

Завршни испит из Математике 1

Презиме и име:

Број индекса:

1. Одредити све векторе $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ који задовољавају једнакост $v^T S v = v^T v$, ако је $S = [s_{ij}]$ симетрична матрица реда 2 дата са: $s_{ij} = |i - j| + 1$. Дати геометријску интерпретацију. (2)

$$v^T S v = v^T v \iff [x \ y] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x \ y] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \iff x^2 + 4xy + y^2 = x^2 + y^2 \iff xy = 0 \iff x = 0 \vee y = 0.$$

Геометријски, ови вектори су у скупу $\mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \cup \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$, што су вектори координатних оса.

2. Дефинисати производ матрица. Ако је $A = [a_{ij}]$ матрица типа $m \times 3$, дата са: $a_{ij} = i - j$, $B = [b_{ij}]$ матрица типа $3 \times n$, дата са: $b_{ij} = i - j$ и $C = AB$, одредити елемент c_{26} према овој дефиницији. (2)

Дефиниција 2.18 на страни 60.

Према овој дефиницији, за $i = 2$ и $j = 6$, добија се:

$$c_{26} = \sum_{k=1}^3 a_{2k} b_{k6} = a_{21} b_{16} + a_{22} b_{26} + a_{23} b_{36} = 1 \cdot (-5) + 0 \cdot (-4) + (-1) \cdot (-3) = -2.$$

3. За квадратну матрицу A кажемо да је идемпотентна ако важи услов $A^2 = A$. Одредити све идемпотентне горње троугаоне матрице реда 2. (2)

Матрица A реда 2 је горње троугаона ако је $a_{21} = 0$. Добија се:

$$A^2 = A \iff \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} a^2 & b(a+c) \\ 0 & c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \iff a^2 = a \wedge c^2 = c \wedge b(a+c) = 0.$$

Решавањем система добијамо матрице: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, где је $b \in \mathbb{R}$.

4. Формулисати Кронекер-Капелијеву теорему. (1)

Теорема 2.18 на страни 87.

5. Дефинисати појмове базе и димензије векторског простора. Ако је $e = [e_1, e_2, e_3]$ једна база векторског простора $V = \mathbb{R}^3$ и ако је $A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ регуларна матрица, шта се може рећи о скупу вектора $[Ae_1, Ae_2, Ae_3]$? Образложити одговор. (2)

Дефиниције 2.35 и 2.36 на странама 77 и 79.

Како је A регуларна матрица, $f = [Ae_1, Ae_2, Ae_3]$ је нова база простора $V = \mathbb{R}^3$. За доказ погледати поглавље "Матрица преласка са базе на базу" на страни 80.

6. Написати услов паралелности за праву $l : \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ и раван $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$. Затим написати једначину праве l која садржи тачку $(1,1,1)$ и паралелна је са равни xOy . Који подскуп у $\mathbb{R}^3$ формирају све праве које задовољавају услов задатка? (2)

Услов паралелности:

$$\langle \vec{N}_\pi, \vec{l} \rangle = 0 \iff Aa + Bb + Cc = 0.$$

Једначина равни xOy је $z = 0$, па горњи услов гласи $0 \cdot a + 0 \cdot b + 1 \cdot c = 0$, те је $c = 0$, док су a и b произвољни реални бројеви. Једначине ових правих у канонском облику биће:

$$l: \frac{x-1}{a} = \frac{y-1}{b} = \frac{z-1}{0}, \quad a, b \in \mathbb{R}, (a, b) \neq (0, 0).$$

Све праве које задовољавају услов задатка очигледно описују раван $z = 1$.

