



Univerzitet u Beogradu – Građevinski fakultet
www.grf.bg.ac.rs

Studijski program: **GEODEZIJA I GEOINFORMATIKA**

Modul: **GEODEZIJA**

Godina/Semestar: **I godina / 1 semestar**

Naziv predmeta (šifra): **Račun izravnjanja – napredni kurs (M2G1RI)**

Nastavnik: **Branko Božić**

Naslov predavanja: **ГАУС-МАРКОВЉЕВ МОДЕЛ – Основне претпоставке -**

Datum : 20.10.2020.

САДРЖАЈ

- Основне претпоставке (модел са потпуним рангом)
- Глобални тест модела
- Хомогенизација тежина
- Пример
- Методе оцена непознатих параметара

ГММ – Основне претпоставке

Ако $\mathbf{A}$ има потпун ранг колона $\mathbf{r}(\mathbf{A})=\mathbf{u}$ и ако је $\mathbf{P}$ позитивно-дефинитна матрица, тада се

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{E}(\mathbf{I})$$

(1)

Очекиване вредности опажања су
линеарне комбинације датих
коэффицијената ($\mathbf{A}$) и непознатих
параметара ($\mathbf{x}$)

$$\mathbf{K}_1 = \sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1}$$

Матрица тежина $\mathbf{P}$ је позната, а непознат је
фактор варијансе σ_0^2

ГАУС-МАРКОВЉЕВ МОДЕЛ са потпуним рангом.

$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{Q}_1$ $\mathbf{Q}$ – Матрица кофактора опажања или матрица коэффицијената тежина

$\mathbf{P} = \mathbf{I}$



$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{E}(\mathbf{I})$$

$$\mathbf{K}_1 = \sigma_0^2 \mathbf{I}$$

(2)

ГММ – Основне претпоставке (модел са потпуним рангом)

$$E(\mathbf{l}) = \mathbf{Ax} \rightarrow \mathbf{l} = \mathbf{Ax} + \mathbf{e}$$

$$\mathbf{l} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{v}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1}, \quad E(\mathbf{e}\mathbf{e}^T) = \mathbf{K}_1 = \sigma_0^2 \mathbf{Q}$$

- $\mathbf{l}$ – n – вектор мерења (опажања)
- $E(.)$ – Оператор очекиване редности
- $\mathbf{x}$ – u - вектор непознатих параметара
- $\mathbf{A}$ – $n \times u$ – позната матрица коефицијената једначина опажања
- $\mathbf{e}$ – n – вектор истинитих (правих) вредности грешака
- $\mathbf{K}_1$ – $n \times n$ – коваријациона матрица опажања
- σ_0^2 – а приори фактор варијансе (дисперзије)
- $\mathbf{Q}$ – $n \times n$ – кофакторска матрица опажања
- $\mathbf{P}$ – $n \times n$ – матрица тежина опажања
- $\mathbf{v}$ – n – вектор резидуала

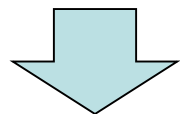
Основне претпоставке (потпуни ранг матрице A) – једначине опажања

Једначине опажања

$$E(l) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad - \text{ дужина}$$

$$E(l) = \arctan\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \quad - \text{ Оријентисани правац (азимут)}$$

$$E(l) = \arctan\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) + z \quad - \text{ Правац}$$



- Линеаризација

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$$

$$l_i + v_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{iu}x_u \quad - \text{ Једначина опажања}$$



Оцена – приближна вредност

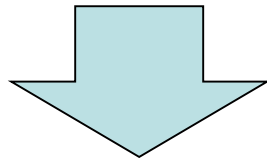
Мерење – Приближна вредност мерења (срачунато из приближних координата)

ГММ – Основне претпоставке (потпуни ранг матрице A) – оцена параметара

- Услови

$$E(\hat{x}_j) = x_j \quad - \text{Услов непомерености оцене}$$

$$s_{\hat{x}_j}^2 = \min \quad - \text{Услов минималне варијансе}$$



- Оцена (Caspary, 1987;
Koch, 1980; Rao, 1973, Seattle, 1971)...

