Универзитет у Београду – Грађевински факултет
www.grf.bg.ac.rs

Студијски програм: **ГЕОДЕЗИЈА И ГЕОИНФОРМАТИКА**

Модул: **ГЕОДЕЗИЈА**

Година/Семестар: **I година / 1 семестар**

Назив предмета (шифра): **Рачун изравнања – напредни курс (M2G1RI)**

Наставник: **Бранко Божић**

Наслов предавања: **ГАУС-МАРКОВЉЕВ МОДЕЛ –** изравање са непотпуним рангом

Датум : 03.11.2020.

Садржај

- Гаус-Марковљев модел са непотпуним рангом матрице коефицијената једначина резидуала
- Гаус-Марковљев модел са непотпуним рангом матрице коефицијената једначина резидуала – *рачунање уопштене инверзије*
- Пример
- Инваријантне функције

Гаус-Марковљев модел са непотпуним рангом матрице коефицијената једначина поправака

Претпоставке: Матрица **A** поседује дефект ранга, а матрица коваријанси опажања $\mathbf{K_l}$ је позитивно дефинитна. Ако је

$$\mathbf{r(A) = q < u} \longrightarrow$$ ***Гаус-Мрковљев модел са непотпуним рангом***

Модел гласи

$$\boxed{\mathbf{Ax = E(l)}} \qquad \mathbf{r(A) = q < u} \qquad \boxed{\mathbf{K_l = \sigma_0^2 I}} \qquad (56)$$

Оцена непознатих параметара по моделу (56) добија се користећи израз облика

$$\boxed{\mathbf{\bar{x} = (A^T A)^- A^T l}} \quad \text{са} \quad \boxed{\mathbf{K_{\bar{x}} = \sigma_0^2 (A^T A)^- A^T A \left[(A^T A)^- \right]^T}} \qquad (57)$$

уопштена инверзија (или ***g инверзија***) од $\mathbf{A^T A}$

Оцењивачи $\mathbf{\bar{x}}$ и $\mathbf{K_{\bar{x}}}$ су **неједнозначни**.

Оцене резидуала су **једнозначне** и гласе $\mathbf{\hat{v} = A\bar{x} - l}$

Матрица коваријанси оцена резидуала, иако сингуларна, **једнозначна је** и гласи

$$\boxed{\mathbf{K_{\hat{v}} = \sigma_0^2 (I - A(A^T A)^- A^T)}}$$

$$\mathbf{r(K_{\hat{v}}) = n - q} \qquad (58)$$

$$\mathbf{trK_{\hat{v}} = \sigma_0^2 (n - q)}$$

Непомерена оцена

$$\boxed{\mathbf{\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\Omega}{n - q}}} \quad \text{са} \quad \mathbf{\Omega = l^T (I - A(A^T A)^- A^T) l} \qquad (59)$$

ГММ – Методе оцена непознатих параметара –
Гаус-Марковљев модел са непотпуним рангом матрице коефицијената једначина поправака – *рачунање уопштене инверзије*

ПРОБЛЕМ: Наћи **g** инверзију матрице система нормалних једначина $\boxed{\mathbf{A}^T\mathbf{A}}$

Два начина : *први* – по дефиницији и *други* – преко базе нултог простора матрице коефицијената система једначина мерења.

По дефиницији: Претпоставка $\boxed{\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{N}}$ симетрично и $\boxed{\mathbf{r(A)} = \mathbf{r(N)} = \mathbf{q} < \mathbf{u}}$

Деоба матрице нормалних једначина у блокове

$\boxed{N_{11}=A_1^TA_1}$ (u – q) линеарно зависних колона

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11} & \mathbf{N}_{12} \\ \mathbf{N}_{21} & \mathbf{N}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{12} = \mathbf{N}_{11}\mathbf{M}, \quad \mathbf{N}_{22} = \mathbf{N}_{21}\mathbf{M}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{N}_{11}^{-1}\mathbf{N}_{12}, \quad \mathbf{N}_{22} = \mathbf{N}_{21}\mathbf{N}_{11}^{-1}\mathbf{N}_{12}$$

Уопштена инверзија $\Rightarrow$ $\mathbf{N}^- = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{N}_{rs}^-$ $\Leftarrow$ симетрична и рефлексивна

Услов који мора бити задовољен:

$$\Rightarrow \quad \mathbf{N}\mathbf{N}^-\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11} & \mathbf{N}_{12} \\ \mathbf{N}_{21} & \mathbf{N}_{21}\mathbf{N}_{11}^{-1}\mathbf{N}_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{N}$$

Пример: Наћи уопштену инверзију од А. $\boxed{r(A) = 2}$

$$A_{4x3} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow A_{3x4}^- = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} & 0_{2x2} \\ 0_{1x2} & 0_{1x2} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ГММ – Методе оцена непознатих параметара –
Гаус-Марковљев модел са непотпуним рангом матрице коефицијената једначина поправака – *рачунање уопштене инверзије*

ПРОБЛЕМ: Наћи **g** инверзију матрице система нормалних једначина $\boxed{\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}}$

Два начина : *први* – по дефиницији и *други* – преко базе нултог простора матрице коефицијената система једначина опажања.

Преко базе нултог простора матрице A:

Проширује се u x u матрица **A**

Проширује се u x u матрица $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ са матрицом **B**, где је $\mathbf{r(A) = r(A^{\mathrm{T}}A) = q < u}$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} & \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

услов $\mathbf{Bx = 0}$ где је $\mathbf{x}$ $\mathbf{ux1}$ вектор непознатих параметара

Матрица **B** се бира тако да је $\mathbf{det(D) \neq 0}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{r}\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} = \mathbf{u}$

С обзиром да је $\mathbf{r(A^{\mathrm{T}}A) = q}$ неопходно је дефинисати $\mathbf{u - q}$ услова $\Rightarrow$

Димензије матрице **B** $\Rightarrow$ $\boxed{\mathbf{(u-q)xu}}$

Инверзна матрица

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} & \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{B} & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q_B} & \mathbf{H^{\mathrm{T}}(BH^{\mathrm{T}})^{-1}} \\ \mathbf{(HB^{\mathrm{T}})^{-1}H} & 0 \end{bmatrix}$$

Кофакторска матрица

$$\mathbf{Q_B = (A^{\mathrm{T}}A + B^{\mathrm{T}}B)^{-1} - H^{\mathrm{T}}(HB^{\mathrm{T}}BH^{\mathrm{T}})^{-1}H}$$

Рефлексивна
Симетрична
Није јединствена – зависи од избора **B**

$$\mathbf{H = \left[-N_{21}N_{11}^{-1},\ I\right]}$$

ГММ – Методе оцена непознатих параметара –

Гаус-Марковљев модел са непотпуним рангом матрице коефицијената једначина поправака – *рачунање уопштене инверзије*

Ако уместо матрице **B** одаберемо матрицу **H** , такву да важе услови:

$$\mathbf{Hx} = 0$$

$$\mathbf{r}\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} = \mathbf{u}$$

$$\mathbf{H} = \left[-\mathbf{N}_{12}\mathbf{N}_{11}^{-1}, \ \mathbf{I} \right]$$

Кофакторска матрица

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T\mathbf{A} & \mathbf{H}^T \\ \mathbf{H} & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_H & \mathbf{H}^T(\mathbf{HH}^T)^{-1} \\ (\mathbf{HH}^T)^{-1}\mathbf{H} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_H = (\mathbf{A}^T\mathbf{A} + \mathbf{H}^T\mathbf{H})^{-1} - \mathbf{H}^T(\mathbf{HH}^T\mathbf{HH}^T)^{-1}\mathbf{H}$$

$$\mathbf{Q}_H = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{+}$$

НАПОМЕНА:Матрица **H** има потпун ранг редова,**r(H)=u-q,** а колоне матрице $\mathbf{H}^T$ конституишу базу нултог простора матрице A , а самим тиме и базу решења хомогеног система једначина опажања.

Псеудоинверзија од $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$

јединствена и даје ***једнозначно*** решење

ПРИМЕР

- На основу података мерења у нивелмаској мрежи из задатка 2.3-1, при P = I. Наћи решење:
  - а) преко N^-
  - б) преко Q_B
  - ц) преко Q_H

РЕШЕЊЕ под а):

	A_1	A_2		
	-1	1	0	0
	1	0	-1	0
A=	0	1	-1	0
	0	0	-1	1
	0	-1	0	1

	0	0	0	0
	0	3	-1	-1
N =	0	-1	3	-1
	0	-1	-1	2

$A_2^T A_2 = N_{22}$

	0	0	0	0
N^- =	0	0.625	0.375	0.5
	0	0.375	0.625	0.5
	0	0.5	0.5	1

N^-_{22}

РЕШЕЊЕ под б):

$B = [1\ 0\ 0\ 0]$

Матрица N гласи

	2	-1	-1	0	1
	-1	3	-1	-1	0
N=	-1	-1	3	-1	0
	0	-1	-1	2	0
	1	0	0	0	0

а, N^{-1} гласи

	0	-5.55112E-17	0	0	1
N^{-1}=	0	0.625	0.375	0.5	1
	0	0.375	0.625	0.5	1
	0	0.5	0.5	1	1
	1	1	1	1	0

РЕШЕЊЕ под ц):

H=	1	1	1	1

Матрица N гласи

	2	-1	-1	0	1
	-1	3	-1	-1	1
N =	-1	-1	3	-1	1
	0	-1	-1	2	1
	1	1	1	1	0

Матрица N^{-1} гласи

	0.3125	-0.0625	-0.0625	-0.1875	0.25
	-0.0625	0.1875	-0.0625	-0.0625	0.25
N^{-1}=	-0.0625	-0.0625	0.1875	-0.0625	0.25
	-0.1875	-0.0625	-0.0625	0.3125	0.25
	0.25	0.25	0.25	0.25	0

ГММ – Методе оцена непознатих параметара – Инваријантне функције

За линеарну функцију $\mathbf{a}^T\mathbf{x}$ параматара $\mathbf{x}$ у ГММ моделу (56), где је **a**, **nx1** вектор, каже се да је **оцењива**, уколико постоји **nx1** вектор **c** , такав да за свако **x** важи релација

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{c}^T\mathbf{l}) = \mathbf{a}^T\mathbf{x}}$$

Без доказа, у моделу (56) следеће функције су оценљиве:

- Вектор E(l) очекиваних вредности опажања l;
- Вектор резидуала
- Линеарне функције оцењивих функција; и
- Пројекциони параметри x_b где је

$$\mathbf{x_b} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-}\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$$