7. Написати по дефиницији: $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} = 0$. Затим одредити n_0 , ако је $\varepsilon = 1/10$. (2)

Дефиниција 4.5 на страни 160.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} = 0 \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \implies e^{-n} < \varepsilon), \quad e^{-n} < 10^{-1} \text{ за } n \geq 3.$$

8. Дефинисати појам непрекидности функције, тачке прекида и врсте прекида. Дати пример функције дефинисане на $\mathbb{R}$ која у тачки $x_1 = -1$ има отклоњив прекид прве врсте, а у тачки $x_2 = 3$ има прекид друге врсте. Скицирати график одабране функције. (2)

Дефиниција 5.18 на страни 197, и дефиниције 5.20 и 5.21 на страни 200. Као пример можемо узети функцију

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 3] \\ 2, & x = -1 \\ \frac{1}{x-3}, & x \in (3, +\infty). \end{cases}$$

9. Лагранжова теорема о средњој вредности. Исказ, доказ и геометријска интерпретација. (3)

Теорема 6.8 на страни 226.

10. Показати по дефиницији да је $(\cos x)' = -\sin x$. (2)

За функцију $f(x) = \cos x$ биће:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin\left(\frac{2x+h}{2}\right) \sin \frac{h}{2}}{h} = - \lim_{h \rightarrow 0} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = -\sin x.$$

Завршни испит из Математике 1

Презиме и име:

Број индекса:

1. Дефинисати појам детерминанте. Ако је A ортогонална матрица било ког реда, чему је једнака $\det(A)$? Образложити одговор. (2)

Дефиниција 2.3 на страни 46.

$$AA^T = I \implies \det(AA^T) = \det(I) \implies \det(A)\det(A^T) = 1 \implies (\det(A))^2 = 1 \implies \det(A) = 1 \vee \det(A) = -1.$$

2. Дефинисати ранг матрице. Одредити $r(A)$ у зависности од реалног параметра p , ако је $A = [a_{ij}]$ матрица формата 3×2 , дата са: $a_{ij} = p + i - j$. Образложити одговор. (2)

Било која од више еквивалентних дефиниција ранга, нпр. дефиниција 2.39 на страни 84. Низом елементарних трансформација добија се:

$$A = \begin{bmatrix} p & p-1 \\ p+1 & p \\ p+2 & p+1 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \implies r(A) = 2 \text{ за све } p \in \mathbb{R}.$$

- Показати да реална $m \times n$ матрица $A = [a_{ij}]$ дефинише линеаран оператор $L: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Затим објаснити геометрију пресликавања одређеног матрицом $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$, где је $a_{ij} = i - j$. (3)

За пресликавање $L: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ дефинисано са $L(X) = AX$ очигледно важи:

$$L(X + Y) = A(X + Y) = AX + AY = L(X) + L(Y) \text{ и } L(\lambda X) = A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda L(X), \text{ па је } L \text{ linearno.}$$

Приметимо да за дату матрицу $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ важи $A = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}$, па је у питању ротација равни за $\pi/2$.

4. Формулисати Кејли-Хамилтонову теорему. (1)

Теорема 2.23 на страни 92.

5. Дефинисати појам еуклидског векторског простора. Илустровати примером. (2)

Дефиниција 2.48 на страни 96.

Пример: $V = \mathbb{R}^n$, са стандардним скаларним производом.

6. Одредити реални параметар a тако да се равни $\pi_1: x - y = 1$, $\pi_2: y - z = -1$ и $\pi_3: x - z = a$, секу по правој l . Написати једначину добијене праве l у канонском облику. (2)

Решавањем система линеарних једначина добија се:

$$[A|\bar{A}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & a \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{array} \right] \implies r(A) = r(\bar{A}) = 2 \iff a = 0.$$

За $a = 0$ једначина праве $l: x - y = 1$, $y - z = -1$ у канонском облику биће:

$$l: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}.$$

7. Формулисати теорему о два полицајца за низове. Затим наћи $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos e^n}{\sqrt{n}}$. (1)

Теорема 4.6 на страни 163. Како је $-1 \leq \cos e^n \leq 1$, биће:

$$-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{\cos e^n}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}},$$

па је према наведеној теореди тражени лимес једнак нули.