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l}$$

$$s_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n - u}$$

- Кофакторске матрице

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}$$

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{v}} = \mathbf{Q} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T = \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_{\mathbf{v}}$$

$$\hat{l} = l + v$$

ГММ – Глобални тест модела

Критеријум нулте хипотезе глобалног теста модела гласи:

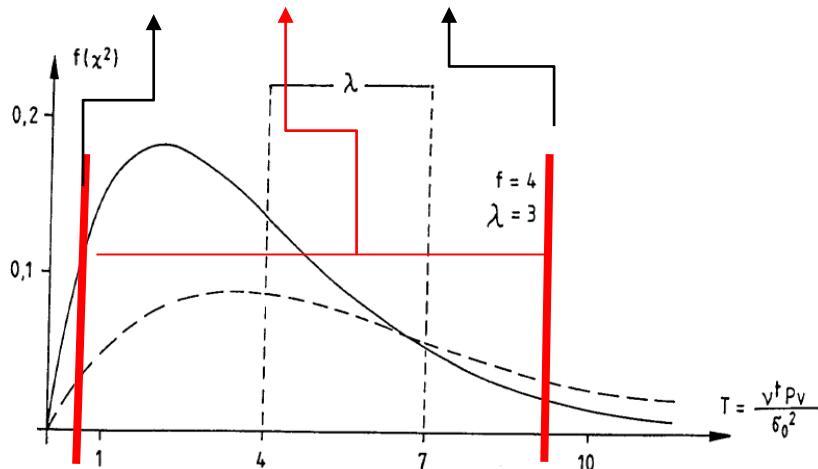
$$H_0 : E(\hat{\sigma}_0^2) = \sigma_0^2$$

Статистика

$$T = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-u} | H_0$$

Услов

$$\chi^2_{1-\alpha/2, f} \leq T \leq \chi^2_{\alpha/2, f}$$



Могући разлози за такву појаву могу бити различити, и то:

У функционалном моделу:

- пројекција (координатни систем)
- инструмент (калибрациони параметри)
- гравитационо поље
- модел рефракције
- фактор време

У опажањима:

- грубе грешке
- грешке записивања
- нестабилне тачке
- грешке центрисања

У стохастичком моделу:

- а прири варијанса
- корелација

У обради резултата мерења:

- програми
- улазни параметри
- нумеричка стабилност рачунања
- аумулиране грешке заокруживања.

ГММ – Хомогенизација тежина

$$\bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{E}(\bar{\mathbf{I}})$$

$$\mathbf{K}_{\bar{\mathbf{I}}} = \sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1} \quad (3)$$

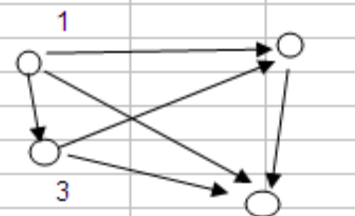
С обзиром да је $\mathbf{P}$ позитивно-дефинитно, постоји регуларна доња троугаона матрица $\mathbf{G}$ која задовољава услов:

$$\mathbf{P} = \mathbf{G}^T \mathbf{G} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \mathbf{A} = \mathbf{G}^T \cdot \bar{\mathbf{A}} \\ \mathbf{I} = \mathbf{G}^T \cdot \bar{\mathbf{I}} \\ \mathbf{v} = \mathbf{G}^T \cdot \bar{\mathbf{v}} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{E}(\mathbf{I}) \\ \mathbf{K}_I = \sigma_0^2 \mathbf{I} \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{l} \boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{I} + \mathbf{v}} \\ \boxed{\mathbf{K}_I = \sigma_0^2 \mathbf{I}} \end{array} \xRightarrow{(4)} \begin{array}{l} \text{Постиге се} \\ \text{једнородност мерења} \end{array}$$

