

Математика 1 – Писмени испит

1. (20 поена) У зависности од реалног параметра p дискутовати и решити систем:

$$\begin{aligned} 2x + y + 3z + 4u &= 3 \\ 10x + 3y + (2p+1)z + 12u &= 13 \\ 5x + 2y + 6z + 8u &= 2p-1 \end{aligned}$$

Решење:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ 10 & 3 & 2p+1 & 12 & 13 \\ 5 & 2 & 6 & 8 & 2p-1 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 17-4p \\ 0 & 0 & 2p-8 & 0 & 32-8p \end{array} \right]$$

Разликујемо 2 случаја:

1. $p = 4$

$$[A|B] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$\rho(A) = \rho([A|B]) = 2$, па систем има бесконачно много решења са $4 - 2 = 2$ слободна параметра. Њему еквивалентан систем гласи

$$\begin{aligned} 2x + y + 3z + 4u &= 3 \\ y + 3z + 4u &= 1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

За $z = r$ и $u = t$, $r, t \in \mathbb{R}$, добијамо $y = 1 - 3r - 4t$ и $x = 1$. Дакле, решења система су облика

$$(x, y, z, t) = (1, 1 - 3r - 4t, r, t), \quad r, t \in \mathbb{R}.$$

2. $p \neq 4$

$\rho(A) = \rho([A|B]) = 3$, па систем има бесконачно много решења са $4 - 3 = 1$ слободним параметром. Њему еквивалентан систем гласи

$$\begin{aligned} 2x + y + 3z + 4u &= 3 \\ y + 3z + 4u &= 17 - 4p \\ (2p - 8)z &= 32 - 8p \end{aligned}$$

Из треће једначине добијамо $z = -4$. За $u = t$, $t \in \mathbb{R}$, добијамо $x = 2p - 7$ и $y = 29 - 4p - 4t$. Решења система су облика

$$(x, y, z, t) = (2p - 7, 29 - 4p - 4t, -4, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

2. (20 поена) Дата је матрица $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. Одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A , а затим одредити A^n , $n \in \mathbb{N}$.

Решење:

$$\varphi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \dots = -1 - \lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda = -(\lambda + 1)^3.$$

Дакле, матрица A има троструку сопствену вредност $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Сопствени вектор $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ који одговара овој сопственој вредности добијамо решавањем система $(A + E)v = \mathbf{0}$. Решење је

$$v = t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Пошто матрица није дијагонализабилна, A^n ћемо израчунати позивајући се на Кејли-Хамилтонову теорему, која каже да је $\varphi_A(A) = \mathbf{0}$. Делењем полинома x^n полиномом $\varphi_A(x)$ добијамо

$$x^n = \varphi_A(x)q(x) + r(x),$$

где је $\deg r(x) < \deg \varphi_A(x)$. Пошто је $\deg \varphi_A(x) = 3$, $r(x)$ је степена највише 2, па је

$$x^n = \varphi_A(x)q(x) + ax^2 + bx + c. \quad (1)$$

Пошто је -1 трострука нула полинома $\varphi_A(x)$, следи да је $\varphi_A(x) = \varphi'_A(x) = \varphi''_A(x) = 0$, па диференцирањем једнакости (1) два пута добијамо

$$nx^{n-1} = \varphi'_A(x)q(x) + \varphi_A(x)q'(x) + 2ax + b \quad (2)$$

$$n(n-1)x^{n-2} = \varphi''_A(x)q(x) + 2\varphi'_A(x)q'(x) + \varphi_A(x)q''(x) + 2a \quad (3)$$

Заменом -1 у једнакостима (1) – (3) добијамо систем линеарних једначина по a, b и c

$$\begin{aligned} (-1)^n &= a - b + c \\ -n(-1)^n &= -2a + b \\ n(n-1)(-1)^n &= 2a. \end{aligned}$$

Решења овог система су

$$a = \frac{n(n-1)(-1)^n}{2}, \quad b = n(n-2)(-1)^n, \quad c = \frac{(n-2)(n-1)(-1)^n}{2}.$$

Сада из (1) следи

$$A^n = \underbrace{\varphi_A(A)}_{\mathbf{0}} q(A) + aA^2 + bA + cE = aA^2 + bA + cE.$$

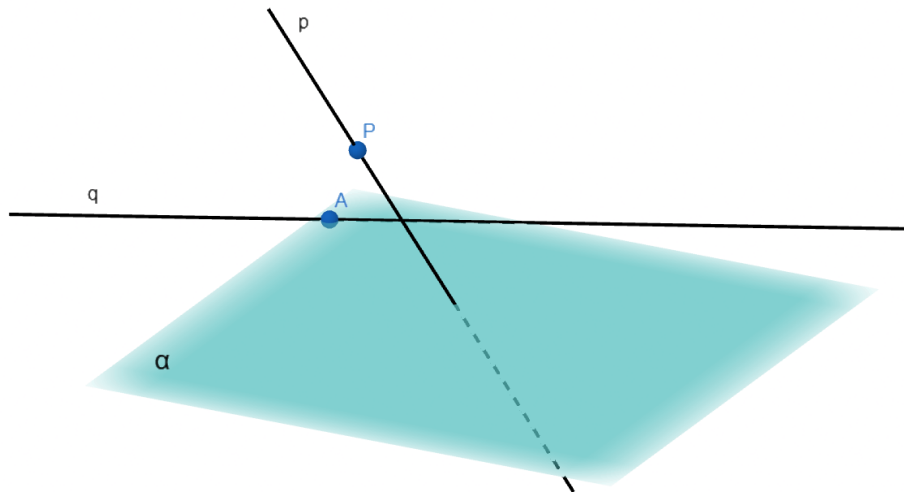
3. (20 поена) Дате су права $p : x = t + 2, y = -2t + 1, z = -t + 3$, где је $t \in \mathbb{R}$, раван $\alpha : 2x - y - 2z - 3 = 0$ и тачка $A(2, 2, 0)$. Одредити једначину праве која садржи тачку A , паралелна је са α и сече праву p .

