



Univerzitet u Beogradu – Građevinski fakultet
www.grf.bg.ac.rs

Studijski program: **GEODEZIJA I GEOINFORMATIKA**

Modul: **GEODEZIJA**

Godina/Semestar: **I godina / 1 semestar**

Naziv predmeta (šifra): **Račun izravnjanja – napredni kurs (M2G1RI)**

Nastavnik: **Branko Božić**

Naslov predavanja: **ГАУС-МАРКОВЉЕВ МОДЕЛ - са условима између непознатих параметара**

Datum : 27.10.2020.

Садржај

- Гаус-Марковљев модел са условима између непознатих параметара / форма модела
- НЛНО непознатих параметара у Гаус-Марковљевом моделу са условима између непознатих параметара
- MNK оцена непознатих параметара у Гаус-Марковљевом моделу са условима између непознатих параметара
- Непомерена оцена варијансе јединичне тежине у Гаус-Марковљевом моделу са условима између непознатих параметара
- Оцена параметара са условима дефинисаним опажањима малих варијанси
- Девијације ГММ

ГММ – Методе оцена непознатих параметара - Гаус-Марковљев модел са условима између непознатих параметара / форма модела

Уколико у моделу (1) у односу на параметре $\mathbf{x}$ поставимо услов облика

$$\mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{w} \quad (25)$$

где је $\mathbf{H}$ $r \times u$ матрица познатих коефицијената са $r(\mathbf{H}) = r$ где је $r \leq u$ а, $\mathbf{W}$ познати $r \times 1$ вектор, тада се

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{E}(\mathbf{l}) \quad \text{са} \quad \mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{w} \quad \text{и} \quad \mathbf{K}_1 = \sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1} \quad (26)$$

назива *Гаус-Марковљев модел са условима*.

Уколико се изврши хомогенизација тежина, модел добија следећи облик

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{E}(\mathbf{l}) \quad \text{са} \quad \mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{w} \quad \text{и} \quad \mathbf{K}_1 = \sigma_0^2 \mathbf{I} \quad (27)$$

ГММ – Методе оцена непознатих параметара - НЛНО непознатих параметара у Гаус-Марковљевом моделу са условима између непознатих параметара /НЛНО решење

Линеарна функција $\mathbf{a}^T \mathbf{x}$ непознатих параметара $\mathbf{x}$ оцењује се користећи линеарну функцију $\mathbf{c}^T \mathbf{l}$ опажања $\mathbf{l}$, којој због уведених услова, прикључује се линеарна функција облика $\mathbf{d}^T \mathbf{w}$.

и $\mathbf{x}$ вектор $\mathbf{a}$ је познат, док су непознати $\mathbf{nx1}$ вектор $\mathbf{c}$ и $\mathbf{rx1}$ вектор $\mathbf{d}$.

Да би оценили непознате параметре, неопходно је да буду задовољени следећи услови по $\mathbf{x}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{c}^T \mathbf{l} + \mathbf{d}^T \mathbf{w}) &= \mathbf{a}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{V}(\mathbf{c}^T \mathbf{l} + \mathbf{d}^T \mathbf{w}) &= \min \end{aligned} \quad (28)$$

Проблем се решава преко Лагранжове функције (Koch, 1988). Коначна НЛНО вектора непознатих параметара у Гаус-Марковљевом моделу са условима, гласи

$$\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \left\{ \mathbf{A}^T \mathbf{l} + \mathbf{H}^T \left[\mathbf{H} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{H}^T \right]^{-1} \left[\mathbf{w} - \mathbf{H} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{l} \right] \right\} \quad (29)$$

са

$$\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{x}}} = \sigma_0^2 \left\{ (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} - (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{H}^T \left[\mathbf{H} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{H}^T \right]^{-1} \mathbf{H} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \right\} \quad (30)$$

ГММ – Методе оцена непознатих параметара - Оцена параметара по методи најмањих квадрата у Гаус-Марковљевом моделу са условима између непознатих параметара/МНК решење

Да би оценили непознате параметре по МНК методи неопходно је минимизирати функцију

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{x})^T(\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{x})/\sigma^2 \text{ уз услове } \mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{w} \quad (31)$$

Нормалне једначине које доводе до решења непознатих параметара $\tilde{\mathbf{x}}$ и Лагранжових мултипликатора $\mathbf{k}$ гласе,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T\mathbf{A} & \mathbf{H}^T \\ \mathbf{H} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T\mathbf{l} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \quad (32)$$

Оцене за, $\tilde{\mathbf{x}}$ и $\mathbf{k}$ су једнозначне.