8. Дефинисати појмове непрекидности и диференцијабилности функције у тачки x_0 . Затим дати пример функције која је непрекидна, али није диференцијабилна у тачки $x_0 = -1$. (2)

Дефиниције 5.18 на страни 197 и 6.1 на страни 214. Као пример можемо узети функцију

$$f(x) = |x + 1|.$$

9. Сопствене вредности симетричног линеарног оператора (симетричне матрице) су реални бројеви. Доказати. (3)

Теорема 2.36 на страни 105.

10. Показати да је скуп симетричних квадратних матрица реда n векторски простор (потпростор векторског простора $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$). Да ли исто важи за скуп свих регуларних матрица реда n ? Образложити одговор. (2)

Матрица $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ је симетрична ако је $A^T = A$. Означимо скуп симетричних матрица реда n са $\mathcal{S}$. Нека су $A, B \in \mathcal{S}$ и нека је $\lambda \in \mathbb{R}$. Тада:

$$(A+B)^T = A^T + B^T = A+B \implies A+B \in \mathcal{S}, \quad (\lambda A)^T = \lambda A^T = \lambda A \implies \lambda A \in \mathcal{S},$$

па је $\mathcal{S}$ потпростор векторског простора $V = \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, те је и сам векторски простор. Даље, како збир две регуларне матрице не мора бити регуларна матрица, други скуп нема структуру векторског простора.

Завршни испит из Математике 1

Презиме и име:

Број индекса:

1. Дефинисати ранг матрице. Одредити $r(A)$, ако је $A = [a_{ij}]$ квадратна матрица реда 3, дата са: $a_{ij} = i + j$. (2)

Било која од више дефиниција ранга, нпр. дефиниција 2.39 на страни 84.
Низом елементарних трансформација добија се:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies r(A) = 2.$$

2. Дефинисати појам језгра линеарног оператора. Одредити затим језгро оператора датог матрицом A из првог питања. (2)

Дефиниција 2.32 на страни 74.

$$L(v) = 0 \iff \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ -2\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \implies \text{Ker}(L) = \mathcal{L}(v), \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Дефинисати појам базе векторског простора V . Дати пример две различите базе векторског простора $V = \mathbb{R}_1[x]$. (2)

Дефиниција 2.35 на страни 75.

На пример,

$$e = [1, x], \quad f = [1 + x, 2 + x].$$

4. Дефинисати сопствене векторе и сопствене векторе матрице. Одредити затим збир и производ сопствених вредности квадратне матрице $A = [a_{ij}]$ реда 2 дате са: $a_{ij} = i - j$. (2)

Дефиниција 2.44 на страни 91.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = \text{Tr}(A) = 0, \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det(A) = 1.$$

5. Дефинисати скаларни производ у еуклидском векторском простору V и дати један пример по избору. (2)

Дефиниција 2.48 на страни 96.

Пример - у било ком ЕВП V , са базом e , један скаларни производ дат је са:

$$\langle u, v \rangle = u_e^T v_e, \quad u, v \in V.$$

6. Дефинисати Кошијев низ. Исказати једно тврђење (по избору) о Кошијевим низовима. (2)

Дефиниција 4.10 на страни 172 и исказ нека од теорема након ове дефиниције.

7. Написати по дефиницији: $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = +\infty$. (1)

Дефиниција 4.5 на страни 160.

$$(\forall E > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \implies \ln n > E).$$

8. Дефинисати појам диференцијабилности функције у тачки x_0 и дати геометријску интерпретацију. Затим одредити једначину тангенте на криву $f(x) = \operatorname{tg} x$, ако је $x_0 = \pi/4$. (2)

Дефиниција 6.1 на страни 214 и објашњење слике на истој страни.

$$t: y - 1 = 2(x - \pi/4).$$

9. Сваки конвергентан низ је ограничен. Доказати. (3)

Теорема 4.2 на страни 160.

10. Нека је $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ линеаран оператор. Наћи $L(0, -1, 5)$, ако је $L(1, 0, 0) = (2, 1)$, $L(0, 1, 0) = (0, -1)$ и $L(0, 0, 1) = (3, 3)$. (2)

Задатак 84 на страни 110. Користимо дефиницију линеарног пресликавања:

$$\begin{aligned} L(0, -1, 5) &= L[0 \cdot (1, 0, 0) - 1 \cdot (0, 1, 0) + 5 \cdot (0, 0, 1)] = 0 \cdot L(1, 0, 0) - 1 \cdot L(0, 1, 0) + 5 \cdot L(0, 0, 1) \\ &= 0 \cdot (2, 1) - 1 \cdot (0, -1) + 5 \cdot (3, 3) = (0, 0) + (0, 1) + (15, 15) = (15, 16). \end{aligned}$$

Завршни испит из Математике 1

Презиме и име:

Број индекса:

1. Дефинисати појам детерминанте. Одредити $\det(5A)$, ако је $A = [a_{ij}]$ матрица реда 3, дата са: $a_{ij} = 2, i \neq j$ и $a_{ij} = 0, i = j$. (2)

Дефиниција 2.3 на страни 46.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \det(A) = 16 \implies \det(5A) = 5^3 \cdot \det(A) = 2000.$$

2. Дате су квадратне матрице A и B . Дефинисати појмове: $A \sim B$ и $A \approx B$. Да ли су еквивалентне матрице истовремено и сличне? Образложити одговор. (2)

Дефиниције 2.24 на страни 66 и 2.38 на страни 83.

Еквивалентне квадратне матрице не морају бити и сличне. На пример матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

су очигледно еквивалентне, али нису сличне, јер је, на пример, $\varphi_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \neq \varphi_B(\lambda) = \lambda^2$.

3. Дефинисати појам линеарне зависности и линеарне независности вектора v_1, v_2, v_3 и v_4 у реалном векторском простору V . Дати пример два линеарно зависна вектора у реалном векторском простору $V = \mathbb{M}_{32}(\mathbb{R})$. (2)

Дефиниција 2.33 на страни 75.

На пример,

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Очигледно } 3v_1 - v_2 = 0.$$

4. Дефинисати појмове сопствених вредности и сопствених вектора квадратне матрице. Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе нула матрице реда 2.

Дефиниција 2.44 на страни 91. Сопствене вредности нула матрице реда 2 су $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, док су одговарајући сопствени вектори

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

5. Дефинисати појам векторског производа у еуклидском векторском простору $V = \mathbb{R}^3$. (2)

Дефиниција 3.10 на страни 122.

6. Написати по дефиницији $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$. (1)

Дефиниција 4.3 на страни 159.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \implies |a_n + 1| < \varepsilon).$$

7. За функцију $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисати појмове: 1) f је ограничена на I ; 2) f је монотono опадајућа на I ; 3) f има локални максимум у тачки $x_0 \in I$. (2)

Дефиниције 5.2 и 5.3 на страни 184 и дефиниција 6.4 на страни 223.

8. Дефинисати појмове непрекидности и диференцијабилности функције у тачки x_0 . Да ли функција f , непрекидна у $x_0 = 3$, мора бити и диференцијабилна у тој тачки? Образложити одговор. (2)

Дефиниција 5.17 на страни 197 и дефиниција 6.1 на страни 214.

Не. Можемо као контрапример узети функцију $f(x) = |x - 3|$.

9. Формулисати и доказати неједнакост Коши-Шварц-Буњаковског. (3)

Теорема 2.30 на страни 97.

10. Одредити услов под којим за матрице $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ важи $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. (2)

Задатак 30 на страни 107. Матрице морају бити комутативне, будући да:

$$\begin{aligned}(A + B)^2 &= A^2 + 2AB + B^2 \iff (A + B)(A + B) = A^2 + 2AB + B^2 \\ &\iff A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + AB + AB + B^2 \iff AB = BA.\end{aligned}$$

Завршни испит из Математике 1

Презиме и име:

Број индекса:

1. Дефинисати појам детерминанте. Одредити $\det(2A)$ ако је $A = [a_{ij}]$ матрица реда 4, дата са:
 $a_{ij} = 1, i \neq j$ и $a_{ij} = -1, i = j$. (2)

Дефиниција 2.3 на страни 46.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \det(A) = -16 \implies \det(2A) = -16 \cdot 2^4 = -256.$$

2. Када је матрица ортогонална? Илустровати примером. (2)

Дефиниција 2.54 на страни 102.

Најједноставнија ортогонална матрица је јединична матрица реда n .

3. Дефинисати појам потпростора векторског простора. Дати један пример нетривијалног потпростора векторског простора квадратних матрица реда n . (2)

Дефиниција 2.26 на страни 71.

На пример потпростор симетричних матрица n -тог реда.

4. Формулисати Кронекер-Капелијеву теорему. Дати пример система 2×3 који није сагласан према условима исказане теореме. (2)

Теорема 2.18 на страни 87. За систем линеарних једначина

$$x + y + z = 0$$

$$x + y + z = 1,$$

важи $r(A) = 1 \neq r(\bar{A}) = 2$, па није сагласан.

5. Написати по дефиницији: $\lim \sqrt[n]{n} = 1$. (1)

Дефиниција 4.3 на страни 159.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \implies |\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon.$$

6. Дати пример функције дефинисане на $\mathbb{R}$ која има откљонив прекид у тачки $x_1 = 0$, а у тачки $x_2 = \frac{\pi}{2}$ није диференцијабилна, али јесте непрекидна. Скицирати график одабране функције. (2)

Бирамо што једноставнију функцију чија је област дефинисаности $\mathbb{R}$, тако да задовољава тражене услове. Једна таква функција је, на пример

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ |\cos x|, & x > 0. \end{cases}$$

7. За функцију $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисати појмове: 1) f је непрекидна на I ; 2) f је монотono растућа на I ; 3) f има локални минимум у тачки $x_0 \in I$. (2)

Дефиниције 5.17, 5.3 и 6.4 на странама 197, 184 и 223.

8. Формулисати Лагранжову теорему. (1)

Теорема 6.8 на страни 226.

9. Различитим сопственим вредностима матрице одговарају линеарно независни сопствени вектори. Доказати. (3)

Теорема 2.28 на страни 95.

10. Тејлорова формула. Исказ и доказ. (3)

Теорема 6.14 на страни 236.

Завршни испит из Математике 1

Презиме и име:

Број индекса:

1. Дефинисати појам детерминанте. Одредити $\det(2024A)$ ако је $A = [a_{ij}]$ матрица реда 3, дата са: $a_{ij} = 4$, $i \neq j$ и $a_{ij} = 0$, $i = j$. (2)

Дефиниција 2.3 на страни 46.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \det(A) = 128 \implies \det(2024A) = 128 \cdot 2024^3.$$

2. Дате су квадратне матрице A и B . Дефинисати појмове: $A \sim B$ и $A \approx B$. Да ли су еквивалентне матрице истовремено и сличне? Образложити одговор. (2)

Дефиниције 2.24 на страни 66 и 2.38 на страни 83.

Еквивалентне квадратне матрице не морају бити и сличне. На пример матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

су очигледно еквивалентне, али нису сличне, јер је на пример $\varphi_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \neq \varphi_B(\lambda) = \lambda^2$.

3. Дефинисати појам линеарног оператора и дати један пример оператора $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Затим за одабрани оператор L одредити $L(u)$, где је $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. (2)

Дефиниција 2.31 на страни 74.

Свака матрица $A \in M_{32}(\mathbb{R})$ одређује једно линеарно пресликавање $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. На пример, матрицом $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, дато је линеарно пресликавање $L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ 2x + y \\ x \end{bmatrix}$, те је $L(u) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4. Дефинисати појмове сопствених вредности и сопствених вектора квадратне матрице. Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе јединичне матрице реда 4. (2)

Дефиниција 2.44 на страни 91. Сопствене вредности јединичне матрице реда 4 очигледно су $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$, док су одговарајући сопствени вектори

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

5. Дефинисати појам подниза и појам тачке нагомилавања низа реалних бројева. (1)

Дефиниције 4.12 и 4.13 на страни 176.

6. Дати пример функције дефинисане на $\mathbb{R}$ која има отклоњив прекид у тачки $x_1 = 0$, а у превојној тачки $x_2 = 1$ има локални минимум. Скицирати график одабране функције. (2)

Бирамо што једноставнију функцију чија је област дефинисаности $\mathbb{R}$, тако да задовољава тражене услове. Једна таква функција је, на пример

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 - 1|, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

7. За функцију $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисати појмове: 1) f је ограничена на I ; 2) f је монотono опадајућа на I ; 3) f има локални максимум у тачки $x_0 \in I$. (2)

Дефиниције 5.2 и 5.3 на страни 184 и дефиниција 6.4 на страни 223.

8. Формулисати Фермаову теорему. (1)

Теорема 6.6 на страни 224.

9. Формулисати и доказати Кејли-Хамилтонову теорему. (3)

Теорема 2.23 на страни 92.

10. Нека су f и g непрекидне функције на одсечку $[a, b]$ за које важи $f(a) < g(a)$ и $f(b) > g(b)$. Показати да онда постоји тачка $\zeta \in (a, b)$ за коју је $f(\zeta) = g(\zeta)$. (3)

Видети задатак 60 на страни 211.

Упутство: Применити теорему о нулама непрекидне функције на одсечку (Теорема 5.7 на страни 202) на функцију $h(x) = f(x) - g(x)$.

Завршни испит из Математике 1

Презиме и име:

Број индекса:

1. Дефинисати инверзну матрицу. Одредити инверзну матрицу матрице $A = [a_{ij}]$ реда 3, дате са: $a_{ij} = 4$, $i \geq j$ и $a_{ij} = 0$, $i < j$. (2)

Дефиниција 2.20 на страни 64.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

2. Дефинисати појам базе и димензије векторског простора. Дати пример реалног векторског простора димензије 2024 различитог од $\mathbb{R}^{2024}$. Да ли су ови простори изоморфни? (2)

Дефиниције 2.35 на страни 77 и 2.36 на страни 79.

Векторски простор реалних матрица димензије 4×506 , или неки други простор по избору. Простори су изоморфни будући да имају исту (коначну) димензију (Последица 2.3 на страни 81).

3. Дефинисати појам еуклидског векторског простора и дати један пример. (1)

Дефиниција 2.48 на страни 96.

На пример векторски простор $\mathbb{R}^3$ са стандардним скаларним производом

$$\langle u, v \rangle = u^T \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

4. Формулисати теорему Коши-Шварц-Буњаковског и потврдити њено важење избором два вектора $u, v \in \mathbb{R}^5$ (са стандардним скаларним производом у $\mathbb{R}^5$). (2)

Теорема 2.30 на страни 97. Одаберимо два вектора у $\mathbb{R}^5$, нпр.

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad \text{За овај избор имамо, } |\langle u, v \rangle| = |-2| = 2 < \|u\| \cdot \|v\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{9} = 9.$$

5. Дефинисати лимес низа, а затим написати по дефиницији $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = +\infty$. (2)

Дефиниције 4.3 на страни 159 и 4.5 на страни 160.