Решење: Из задатка читамо да је $\vec{p} = (1, -2, -1)$, $P = (2, 1, 3) \in p$ и $\vec{n}_\alpha = (2, -1, -2)$. Пошто је тражена права q паралелна са равни α , следи да је $\vec{q} \perp \vec{n}_\alpha$, па је $\vec{q} \cdot \vec{n}_\alpha = 0$. Ако је $\vec{q} = (a, b, c)$, следи $(a, b, c) \cdot (2, -1, -2) = 0$, односно $2a - b - 2c = 0$. Пошто се p и q секу, важи $[\vec{PA}, \vec{p}, \vec{q}] = 0$, односно

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0,$$

из чега даље следи $5c = 13a$. За $a = 5$ (на пример) добијамо $c = 13$ и $b = -16$. Дакле, $\vec{q} = (5, -16, 13)$, па пошто $A \in q$, права q има једначину

$$q : \frac{x-2}{5} = \frac{y-2}{-16} = \frac{z}{13}.$$



4. (20 поена) Испитати ток и нацртати график функције

$$f(x) = \frac{x^2}{2x-1} e^{-\frac{1}{x}}.$$

Решење:

1. *Домен:* Функција је дефинисана за све реалне бројеве осим за $x = 0$ и $x = \frac{1}{2}$, па је

$$D_f = \left(-\infty, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

2. *Парност/непарност/периодичност:* Функција f није ни парна ни непарна. Функције f није периодична.

3. *Нуле и знак*: Експоненцијална функција је увек позитивна, па функција нема нула. Знак функције зависи од знака израза $\frac{x^2}{2x-1}$:

$$f(x) > 0 \text{ за } x \in (\frac{1}{2}, +\infty), \quad f(x) < 0 \text{ за } x \in (-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2}).$$

4. *Асимптоте*: Испитујемо понашање функције у тачкама у којима није дефинисана, као и на крајевима домена. Прво,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{2x-1} e^{-\frac{1}{x}} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{2x-1} e^{-\frac{1}{x}} = \left\{ t = -\frac{1}{x} \rightarrow +\infty \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{t^2}}{-2\frac{1}{t}-1} e^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{-2t-t^2} = -\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{2t+t^2} = -\infty, \end{aligned}$$

где последња једнакост важи јер експоненцијална функција расте брже од полинома када $t \rightarrow +\infty$. Дакле, права $x = 0$ је вертикална асимптота функције f са леве стране, док са десне стране график функције улази у тачку $(0, 0)$. Даље, имамо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{x^2}{2x-1} e^{-1/x} = \frac{(1/2)^2}{0^-} e^{-2} = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{x^2}{2x-1} e^{-1/x} = \frac{(1/2)^2}{0^+} e^{-2} = +\infty. \end{aligned}$$

па је права $x = \frac{1}{2}$ вертикална асимптота функције f .

Испитујемо понашање функције на крајевима домена. Кад $x \rightarrow \pm\infty$ можемо искористити Маклоренове развоје:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2}{2x-1} e^{-1/x} = \frac{x^2}{2x(1-\frac{1}{2x})} e^{-1/x} \\ &= \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{(1-\frac{1}{2x})} e^{-1/x} = \frac{x}{2} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{-1} e^{-1/x} \\ &= \frac{x}{2} \left(1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{2x}\right)\right) \left(1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= \frac{x}{2} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow \pm\infty. \end{aligned}$$

Дакле, права $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$ је коса асимптота функције f када $x \rightarrow \pm\infty$.

5. $f'(x)$, *монотоност*: Имамо:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^2}{2x-1} e^{-\frac{1}{x}} \right)' = \frac{2x(2x-1) - 2x^2}{(2x-1)^2} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{x^2}{2x-1} e^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{2x^2-1}{(2x-1)^2} e^{-\frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

Важи $f'(x) = 0$ акко је $2x^2 - 1 = 0$. Дакле, тачке $x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ су стационарне тачке. Знак првог извода зависи само од знака израза $2x^2 - 1$, па је $f'(x) > 0$ акко је $x \in (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$, односно $f'(x) < 0$ акко је $x \in (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \cup (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Закључујемо да функција f расте за $x \in (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ и за $(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$, а опада за $x \in (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ и за $x \in (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$. У тачки $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ функција f има локални максимум, а у тачки $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ локални минимум.

6. $f''(x)$, конвексност/конкавност: Имамо:

$$f''(x) = \left(\frac{2x^2 - 1}{(2x - 1)^2} e^{-\frac{1}{x}} \right)' = \dots = \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2(2x - 1)^3} e^{-\frac{1}{x}}.$$

Како је $2x^2 - 2x + 1 > 0$ за свако $x \in D_f$, знак другог извода зависи само од знака израза $2x - 1$. Важи $f''(x) > 0$ акко је $x > \frac{1}{2}$, односно $f''(x) < 0$ акко $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2})$. Дакле, функција f је конкавна за $x \in (-\infty, 0)$ и за $x \in (0, \frac{1}{2})$, а конвексна је за $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$. Превојних тачака нема.

7. График:

