\mathbf{\Lambda}$ коначно гласи:

$$\mathbf{\Lambda} = (\mathbf{B}^T \mathbf{W}_e \mathbf{B})^{-1} (\mathbf{B}^T \mathbf{W}_e \mathbf{f}) , \quad (9.5-14)$$

где је: $\mathbf{Q}_{\Lambda\Lambda} = (\mathbf{B}^T \mathbf{W}_e \mathbf{B})^{-1}$.

Оцена $\hat{\mathbf{s}}_0$ филтрираног сигнала у $\mathbf{m}$ тачака гласи:

$$\hat{\mathbf{s}}_0 = \mathbf{\Sigma}_{s_0 e} \mathbf{\Sigma}_e^{-1} (\mathbf{I}_e - \mathbf{B}\mathbf{\Lambda}) . \quad (9.5-15)$$

Уколико је изравнање засновано на индиректним опажањима, тада се $\mathbf{I}_e$ у претходној једначини замењује са директним опажањима (подацима) $\mathbf{I}$, тако да израз гласи:

$$\hat{\mathbf{s}}_0 = \mathbf{\Sigma}_{s_0 I} \mathbf{\Sigma}_I^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{\Lambda}) , \quad (9.5-16)$$

где је $\hat{\mathbf{s}}_0$ $\mathbf{m} \times 1$ вектор интерполованих или филтрираних вредности у $\mathbf{m}$ тачака, $\mathbf{\Sigma}_{s_0 I} = \mathbf{\Sigma}_{I s_0}^T$ је $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ кросковаријациона матрица између сигнала и датих података, $\mathbf{\Sigma}_I$ је $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ симетрична аутоковаријациона матрица опажања (датих података), $\mathbf{I}$ је вектор опажања (= $\mathbf{s}$ у интерполацији), а $\mathbf{B}\mathbf{\Lambda}$ представља средњу вредност опажања (репрезентује површ тренда) добијену као производ од $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ матрице коефицијената и $\mathbf{n} \times 1$ вектора параметара. Уколико се тренд отклони (искључи) пре интерполације и филтрирања, $\mathbf{B}\mathbf{\Lambda}$ се може занемарити.

Уколико се по колокацији по методи најмањих квадрата оцењује само једна вредност s_0 , тада је:

$$\hat{s}_0 = \sigma_{s_0 I} \mathbf{\Sigma}_I^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{\Lambda}) , \quad (9.5-17)$$

где је σ_{s_0} врста вектор. Проблем се додатно може поједноставити уколико се тренд занемари, тада је параметар вектор једнак нули, а колокација по методи најмањих квадрата се претвара у интерполацију и филтрирање тако да (9.5-17) у том случају гласи:

$$\hat{s}_0 = \sigma_{s_0} \Sigma_{\Pi}^{-1} \mathbf{1}, \quad (9.5-18)$$

и идентичан је изразу (9.3-5). Коначно, може се закључити да су изравнање по методи најмањих квадрата и интерполација и филтрирање специјални случајеви колокације.

Дакле, колокација по методи најмањих квадрата омогућава оцену параметара Λ као и оцену филтрираних вредности променљивих које репрезентују опажања (сигнале) не само у датим тачкама већ и у другим тачкама. Филтриране (или интерполоване) вредности повезане су са површи тренда $\mathbf{B}\Lambda$. Уколико постоји интерес за укупном оценом сигнала $\mathbf{t}$ у односу на оригинални датум података, тада је:

$$\hat{\mathbf{t}}_0 = \hat{s}_0 + \mathbf{D}\Lambda, \quad (9.5-19)$$

где је $\mathbf{D}$ одговарајућа матрица коефицијената, неопходна при рачунању вредности функције у $\mathbf{m}$ нових филтрираних тачака. Уколико се филтрирање реализује у $\mathbf{n}$ оригиналних, датих тачака, тада је $\mathbf{D} = \mathbf{B}$. Важна напомена која се односи на претходне оцене јесте да су све до сада поменуте функције третиране као линеарне. У противном, неопходно је претходно их линеаризовати, што је уједно један од аксиома методе најмањих квадрата.

На крају, без извођења, даће се готови изрази за оцену прецизности колокације по методи најмањих квадрата.

А постериори кофакторска матрица непознатих параметара гласи:

$$\mathbf{Q}_{\Lambda\Lambda} = (\mathbf{B}^T \mathbf{W}_e \mathbf{B})^{-1} = (\mathbf{B}^T (\mathbf{A} \mathbf{Q}_{\Pi} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{B})^{-1}. \quad (9.5-20)$$

А постериори кофакторска матрица од $\hat{s}_0$ гласи:

$$\mathbf{Q}_{\hat{s}_0 \hat{s}_0} = \mathbf{Q}_{s_0 s_0} - \mathbf{Q}_{v_s v_s}, \quad (9.5-21)$$

А постериори коваријациона матрица од $\hat{s}_0$ гласи:

$$\Sigma_{\hat{s}_0 \hat{s}_0} = \Sigma_{s_0 s_0} - \Sigma_{s_0 e} \Sigma_e^{-1} \Sigma_{s_0 e}^T. \quad (9.5-22)$$

Уколико се оцењује само једна вредност са условима који укључују индиректна опажања, тада је:

$$\sigma_{\hat{s}_0}^2 = \mathbf{K}_s(0) - \sigma_{\text{Is}_0}^T \mathbf{K}_{\text{ll}}^{-1} \sigma_{\text{Is}_0}, \quad (9.5-23)$$

што показује да уколико се параметри не узму у обзир, резултат колокације се редукује у резултат интерполације и филтрирања, а што значи да се тренд *a priori* одбацио.

Кофакторска матрица између параметара Δ и $\hat{s}_0$ гласи:

$$\mathbf{Q}_{\Delta \hat{s}_0} = -\mathbf{Q}_{\Delta \Delta} \mathbf{B}^T \mathbf{W}_e \mathbf{Q}_{s_0 e}, \quad (9.5-24)$$

док је коресподентна коваријациона матрица једнака:

$$\Sigma_{\Delta \hat{s}_0} = -\Sigma_{\Delta \Delta} \mathbf{B}^T \mathbf{W}_e \Sigma_{s_0 e}. \quad (9.5-25)$$

Коначно, за рачунање финалне оцено $\hat{\mathbf{t}}$ неопходне су *a posteriori* кофакторске, односно коваријационе матрице, тј:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{t}}\hat{\mathbf{t}}} &= \mathbf{Q}_{s_0 s_0} - \mathbf{Q}_{s_0 e} \mathbf{Q}_e^{-1} \mathbf{Q}_{s_0 e}^T + (\mathbf{Q}_{s_0 e} \mathbf{Q}_e^{-1} \mathbf{B} - \mathbf{D}) \mathbf{Q}_{\Delta \Delta} \cdot (\mathbf{Q}_{s_0 e} \mathbf{Q}_e^{-1} \mathbf{B} - \mathbf{D})^T \\ \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{t}}\hat{\mathbf{t}}} &= \mathbf{K}_{s_0 s_0} - \mathbf{K}_{s_0 e} \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{K}_{s_0 e}^T + (\mathbf{K}_{s_0 e} \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{B} - \mathbf{D}) \mathbf{K}_{\Delta \Delta} \cdot (\mathbf{K}_{s_0 e} \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{B} - \mathbf{D})^T. \end{aligned} \quad (9.5-26)$$

ПРИМЕР 9.5-1: Дати су подаци мерења у $n=5$ тачака.

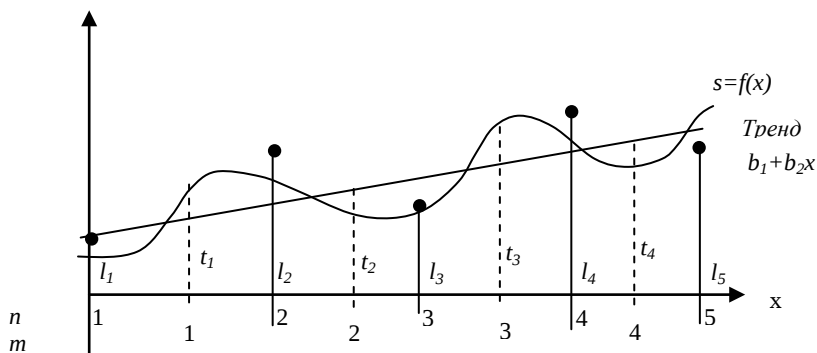
x	I
0.000	0.6108
1.445	1.0863
2.890	2.9034
4.335	4.5925
5.780	6.2714

На основу датих података мерења, применом колокације по методи најмањих квадрата, извршити предикцију података у новим тачкама на половини између датих тачака ($\mathbf{x}$).

РЕШЕЊЕ:

Отклањање тренда у подацима јесте важан услов примене интерполације и филтрирања и реализује се природно као претходна радња. У оквиру колокације, тренд површи се одређује симултано кад и филтрирање, што значи да је површ тренда уједно и функционални део модела.

Дати пример подразумева једнодимензионални проблем филтрирања где се површ тренда замењује правом линијом (слика 9.5-1).



Слика 9.5-1

Дато је пет тачака ($\mathbf{n} = 5$). Претпостављајући да се ради о стационарном случају и ергодичности, коваријациона функција се изражава у зависности од међусобног растојања $\mathbf{d}$, чији израз гласи:

$$\mathbf{K}_1(\mathbf{d}) = \mathbf{K}_1(0)e^{-a^2 d^2},$$

са константама:

$$\mathbf{K}_1(0) = 0.1260 \text{ и } a = 0.6.$$

Полазећи да је коваријациона функција некорелисаних случајних компонената $\mathbf{r}$ константна и једнака 0.01, тада је:

$$\mathbf{K}_r(0) = 0.01, \quad \mathbf{K}_r(\mathbf{d}) = 0 \text{ за свако } \mathbf{d} \neq 0.$$

Сагласно томе, а *приори* коваријационе матрице гласе:

$$\Sigma_{\Pi} = \begin{bmatrix} 0.1360 & 0.0594 & 0.0062 & 0.0002 & 0.0000 \\ & 0.1360 & 0.0594 & 0.0062 & 0.0002 \\ & & 0.1360 & 0.0594 & 0.0062 \\ & & & 0.1360 & 0.0594 \\ \text{simetricno} & & & & 0.1360 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_{ss} = \begin{bmatrix} 0.1260 & 0.0594 & 0.0062 & 0.0002 \\ & 0.1260 & 0.0594 & 0.0062 \\ & & 0.1260 & 0.0594 \\ \text{simetricno} & & & 0.1260 \end{bmatrix}$$

где се види да су дијагонални елементи прве матрице једнаки дијагоналним елементима друге, увећаним за 0.01.

$$\Sigma_{s_0l} = \begin{bmatrix} 0.1044 & 0.1044 & 0.0232 & 0.0012 & 0.0000 \\ & 0.1044 & 0.1044 & 0.0232 & 0.0012 \\ & & 0.1044 & 0.1044 & 0.0232 \\ \text{simetricno} & & & 0.1044 & 0.1044 \end{bmatrix}$$

Пре представљања тражених резултата, дефинисаћемо једначину површи тренда:

$$\mathbf{y} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 \mathbf{x}$$

С обзиром да је $\Delta = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2]^T$, функционални модел изражава се једначином за сваку тачку облика:

$$\mathbf{s}_i + \mathbf{r}_i = \mathbf{l}_i - [1 \quad \mathbf{x}_i] \cdot \Delta = \mathbf{l}_i - \mathbf{B}_i \Delta,$$

где је $\mathbf{B}_i = [1 \quad \mathbf{x}_i]$. Коначан облик матрице $\mathbf{B}$ гласи:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 & \mathbf{x}_4 & \mathbf{x}_5 \end{bmatrix}^T$$

док оцена параметар вектора, сагласно (9.5-14) гласи:

$$\Delta = (\mathbf{B}^T \Sigma_{\Pi}^{-1} \mathbf{B})^{-1} (\mathbf{B}^T \Sigma_{\Pi}^{-1} \mathbf{l}) = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3252 \\ 0.9891 \end{bmatrix}.$$

Треба имати у виду, да пошто се ради о моделу са индиректним опажањима $\mathbf{W}_\epsilon = \Sigma_{\Pi}^{-1}$ филтрирање се обавља у $\mathbf{m} = 4$ тачке¹⁴ (слика 9.5-1), на основу израза (9.5-17) као:

$$\hat{\mathbf{s}}_0 = \Sigma_{s_0l} \Sigma_{\Pi}^{-1} (\mathbf{l} - \mathbf{B} \Delta) = [-0.221 \quad -0.5590 \quad -0.1052 \quad 0.1082]^T$$

¹⁴ Тачке за интерполацију биране су на половини између датих тачака имајући у виду да су нам њихове координате неопходне приликом рачунања вредности укупног сигнала у њима.

Рачунање вредности $\mathbf{t}$ приказаће се на примеру једне тачке. Наиме за $x_1 = 0.7225$, сагласно (9.5-19):

$$\hat{\mathbf{t}}_1 = 0.2221 + [1 \quad 0.7225] \cdot \Delta = 0.8177.$$

За све тачке вредности укупног сигнала дате су у наредној табели:

x	s_0	t
0.7225	-0.2221	0.8177
2.1675	-0.5590	1.9101
3.6125	-0.1052	3.7932
5.0575	0.1082	5.4359

при чему матрица $\mathbf{D}$ изгледа:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.7225 & 2.1675 & 3.6125 & 5.0575 \end{bmatrix}$$

Коначно, одговарајуће коваријационе матрице изгледају:

$$\Sigma_{\Delta\Delta} = (\mathbf{B}^T \Sigma_{\mathbf{y}}^{-1} \mathbf{B})^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1136 & -0.0234 \\ -0.0234 & 0.0081 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_{\hat{s}_0 \hat{s}_0} = \begin{bmatrix} 0.1034 & 0.0532 & 0.0343 & 0.0025 \\ & 0.0564 & 0.0369 & 0.0343 \\ & & 0.0564 & 0.0532 \\ & & & 0.1034 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_{\hat{\mathbf{t}} \hat{\mathbf{t}}} = \begin{bmatrix} 0.0131 & -0.0024 & 0.0015 & -0.0009 \\ & 0.0121 & -0.0019 & 0.0015 \\ & & 0.0121 & -0.0024 \\ & & & 0.0131 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_{\Delta \hat{s}_0} = \begin{bmatrix} 0.1007 & 0.0578 & 0.0298 & -0.0080 \\ -0.0188 & -0.0048 & 0.0048 & 0.0188 \end{bmatrix}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Baarda, W. (1967). Statistical Concepts in Geodesy, Neth. Geod. Comm. Publ. on Geodesy, Vol. 2, No. 4
2. Baarda, W. (1968). A testing procedure for Use in Geodetic Networks, Neth. Geod. Comm. Publ. on Geodesy, Vol 2, No. 5
3. Bjerhammar, A. (1973). Theory of errors and Generalized Matrix Inverses, Elsevier Scient. Publ. Co. Amsterdam
4. Caspary, W.F. (1988). Concepts of network and Deformation Analysis, Monograph 11, School of Surveying the University of New South Wales, Kensington, N.S.W., Australia
5. Chrzanowsky, A., Chen, Y.Q., Second, J.M.: Geometrical Analysis of deformation surveys, Proceedings of the Deformation Measurements Workshop, Boston, Massachusetts, 31 October-1 November, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, M.A. pp. 170-206.
6. Fan, H. (1987). Theory of errors and Least Squares Adjustment, Royal Institute of Technology, Drottning Kristinas vag 30, 10044 Stockholm, Sweden,
7. Grafarend, E. , Kleusberg, A., and Schaffrin, B. (1980). An Intraduction to the Variance-Covariance Component Estimation of Helmert Type, ZfV, 4, pp 161-180
8. Koch, K.R. (1988). Parametar Estimation and Hypothesis Testing and in Linear Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, London, Paris, Tokyo
9. Kubik, K. (1970). The estimation of the Weights of the Measured Quantities within the Method of least Squares, Bull.geod. No. 95
10. Mikhail, E.M. (1976). Observations and Least Squares, Harper and Row.
11. Perović, G. (2005). Metod najmanjih kvadrata, Građevinski fakultet, Beograd.
12. Moritz, H. (1972). Advanced least squares methods, (Report No. 175). Dept. Of Geodetic Science, OSU.
13. Pope, A.J. (1975). The statistics of Residuals and the Detection of Outliers, XVI IUGG General Assembly, Grenoble
14. Rao, C.R. and S.K. Mitra (1971). Generalized Inverses of Matrices and its Applications, John Wiley&Sons

15. Schaffrin, B. (1981). Best Invariant Covariance Component Estimators and its Application to the Generalized Multivariate Adjustment of Heterogeneous deformation Observations, Bulletin Geodesique,, 55, 73-85.
16. Teskey, W.F., Porter, T.R.: An integration method for monitoring the deformation behavior of engineering structures, Proceedings of 5th International FIG Symposium on Deformation Measurements and 5th Canadian Symposium on Mining Surveying and Rock Deformation Measurements, Ed. By Chrzanowsky, A. And W.Wells, Department of Surveying Engineering, University of New Brunswick, Fredericton, N.B., pp 536-547.