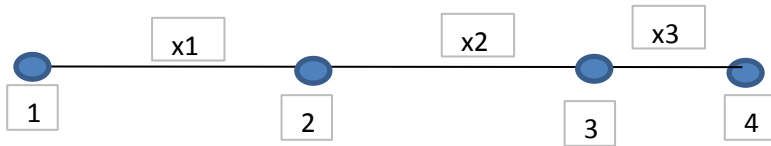
$$\tilde{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} - (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{H}^T[\mathbf{H}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{H}^T]^{-1}(\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{w}) \quad \text{за } \mathbf{P}=\mathbf{I} \quad (33)$$

Инверзија од (32) гласи

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{H}^T \\ \mathbf{H} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^{-1} - \mathbf{N}^{-1}\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{H}^T)^{-1}\mathbf{H}\mathbf{N}^{-1} & \mathbf{N}^{-1}\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{H}^T)^{-1} \\ (\mathbf{H}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{H}^T)^{-1}\mathbf{H}\mathbf{N}^{-1} & -(\mathbf{H}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{H}^T)^{-1} \end{bmatrix} \quad (34)$$

где је: $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$

ПРИМЕР 1 – изравнање са условима



Оценити највероватнију вредност распона:

d12=	23.342
d13=	47.231
d14=	60.446
d24=	37.1
d23=	23.895

Мерења

x1=	23.342
x1+x2=	47.231
x1+x2+x3=	60.446
x2+x3=	37.1
x2=	23.895

Једначине мерења

	x1	x2	x3	
A=	1	0	0	b= 23.342
	1	1	0	47.231
	1	1	1	60.446
	0	1	1	37.1
	0	1	0	23.895

x=	23.342
	23.892
	13.210

Оцене распона

Условна једначина (матрично)

Условна једначина (класично)

$$x_1 + x_2 + x_3 = 60.45$$

H=	1	1	1
----	---	---	---

Hx=w=	60.45
-------	-------

$$\tilde{x} = \hat{x} - (A^T A)^{-1} H^T [H (A^T A)^{-1} H^T]^{-1} (H \hat{x} - w)$$

	23.344
x(kor) = $\tilde{x}$	23.891
	13.215

Оцене
распона

$$23.344 + 23.891 + 13.215 = 60.45$$

ПРИМЕР 2 – изравнање са условима

Merenja	dh	s
h12	1.991	2.1
h31	6.751	3.1
h32	8.77	4.1
h34	12.883	4.5
h24	4.115	2.3

H1= 100

	1	0	0
A=	0	-1	0
	1	-1	0
	0	-1	1
	-1	0	1

	1	0	0	0	0
	0	0.458897	0	0	0
P=	0	0	0.262344	0	0
	0	0	0	0.217778	0
	0	0	0	0	0.833648

x=	1.996
	-6.762
	6.113

so= 0.007

Услов: H4 - H1 = 6.1

H=	0	0	1
w=	6.1		

AtPA	Ht	AtPI
H	0	w

РЕШЕЊЕ:

	1.990	= dx2
x=	-6.766	= dx3
	6.100	= dx4

so= 0.009

Контрола:

H4 - H1=6.1

**ГММ – Методе оцена непознатих
параметара - Непомерена оцена варијансе јединичне тежине у Гаус-Марковљевом
моделу са условима између непознатих параметара**

Без доказа, непомерена варијанса јединичне тежине по моделу (26) гласи

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\Omega_H}{\mathbf{n} - \mathbf{u} + \mathbf{r}} \quad (35)$$

$\mathbf{r}$ - Број услова

$$\Omega_H = (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{l})^T (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{l}) = \tilde{\mathbf{v}}^T \tilde{\mathbf{v}} \quad \text{или} \quad \Omega_H = \mathbf{l}^T \mathbf{l} - \mathbf{l}^T \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{w}^T \mathbf{k} \quad \text{а,} \quad \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{l} \quad (36)$$

Контрола рачунања Ω_H рачуна се на основу претходна два израза, а контрола рачунања резидуала $\tilde{\mathbf{v}}$ реализује се сходно

$$\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{l} - \mathbf{H}^T \mathbf{k}) \quad (37)$$

а на основу израза

$$\mathbf{A}^T \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{H}^T \mathbf{k} = \mathbf{0} \quad (38)$$

ГММ – Методе оцена непознатих параметара - Оцена параметара са условима дефинисаним опажањима малих варијанси

Уколико под условима подразумевамо опажања малих варијанси, тада се Гаус-Марковљев модел са условима (26) може се трансформисати у модел (1) без услова (Koch and Pope 1969 и Koch,1988), односно,

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{l}} = \begin{bmatrix} \mathbf{l} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{P}}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & c \cdot \mathbf{I} \end{bmatrix}, c \neq 0, c > 0 \quad (39)$$

Сходно (7), оцењивач $\tilde{\mathbf{X}}$ гласи

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{H}^T \mathbf{H} / c)^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} + \mathbf{H}^T \mathbf{w} / c) \quad (40)$$

За мале вредности c што значи и мале варијансе од $\mathbf{w}$, оцена по (40) је приближно једнака оцени по (29). Приликом избора вредности c треба бити обазрив, односно не сме бити ни значајно мала вредност јер ће тада елементи од $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l}$ бити безначајни у даљем поступку рачунања.

ГММ – Методе оцена непознатих параметара - Девијације модела

Оцена параметара у Гаус-Марковљевом моделу (1) или (4) заснива се на претпоставци да се очекиване вредности опажања $\mathbf{E(l)}$ могу репрезентовати матрицом познатих коефицијената $\mathbf{A}$ као линеарном комбинацијом непознатих параметара $\mathbf{x}$ и да је матрица тежина опажања $\mathbf{P}$ позната.

Навешћемо три случаја који доводе у питање наведене претпоставке, и то:

- Када је број непознатих параметара у моделу сувише мали (недовољан)
- Када је број непознатих параметара у моделу сувише велики (већи од неопходног), и
- Када матрица тежина није адекватна

Нека модел гласи:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{E(l)} \quad \text{са} \quad \mathbf{K}_1 = \sigma_0^2 \mathbf{I} \quad (45)$$

где су: $\mathbf{A}_1$ $n \times k$, а $\mathbf{A}_2$ $n \times (u-k)$ матрице, $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ су $(k \times 1)$ и $(u-k) \times 1$ вектори, респективно.

Нека је $r[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2] = u$ тада се оцењивачи $\hat{\mathbf{x}}_1$ и $\hat{\mathbf{x}}_2$ добијају на основу израза

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \hat{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T \mathbf{l} \\ \mathbf{A}_2^T \mathbf{l} \end{bmatrix} \quad \text{односно} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^{-1} + \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_2 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_1 \mathbf{N}^{-1} & -\mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_2 \mathbf{M}^{-1} \\ -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_1 \mathbf{N}^{-1} & \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \quad (46а) \quad (46б)$$

ГММ – Методе оцена непознатих параметара - Девијације модела

- *Случај 1 – Број непознатих параметара у моделу је сувише мали* -

Нека је дат модел облика

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 = \mathbf{E}(\mathbf{I})$$

$$\mathbf{K}_1 = \sigma_0^2 \mathbf{I} \quad (47)$$

Сходно (45)

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = (\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{A}_1^T \mathbf{I} \quad (48)$$

Ако је адекватан модел (45) тада је оцена (48) **померена**, јер сходно (45)

$$\mathbf{E}(\hat{\mathbf{x}}_1) = (\mathbf{A}_1^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}_1^T (\mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2) \quad (49)$$

Или, сходно $\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1 \neq \mathbf{0}$

$$\mathbf{E}(\hat{\mathbf{x}}_1) = \mathbf{x}_1 + (\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2 \quad (50)$$

Варијансе оцењивача $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}_1} = \sigma_0^2 (\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1)^{-1} = \sigma_0^2 \mathbf{N}^{-1}$
су такође **померене**.

Оцена **варијансе јединичне тежине** је
генерално **померена**, јер је сходно $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{A}_1 \hat{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{I}$

$$\mathbf{E}(\hat{\mathbf{v}}^T \hat{\mathbf{v}}) = \dots = \sigma_0^2 (\mathbf{n} - \mathbf{k}) + \mathbf{x}_2^T \mathbf{A}_2^T (\mathbf{I} - \mathbf{A}_1 (\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{A}_1^T) \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2 \geq \sigma^2 (\mathbf{n} - \mathbf{k}) \quad (51)$$

Ако је $\sigma_0^1 = 1$ тада оцена $\hat{\sigma}_0^2 > 1$
може значити да је, сходно
(5), број параметара у
одабраном моделу
неодовољан (сувише
мали).

ГММ – Методе оцена непознатих параметара - Девијације модела

- *Случај 2 – Број непознатих параметара у моделу је сувише велики -*

Нека је постављен модел облика (45), а нека је исправан модел облика

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 = \mathbf{E}(\mathbf{l}) \quad (52)$$

$$\mathbf{K}_1 = \sigma_0^2 \mathbf{I}$$

Оцењивач (46a) је **непомерен**, јер с обзиром на (46b) и (52) следи

$$\mathbf{E}(\hat{\mathbf{x}}_1) = \left[\mathbf{N}^{-1} + \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_2 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_1 \mathbf{N}^{-1} \quad - \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_2 \mathbf{M}^{-1} \right] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{x}_1 \quad (53)$$

Варијансе у $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}_1}$ су веће - **померене**.

$\mathbf{E}(\hat{\mathbf{v}}^T \hat{\mathbf{v}}) = \dots = \sigma_0^2 (\mathbf{n} - \mathbf{k}) \quad \Rightarrow \quad$ оцена варијансе јединичне тежине је **непомерена**.

ГММ – Методе оцена непознатих параметара - Девијације модела - *Случај 3 – Матрица тежина опажања није адекватна*

Нека је постављен модел облика

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{E(l)}$$

$$\mathbf{K}_l = \sigma^2 \mathbf{V}^{-1} \quad (54)$$

међутим адекватан модел је другачији и гласи

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{E(l)}$$

$$\mathbf{K}_l = \sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1} \quad (55)$$

$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{V} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{V} \mathbf{l}$ Представља **померену** оцену од $\mathbf{x}$

јер је $\mathbf{E}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{x}$

Оцена варијансе јединичне тежине је **померена** јер важи однос (Koch, 1988), :

$$(\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{V} \hat{\mathbf{v}}) = \dots \neq \sigma_0^2 (\mathbf{n} - \mathbf{u})$$