ПРИМЕР 2.2-1 (Koch, 1988): Нека је матрица тежина дијагонална матрица облика $\mathbf{P} = \text{diag}(\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \dots \mathbf{p}_n)$. Тада је матрица $\mathbf{G}$ облика $\mathbf{G} = \text{diag}(\sqrt{\mathbf{p}_1} \ \sqrt{\mathbf{p}_2} \ \dots \sqrt{\mathbf{p}_n})$. Трансформација једначина опажања $\bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x} = \bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{v}}$ у систем $\mathbf{G}^T \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{x} = \mathbf{G}^T \cdot \bar{\mathbf{I}} + \mathbf{G}^T \cdot \bar{\mathbf{v}}$ подразумева множење једначина опажања са квадратним кореном тежина опажања. Такав поступак се у теорији најмањих квадрата назива **хомогенизацијом**.

ПРИМЕР – Хомогенизација тежина

	1	2	3	4	s			
A=	-1	1	0	0	0.02	1		H1= 100
	-1	0	1	0	0.026	2		H2= 101.11
	0	-1	0	1	0.023	3		H3= 102.15
	0	0	-1	1	0.025	4		H4= 100.8
	-1	0	0	1	0.028			
s=								
P=	2500	0	0	0	0			
	0	1479.28994	0	0	0			
	0	0	1890.35917	0	0			
	0	0	0	1600	0			
	0	0	0	0	1275.51			



Homogenizacija					
Gt=	50	0	0	0	0
	0	38.4615385	0	0	0
	0	0	43.4782609	0	0
	0	0	0	40	0
	0	0	0	0	35.71429
GtA=	-50	50	0	0	
	-38.46153846	0	38.4615385	0	A'tA=
	0	-43.4782609	0	43.4782609	
	0	0	-40	40	
	-35.71428571	0	0	35.7142857	
GtF=	56.5				inv(A'tA)=
	83.69230769				
	-12.47826087				
	-53				
	29.57142857				

РЕШЕЊЕ:

	P=I	P	hom
Xoc=	99.9625	99.9612	99.9612
	101.0898	101.0894	101.0894
	102.1318	102.1308	102.1308
	100.8000	100.8000	100.8000

ГММ – Методе оцена непознатих параметара

- Најбоља линеарна непомерена оцена (NLNO) – Best Invariant Quadratic Unbiased Estimation;
- Оцена по методи најмањих квадрата – Least Square (MНК); и
- Оцена по методи максималне веродостојности

ГММ – Методе оцена непознатих параметара - Најбоља линеарна непомерена оцена

У линеарном моделу $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{E}(\mathbf{l})$ линеарна функција $\mathbf{a}^T \mathbf{x}$ оцењује се помоћу $\mathbf{c}^T \mathbf{l}$
 $\mathbf{K}_l = \sigma_0^2 \mathbf{I}$

Најбољи, линеаран и непомерен оцењивач – услови:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{E}(\mathbf{c}^T \mathbf{l}) = \mathbf{a}^T \mathbf{x} & \text{или} \quad \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{a}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{V}(\mathbf{c}^T \mathbf{l}) = \min & \text{или} \quad \mathbf{V}(\mathbf{c}^T \mathbf{l}) = \sigma_0^2 \mathbf{c}^T \mathbf{c} \end{array} \quad (5)$$

Најбољи линеаран и непомерен оцењивач – НЛНО добија се преко Лагранжове функције чије прве изводе по аргументу $\mathbf{c}$ изједначавамо са нулом. Решење по $\mathbf{c}$ гласи

$$\mathbf{c}^T = \mathbf{a}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \quad \text{са варијансом} \quad \mathbf{V}(\mathbf{c}^T \mathbf{l}) = \sigma_0^2 \mathbf{a}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{a} \quad (6)$$

Најбољи линеарни непомерени оцењивач $\hat{\mathbf{x}}$ непознатих параметара $\mathbf{x}$ и његова матрица коваријанси $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}$ (са минималним трагом) у ГММ (2) гласи:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{l} \quad \text{са} \quad \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}} = \sigma_0^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \quad (7)$$

или, у ГММ (1)

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} \quad \text{са} \quad \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}} = \sigma_0^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \quad (8)$$

ГММ – Методе оцена непознатих параметара – Оцена по методи најмањих квадрата

Оцена непознатих параметара по МНК добија се минимизирањем функције

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sigma_0^2} (\mathbf{l} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x})^T (\mathbf{l} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}) \quad (9)$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sigma_0^2} (\mathbf{l}^T \mathbf{l} - 2\mathbf{l}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x}) \right) / \frac{\partial}{\partial x} = 0$$

која се реализује изједначавањем првог извода функције $f(\mathbf{x})$ по параметру $\mathbf{x}$ са нулом.

Коначно решење гласи:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{l} \quad (10)$$

МНК решење = НЛНО решење

Нека су: $\hat{\mathbf{l}}$ вектор оцена опажања
 $\hat{\mathbf{v}}$ вектор оцена резидуала (поправака)

Важи однос:

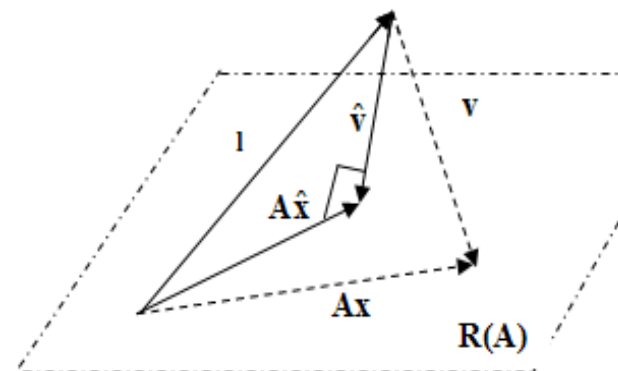
$$\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{l}} - \mathbf{l} \quad \text{са} \quad \hat{\mathbf{l}} = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} \quad (11)$$

ГММ – Методе оцена непознатих параметара – Оцена по методи најмањих квадрата (геометријска интерпретација)

Простор колона матрице $\mathbf{A}$ у ознаци

$$\mathbf{R}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{z} \mid \mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{x}\}$$

одређује се сходно $\mathbf{r}(\mathbf{A}) = u$



где је $\mathbf{u}$, u -димензионални Еуклидов простор $\mathbf{E}^u$ у којем се оцењује $\mathbf{A}\mathbf{x}$.

Оцена непознатих параметара $\mathbf{x}$ у ГММ добија се ортогоналном пројекцијом вектора опажања $\mathbf{l} \in \mathbf{E}^n$ на простор колона $\mathbf{R}(\mathbf{A})$

$$\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{l}$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{l}} - \mathbf{l}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \quad (12)$$

Множење (12) с лева са

$(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$ даће оцењивач који је идентичан са (10).

Вектор опажања јединствено је описан са $\mathbf{l} = \mathbf{R}\mathbf{l} + (\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{l}$ а, сходно (11) вектор оцена резидуала гласи

$$\hat{\mathbf{v}} = -(\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{l} \quad \text{или} \quad \hat{\mathbf{v}} = -(\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T)\mathbf{l} \quad \text{а, ако мерења нису исте тачности} \quad \hat{\mathbf{v}} = -(\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{P}\mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P})\mathbf{l} \quad (13)$$

С обзиром да су вектори $\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$ и $\hat{\mathbf{v}}$ ортогонални, важи следећа декомпозиција $\mathbf{l}^T \mathbf{l} = \hat{\mathbf{l}}^T \hat{\mathbf{l}} + \hat{\mathbf{v}}^T \hat{\mathbf{v}}$

$$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{v}}} = \sigma_0^2 (\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T) \quad \text{односно} \quad \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{v}}} = \sigma_0^2 (\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{P}\mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T) \quad \text{са} \quad \mathbf{r}(\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{v}}}) = n - u \quad (14)$$

Коваријациона матрица оцена резидуала

ГММ – Методе оцена непознатих параметара – Оцена по методи максималне веродостојности

За опажања се претпоставља да припадају нормалној расподели

За модел облика

$$\mathbf{E}(\mathbf{l}) = \mathbf{Ax} \quad \text{са} \quad \mathbf{K}_1 = \sigma_0^2 \mathbf{I} \quad (15)$$

важи:

$$\mathbf{l} \sim \mathbf{N}(\mathbf{Ax}, \sigma_0^2 \mathbf{I})$$

Оцена непознатих параметара по методи **максималне веродостојности** добија се минимизирањем функције максималне веродостојности

$$\mathbf{L}(\mathbf{l} : \mathbf{x}, \sigma_0^2)$$

Проблем се решава изједначавањем диференцијала функције по $\mathbf{x}$ и σ_0^2 са нулом

Без доказивања (Koch, 1988, Перовић, 2006, и др.), коначан израз за оцену варијансе гласи

$$\overline{\sigma}_0^2 = \frac{1}{n} (\mathbf{l} - \mathbf{Ax})^T (\mathbf{l} - \mathbf{Ax}) \quad (16)$$

што показује да оцена од σ_0^2 **није непомерена**. Оцена параметара $\mathbf{x}$ **идентична** је решењима по МНК и НЛНО.

ГММ – Методе оцена непознатих параметара - Непомерена оцена варијансе јединичне тежине

Оцењивач непознате варијансе јединичне тежине у ГММ следи из збира квадрата резидуала:

$$\Omega = \hat{\mathbf{v}}^T \hat{\mathbf{v}} \quad \text{или} \quad \Omega = \hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}} \quad (17)$$

Да би добили непомерену оцену од σ_0^2 , неопходно је одредити очекивану вредност од Ω .

Сходно изразима (13) $\hat{\mathbf{v}} = -(I - A(A^T A)^{-1} A^T) \mathbf{l}$

$$\Omega = I^T (I - A(A^T A)^{-1} A^T) \mathbf{l} \quad \text{или} \quad (18)$$

$$\Omega = I^T (\mathbf{P} - \mathbf{P} A (A^T \mathbf{P} A)^{-1} A^T \mathbf{P}) \mathbf{l}$$

Заменом $\hat{\mathbf{x}}$ из (7) и (8) у (18) даје

$$\Omega = I^T \mathbf{l} - I^T A \hat{\mathbf{x}} \quad \text{или} \quad \Omega = I^T \mathbf{P} \mathbf{l} - I^T \mathbf{P} A \hat{\mathbf{x}} \quad (19)$$

Очекивана вредност од $E(\Omega)$ гласи $E(\Omega) = \sigma_0^2 (\mathbf{n} - \mathbf{u}) + \mathbf{x}^T A^T (I - A(A^T A)^{-1} A^T) A \mathbf{x}$

$$E(\Omega) = \sigma_0^2 (\mathbf{n} - \mathbf{u}) \quad (20)$$

Непомерена оцена варијансе јединичне тежине гласи:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\Omega}{\mathbf{n} - \mathbf{u}} \quad (21)$$

Коваријациона матрица оцена непознатих параметара са σ_0^2 :

$$\hat{\mathbf{K}}_{\hat{\mathbf{x}}} = \hat{\sigma}_0^2 (A^T A)^{-1} \quad (22)$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\hat{\mathbf{x}}} = \hat{\sigma}_0^2 (A^T \mathbf{P} A)^{-1}$$

Коваријациона матрица оцена опажања са σ_0^2

За $\mathbf{P} = \mathbf{I}$	За $\mathbf{P} \neq \mathbf{I}$
$\hat{\mathbf{K}}_1 = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{I} \quad (23)$	$\hat{\mathbf{K}}_1 = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{P}^{-1} \quad (24)$
$\hat{\mathbf{K}}_i = \hat{\sigma}_0^2 A (A^T A)^{-1} A^T$	$\hat{\mathbf{K}}_i = \hat{\sigma}_0^2 A (A^T \mathbf{P} A)^{-1} A^T$
$\text{tr}(\hat{\mathbf{K}}_1) \geq \text{tr}(\hat{\mathbf{K}}_i)$	