



Универзитет у Београду – Грађевински факултет
www.grf.bg.ac.rs

Студијски програм: **ГЕОДЕЗИЈА И ГЕОИНФОРМАТИКА**

Модул: **ГЕОДЕЗИЈА**

Година/Семестар: **I година / 1 семестар**

Назив предмета (шифра): **Рачун изравнања – напредни курс (M2G1RI)**

Наставник: **Бранко Божић**

Наслов предавања: **ДЕФИНИСАЊЕ ДАТУМСКИХ ПАРАМЕТАРА
У МОДЕЛИМА ИЗРАВНАЊА ГЕОДЕТСКИХ МРЕЖА**

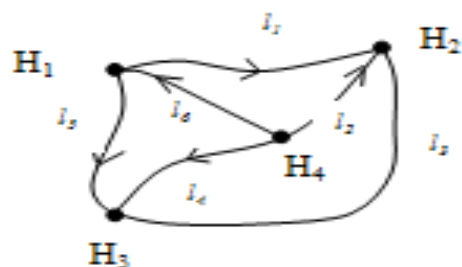
Датум : 10.11.2020.

САДРЖАЈ

- Конвенционални начини дефинисања координатног система и трансформација координатних система
- Дефинисање координатног система геодеетске мреже помоћу датих тачака
- Дефинисање координатног система у геодеетским мрежама постављањем датумских услова
- Дефинисање координатног система геодеетске мреже са минималним трагом матрице кофактора непознатих параметара
- Општа датумска трансформација

КОНВЕНЦИОНАЛНИ НАЧИНИ ДЕФИНИСАЊА КООРДИНАТНОГ СИСТЕМА И ТРАНСФОРМАЦИЈА КООРДИНАТНИХ СИСТЕМА

1



$$\text{GMM: } l + v = Ax, P = I$$

$$\begin{aligned} l_1 + v_1 &= -H_1 + H_2 & . & & . \\ l_2 + v_2 &= . & +H_2 & & -H_4 \\ l_3 + v_3 &= . & +H_2 & -H_3 & . \\ l_4 + v_4 &= . & . & +H_3 & -H_4 \\ l_5 + v_5 &= +H_1 & . & -H_3 & . \\ l_6 + v_6 &= +H_1 & . & . & -H_4 \end{aligned}$$

4

Може се констатовати следеће:

Не постоји матрица **B** за коју се може рећи да задовољава следећи услов $NB=BN=I$, што има за последицу:

- Матрица **N** не поседује регуларну инверзију; и
- Не постоји решење за вектор параметара **x**.

Проблем се решава **дефинисањем референтног система висина**, тј. **транслацијом** мреже по висини.

2

Матрица коефицијената једначина поправака **A** гласи:

$$A_{6 \times 4} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & . & . \\ . & 1 & . & -1 \\ . & 1 & -1 & . \\ . & . & 1 & -1 \\ 1 & . & -1 & . \\ 1 & . & . & -1 \end{bmatrix}$$

6 редова (опажања)
4 колоне (непознати параметри)
 $A \cdot \lambda = 0$ за $\lambda = [1, 1, 1, 1]^T$
 $r(A) = 3, \quad d = 4 - 3 = 1$

3

Матрица нормалних једначина:

$$A^T A \hat{x} - A^T l = 0$$

$$P = I$$

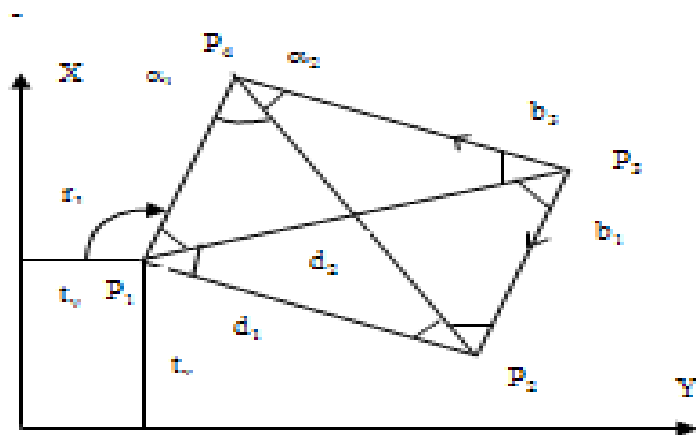
$$A^T A = N$$

$$N_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$N \cdot \lambda = 0$ за $\lambda = [1, 1, 1, 1]^T$
 $r(N) = 3, \quad d = 4 - 3 = 1$

КОНВЕНЦИОНАЛНИ НАЧИНИ ДЕФИНИСАЊА КООРДИНАТНОГ СИСТЕМА И ТРАНСФОРМАЦИЈА КООРДИНАТНИХ СИСТЕМА

1



Опажања:

8 углова - $\alpha_1, \dots, \alpha_8$
 6 дужина - $d_1, \dots, d_6$
 12 праваца - $b_1, \dots, b_{12}$

Непознати параметри:

8 координата

$$\text{ГММ: } 1 + v = Ax, P = Q^{-1}$$

2

Размотримо проблем дефинисања координатног система у случају сваког типа мерења, појединачно:

- Мерени само углови: $A_{8 \times 8}$, $r(A)=4$, $d=8-4=4$
- Мерене само дужине: $A_{6 \times 8}$, $r(A)=5$, $d=8-5=3$
- Мерени само правци: $A_{12 \times 12}$, $r(A)=8$, $d=12-8=4$

Табела 3.1-1 : Датумске информације садржане у геодетским опажањима

Геодетско опажање	Датумски параметар			
	t_x	t_y	t_z	s
Дужине	-	-	-	+
Хоризонтални углови	-	-	-	-
Правци	-	-	-	-
Азимутн (астрономски, жиро скопски)	-	-	+	-
Положај (астрономски, ГПС)	+	+	+	+
Разлика положаја (ГПС, Инерцијални системи)	-	-	+	+

ДЕФИНИСАЊЕ КООРДИНАТНОГ СИСТЕМА ГЕОДЕТСКЕ МРЕЖЕ ПОМОЋУ ДАТИХ ТАЧАКА

$$\mathbf{l} + \mathbf{v} = [\mathbf{A}_1 \ \mathbf{A}_2] \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \hat{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix}$$

d компоната од $\mathbf{x}_2$ дефинише координатни систем, а колоне матрице $\mathbf{A}_2$ су линеарне комбинације од $\mathbf{A}_1$.

$$\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{L} = \mathbf{A}_2 \Rightarrow \mathbf{A}_1 \mathbf{L} - \mathbf{A}_2 = [\mathbf{A}_1 \ \mathbf{A}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ -\mathbf{I}_d \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

S

$$\mathbf{l} + \mathbf{v} - \mathbf{A}_1 \mathbf{L} \hat{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{A}_1 \hat{\mathbf{x}}_1$$

представља модел са потпуним рангом и који показује да ће приближне координате од вектора $\mathbf{x}_2$ остати непромењене.

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = (\mathbf{A}_1^T \mathbf{P} \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P} \mathbf{l}$$

Оцена непознатих параметара $\mathbf{x}_1$ за $\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$, гласи

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_1} = (\mathbf{A}_1^T \mathbf{P} \mathbf{A}_1)^{-1}$$

$$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}_1} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_1}$$

рачунска основа модела нулте варијансе.

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = (\mathbf{A}_1^T \mathbf{P} \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P} (\mathbf{l} - \mathbf{A}_1 \mathbf{L} \hat{\mathbf{x}}_2)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = \hat{\mathbf{x}}_1^0 - \mathbf{L} \hat{\mathbf{x}}_2$$

$$\hat{\mathbf{x}}_2 = \hat{\mathbf{x}}_2$$

$$\mathbf{L} = (\mathbf{A}_1^T \mathbf{P} \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_2$$

Напомена: Елементи коваријационе матрице зависе од избора датих тачака.

ДЕФИНИСАЊЕ КООРДИНАТНОГ СИСТЕМА У ГЕОДЕТСКИМ МРЕЖАМА ПОСТАВЉАЊЕМ ДАТУМСКИХ УСЛОВА

Основни модел

$$A\hat{x} = l + v$$

$$H \hat{x} = w$$

константа

Сингуларна матрица, димензија $u \times u$ са дефектом $d=u-r(A)$

$$\begin{bmatrix} A^T P A & H^T \\ H & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x} \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T P l \\ w \end{bmatrix}$$

Нормалне једначине

Вектор Лагранжових мултипликатора

Матрица датумских услова

$$r \begin{bmatrix} A^T P A & H^T \\ H & 0 \end{bmatrix} = u + d$$

У 2Д мрежи, уколико се тачкама P_i и P_j дефинише координатни систем (рачунска основа нулте варијансе), вектор x и матрица H имају следећу форму

$$\hat{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & x_2 & y_2 & \dots & x_i & y_i & \dots & x_j & y_j & \dots & x_{u-2} & y_{u-2} \end{bmatrix}$$

		0	0	0	0	...	+1	0	...	0	0	...	0	0
H	=	0	0	0	0	...	0	+1		0	0			
		0	0	0	0	...	0	0		+1	0			
		0	0	0	0	...	0	0		0	+1	...	0	0

РЕШЕЊЕ:

$$\begin{bmatrix} \hat{x} \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T P A & H^T \\ H & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A^T P l \\ w \end{bmatrix}$$

ДЕФИНИСАЊЕ КООРДИНАТНОГ СИСТЕМА У ГЕОДЕТСКИМ МРЕЖАМА ПОСТАВЉАЊЕМ ДАТУМСКИХ УСЛОВА

РЕШЕЊЕ:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{H}^T \\ \mathbf{H} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}$$

Инверзна матрица нормалних једначина није нумерички довољно стабилна

Решење система нормалних једначина може се додатно поједноставити

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}_{11} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} + \mathbf{Q}_{12} \mathbf{w}$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{Q}_{21} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{Q}_{11} = (\mathbf{N} + \mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{N} (\mathbf{N} + \mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1}$$

На основу закона преноса грешака, следи

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{Q}_{11} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{Q} \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{Q}_{11} = \mathbf{Q}_{11} \mathbf{N} \mathbf{Q}_{11} = \mathbf{Q}_{11}$$

У практичним применама, обично се вектор параметара формира тако да на крају буде распоређено d елемената, коресподентно датим тачкама. Сходно томе, матрице $\mathbf{A}$ и $\mathbf{H}$ се формирају по следећој шеми,

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1 \quad \mathbf{A}_2]$$

$$\mathbf{H}^T = [\mathbf{0} \quad \mathbf{I}_d]$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} = \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11} & \mathbf{N}_{12} \\ \mathbf{N}_{21} & \mathbf{N}_{22} \end{bmatrix}$$

РЕШЕЊЕ:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \hat{\mathbf{x}}_2 \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11} & \mathbf{N}_{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{N}_{21} & \mathbf{N}_{22} & \mathbf{I}_d \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_d & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P} \mathbf{l} \\ \mathbf{A}_2^T \mathbf{P} \mathbf{l} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P} \mathbf{l} - \mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{N}_{12} \mathbf{w}$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_1} = \mathbf{N}_{11}^{-1}$$

ДЕФИНИСАЊЕ КООРДИНАТНОГ СИСТЕМА ГЕОДЕТСКЕ МРЕЖЕ СА МИНИМАЛНИМ ТРАГОМ МАТРИЦЕ КОФАКТОРА НЕПОЗНАТИХ ПАРАМЕТАРА

МНК оцене непознатих параметара у слободним мрежама су померене,
Генерално, због неједнозначности решења, варијанса оцена није минимална,
Питање - да ли у скупу решења постоји неко које се посебно може издвојити?

Критеријум:

$$\text{tr} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \text{tr}(\mathbf{N} + \mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{N}(\mathbf{N} + \mathbf{H}^T \mathbf{H}) = \min$$

За $\mathbf{H}=\mathbf{S}$

$$\mathbf{S} \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A} \mathbf{S} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{r}(\mathbf{S}) = \mathbf{d}$$

$$\mathbf{S}^T \mathbf{S}$$

Наћи $\mathbf{H}$ које задовољава услов

Због стабилности решења, матрица $\mathbf{S}$ се нормализује

$$\mathbf{S}_n = \mathbf{S}(\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \mathbf{S}_n^T \mathbf{S}_n = \mathbf{I}_d$$

Регуларна симетрична матрица

Решење по $\mathbf{S}$
задовољава два
услова

$$\begin{cases} \text{tr} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \text{минимум} \\ \|\hat{\mathbf{x}}\| = (\hat{\mathbf{x}}^T \hat{\mathbf{x}})^{\frac{1}{2}} = \min \end{cases}$$

Два начина решавања $\mathbf{S}$:

- Алгебарски,
- Геометијски

Алгебарски начин:

$$(\mathbf{N} - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{s}_i = \mathbf{0}$$

Вектор јединичних
вредности од $\mathbf{N}$

Сопствене вредности од $\mathbf{N}$

Број јединичних вектора = d
Димензије матрице $\mathbf{S}$: $u \times d$

ДЕФИНИСАЊЕ КООРДИНАТНОГ СИСТЕМА ГЕОДЕТСКЕ МРЕЖЕ СА МИНИМАЛНИМ ТРАГОМ МАТРИЦЕ КОФАКТОРА НЕПОЗНАТИХ ПАРАМЕТАРА

Геометријски начин избора матрице S

1D мрежа → $\mathbf{d} = 1$

$$\mathbf{S}^T = [\mathbf{1} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{1} \quad \dots \quad \mathbf{1}] \cdot \mathbf{a}$$

$$\mathbf{S}_n^T = (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-\frac{1}{2}} \mathbf{S}^T \Rightarrow \mathbf{S}_n^T \mathbf{S}_n = \mathbf{I}_d \longrightarrow \mathbf{S}_n^T = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{u}}} [\mathbf{1} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{1} \quad \dots \quad \mathbf{1}]$$

2D мрежа → $\mathbf{d} = 4$.

$$\mathbf{x}^T = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{y}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \mathbf{y}_2 \quad \dots \quad \mathbf{x}_p \quad \mathbf{y}_p]$$

Обезбеђују транслације по x и y

$$\mathbf{S}^T = \begin{bmatrix} +1 & 0 & +1 & 0 & \dots \\ 0 & +1 & 0 & +1 & \dots \\ +\bar{\mathbf{y}}_1 & -\bar{\mathbf{x}}_1 & +\bar{\mathbf{y}}_2 & -\bar{\mathbf{x}}_2 & \dots \\ +\bar{\mathbf{x}}_1 & +\bar{\mathbf{y}}_1 & +\bar{\mathbf{x}}_2 & +\bar{\mathbf{y}}_2 & \dots \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \sum \hat{\mathbf{x}}_i = 0$$

$$\Rightarrow \sum \hat{\mathbf{y}}_i = 0$$

$$\Rightarrow \sum (\bar{\mathbf{y}}_i \hat{\mathbf{x}}_i - \bar{\mathbf{x}}_i \hat{\mathbf{y}}_i) = 0$$

$$\Rightarrow \sum (\bar{\mathbf{x}}_i \hat{\mathbf{x}}_i + \bar{\mathbf{y}}_i \hat{\mathbf{y}}_i) = 0$$

С обзиром да је матрица $\mathbf{S}^T \mathbf{S}$ дијагонална и матрица $(\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-\frac{1}{2}}$ је дијагонална са елементима једнаким реципрочним вредностима квадратних корена елемената матрице $\mathbf{S}^T \mathbf{S}$

$$\bar{\mathbf{x}}_i = \mathbf{x}_i^o - \sum \frac{\mathbf{x}_i^o}{\mathbf{p}}$$

$$\bar{\mathbf{y}}_i = \mathbf{y}_i^o - \sum \frac{\mathbf{y}_i^o}{\mathbf{p}}$$

Дефинише ротацију мреже око вертикалне осе

Дефинише размеру мреже према датим пиближним координатама

НАПОМЕНА: Све дате тачке једнако доприносе дефинисању датума мреже. Уколико се нека тачка избацује, њени су елементи у матрици S једнаки нули.

ДЕФИНИСАЊЕ КООРДИНАТНОГ СИСТЕМА ГЕОДЕТСКЕ МРЕЖЕ СА МИНИМАЛНИМ ТРАГОМ МАТРИЦЕ КОФАКТОРА НЕПОЗНАТИХ ПАРАМЕТАРА

3D мрежа

$$\mathbf{x}^T = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{y}_1 \quad \mathbf{z}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \mathbf{y}_2 \quad \mathbf{z}_2 \quad \dots \quad \mathbf{x}_p \quad \mathbf{y}_p \quad \mathbf{z}_p]$$

$$\mathbf{S}^T = \left[\begin{array}{ccccccc} +1 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & +1 & 0 & 0 & +1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & +1 & \dots \\ 0 & +\bar{\mathbf{z}}_1 & -\bar{\mathbf{y}}_1 & 0 & +\bar{\mathbf{z}}_2 & -\bar{\mathbf{y}}_2 & \dots \\ -\bar{\mathbf{z}}_1 & 0 & +\bar{\mathbf{x}}_1 & -\bar{\mathbf{z}}_2 & 0 & +\bar{\mathbf{x}}_2 & \dots \\ +\bar{\mathbf{y}}_1 & -\bar{\mathbf{x}}_1 & 0 & +\bar{\mathbf{y}}_2 & -\bar{\mathbf{x}}_2 & 0 & \dots \\ +\bar{\mathbf{x}}_1 & +\bar{\mathbf{y}}_1 & +\bar{\mathbf{z}}_1 & +\bar{\mathbf{x}}_2 & +\bar{\mathbf{y}}_2 & +\bar{\mathbf{z}}_2 & \dots \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \} \\ \} \\ \} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Translacije po x, y, z} \\ \text{Rotacije oko x, y, z} \\ \text{Razmera} \end{array}$$

ЈЕДИНИЧНЕ ВРЕДНОСТИ И ЈЕДИНИЧНИ ВЕКТОРИ - алгебарски

Jedinični vektor je nenulti vektor koji zadovoljava jednačinu

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

Primer:

$$N = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$N\vec{v} = \lambda\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$2x_1 + x_2 = \lambda x_1$$

$$x_1 + 2x_2 = \lambda x_2 \quad \text{ili}$$

$$(2 - \lambda)x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 + (2 - \lambda)x_2 = 0$$

Uslov da sistem ima netrivialno resenje, različito od nule jeste da je

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2 - \lambda)(2 - \lambda) - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$

Rešenje: $\lambda_1 = 3$ i $\lambda_2 = 1$ ← Sopstvene vrednosti

Za $\lambda_1 = 3$, uzmimo

$$(2 - \lambda)x_1 + x_2 = 0$$

$$(2 - 3)x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 = x_2$$

Za $\lambda_2 = 1$, uzmimo

$$(2 - \lambda)x_1 + x_2 = 0$$

$$(2 - 1)x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 = -x_2$$

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Jedinični vektori



$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ОПШТА ДАТУМСКА ТРАНСФОРМАЦИЈА

Упознаћемо се са трансформацијом из једног датума који је дефинисан

условима $\mathbf{H}_1 \hat{\mathbf{x}} = 0$ у други са другим скупом услова облика

$$\mathbf{H}_2 \hat{\mathbf{x}} = 0$$

Трансформација је линеарна и позната је као $\mathbf{S}$ трансформација.

Нека важе следећи односи:

$$\mathbf{H}_1^T = \mathbf{B}_1 \mathbf{S}$$

$$\mathbf{H}_2^T = \mathbf{B}_2 \mathbf{S}$$

Матрице $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ су дијагоналне са елементима +1 или 0, при чему најмање d елемената мора бити једнак +1.

Матрица $\mathbf{B}$ попуњава нулама редове матрице $\mathbf{S}$, сагласно нулама у матрици $\mathbf{B}$, сачувавши специјалну структуру матрице $\mathbf{H}$. Варирањем елемената матрице $\mathbf{B}$, могуће је поставити више различитих услова, као на пример:

ОПШТА ДАТУМСКА ТРАНСФОРМАЦИЈА

$$\mathbf{B} = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{H} = \mathbf{S}^T \Rightarrow$$
 Даје решење са минималним трагом и минималном нормом

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_d \end{bmatrix} \Rightarrow$$
 Конвенционални начин решавања датума са d датих услова

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{k} > \mathbf{d} \Rightarrow$$
 Решава питање датума минимизирајући део трага или решење са минималним парцијалним трагом кога дефинише k одабраних тачака

Одговарајућим избором матрице $\mathbf{B}$ могуће је у изравнању мреже дефинисати било који од поменутих датума.

ОПШТА ДАТУМСКА ТРАНСФОРМАЦИЈА

Кофакторска матрица оцена непознатих параметра уз услове $\hat{\mathbf{x}}_1$ гласи $\mathbf{H}_1 \mathbf{x} = 0$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_1} = (\mathbf{N} + \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1)^{-1} \mathbf{N} (\mathbf{N} + \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1)^{-1}$$

За друге услове, на пример $\mathbf{H}_2 \mathbf{x} = 0$ добиће се нова оцена параматара са новом кофакторском матрицом.

Веза између два решења остварује се преко познатог односа

$$\mathbf{N} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{N} = \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_1} = (\mathbf{N} + \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1)^{-1} \mathbf{N} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_2} \mathbf{N} (\mathbf{N} + \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1)^{-1}$$

С обзиром да су $\mathbf{N}$ и $(\mathbf{N} + \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1)^{-1}$ симетричне

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_1} = \mathbf{K}_1 \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_2} \mathbf{K}_1^T \quad \text{са}$$

$$\mathbf{K}_1 = (\mathbf{N} + \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1)^{-1} \mathbf{N}$$



$$\hat{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{K}_1 \hat{\mathbf{x}}$$

са

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_1} = \mathbf{K}_1 \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{K}_1^T$$

$$\mathbf{K}_1 = (\mathbf{N} + \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1)^{-1} \mathbf{N} = \mathbf{I} - \mathbf{S}(\mathbf{H}_1 \mathbf{S})^{-1} \mathbf{H}_1$$

Ако је неопходна додатна трансформација:

$$\hat{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{K}_2 \hat{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{K}_2 \hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_2} = \mathbf{K}_2 \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_1} \mathbf{K}_2^T = \mathbf{K}_2 \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{K}_2^T$$

ПРИМЕР

На основу датих података мерења у нивелманској мрежи оценити вектор непознатих параметара дефинисањем датума:

- а) фиксирањем једне тачке;
- б) преко матрице услова;
- ц) преко минималног трага кофакторске матрице и минималне норме вектора решења; и
- д) минимизирањем дела трага и минимизирањем парцијалне норме.

$$A_a = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \\ -1 & +1 & 0 \\ -1 & 0 & +1 \\ 0 & -1 & +1 \end{bmatrix}, \quad N_a = N = \begin{bmatrix} +3 & -1 & -1 \\ -1 & +3 & -1 \\ -1 & -1 & +3 \end{bmatrix}, \quad A_a^T \mathbf{1} = \begin{bmatrix} -2.1 \\ +1.5 \\ +5.1 \end{bmatrix}$$

б) Уколико се тачка 1 изабере као датумска, тада је $\mathbf{H} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$, сходно $\mathbf{H}^T = \mathbf{B}\mathbf{S}$, где је $\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{0}$, $\mathbf{S}^T = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$ јединични вектор коресподентан нултој јединичној вредности од $\mathbf{N}$, тада је

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} +1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}.$$

а) $\mathbf{d} = \mathbf{1}$, $\mathbf{S} = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$, који задовољава услове $\mathbf{N}\mathbf{S} = \mathbf{0}$, $\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{0}$. Нормализацијом $\mathbf{S}$, добија се

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \mathbf{S} = \frac{1}{2} [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T \Rightarrow \mathbf{S}^T \mathbf{S} = \mathbf{1}$$

д) Претпоставимо да тачке 2 и 3 дефинишу систем висина, тако уз критеријуме

$(\hat{\mathbf{x}}_d^T \mathbf{B} \hat{\mathbf{x}}_d)^{\frac{1}{2}} = \min$ и $\text{tr} \mathbf{B} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_d} \mathbf{B} = \min$. Тада је

$$\mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \mathbf{I}_2 & & \\ & & 0 & \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{H}_d = (\mathbf{B}_d \mathbf{S})^T = [0 \ 1 \ 1 \ 0]$$

Услов датума облика $\mathbf{H}_d \hat{\mathbf{x}}_d = 0$ означава да је $\hat{x}_{2d} + \hat{x}_{3d} = 0$.

Решење c)

$$\hat{\mathbf{x}}_c = \mathbf{K}_c \hat{\mathbf{x}}_a$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_c} = \mathbf{K}_c \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_a} \mathbf{K}_c^T$$

$$\mathbf{K}_c = \mathbf{I} - \mathbf{S}(\mathbf{H}_c \mathbf{S}^T)^{-1} \mathbf{H}_c$$