6. Дати пример парне функције дефинисане на $\mathbb{R}$ која има прекид прве врсте у тачки $x_1 = 1$, прекид друге врсте у тачки $x_2 = 2$ и нема извод у тачки локалног минимума $x_3 = 3$. Скицирати график одабране функције. (2)

Слични примери рађени су на предавањима. Бирамо што простију функцију, при чему пазимо на парност, која задовољава тражене услове. На пример,

$$f(x) = \begin{cases} 2, & |x| \leq 1, \\ \frac{1}{2-|x|}, & 1 < |x| < 2, \\ |3-|x||, & |x| \geq 2. \end{cases}$$

7. Дефинисати извод функције. Затим одредити по дефиницији извод функције $f(x) = 1/x$. (2)

Дефиниција 6.1 на страни 214. Према дефиницији

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}.$$

8. Формулисати Ролову теорему. (1)

Теорема 6.7 на страни 225.

9. Формулисати теорему о ортогоналним операторима (без доказа), а затим показати да сваки ортогоналан оператор $L: V \rightarrow V$ чува интензитет вектора, тј. $\|L(x)\| = \|x\|$, за све $x \in V$. (3)

Теорема 2.34 на страни 103.

Према исказу теореме, за све $x \in V$ важи

$$\langle x, x \rangle = \langle L(x), L(x) \rangle, \text{ одакле је } \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\langle L(x), L(x) \rangle} = \|L(x)\|.$$

10. Формулисати и доказати Кошијеву теорему о средњој вредности. (3)

Теорема 6.11 на страни 229.

Завршни испит из Математике 1

Презиме и име:

Број индекса:

1. Дефинисати појам детерминанте. Затим израчунати по дефиницији $D = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}$. (2)

Дефиниција 2.3. на страни 46. Према овој дефиницији биће:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{N(1,2)} \cos x \cdot \cos x + (-1)^{N(2,1)} (-\sin x) \cdot \sin x = \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

2. Формулисати Кронекер - Капелијеву теорему. Дати пример система линеарних једначина 3×2 (три једначине са две непознате) који није сагласан. (2)

Теорема 2.18. на страни 87. Један систем који задовољава тражене услове је на пример

$$\begin{aligned} x + y &= 0, \\ x + y &= 1, \\ x + y &= 2. \end{aligned} \quad \text{Овде је } r(A) = 1 \neq r(\bar{A}) = 2.$$

3. Дефинисати сопствене вредности и сопствене векторе матрице. Одредити затим сопствене векторе јединичне матрице реда 2. (2)

Дефиниција 2.44. на страни 91.

Сопственим вредностима $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ одговарају сопствени вектори: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4. Написати по дефиницији $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = +\infty$. (2)

Дефиниције 4.3 и 4.5 на странама 159 и 160;

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \implies |\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon).$$

$$(\forall E > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \implies |\ln n| > E).$$

5. Формулисати Болцано - Вајерштрасову теорему. Илустровати примером. (2)

Теорема 5.9. на страни 203. Као пример можемо узети било коју непрекидну функцију дефинисану на неком одсечку и образложити којим константама је ограничена, као и где достиже највећу, а где најмању вредност.

6. Дефинисати тачку локалног максимума функције. Да ли стационарна тачка функције мора бити тачка локалног екстремума? Образложити одговор. (2)

Дефиниција 6.4. на страни 223. Не. На пример $x_0 = 0$ је стационарна тачка функције $x \mapsto x^3$, али није тачка локалног екстремума.

7. Доказати да у еуклидском векторском простору сваки скуп међусобно ортогоналних вектора који не садржи нула вектор мора бити линеарно независан. (6)

Теорема 2.32. на страни 99.

8. Формулисати и доказати теорему о непрекидности инверзне функције. (7)

Теорема 5.11. на страни 204.

Завршни испит из Математике 1

Презиме и име:

Број индекса:

1. Дефинисати појам ограниченог скупа. Навести примере правих подскупова $A, B \subset \mathbb{Q}$, тако да подскуп A буде ограничен, а подскуп B неограничен. (2)

Дефиниција 1.7 на страни 8. На пример:

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}, \quad B = \mathbb{Z}.$$

2. Дефинисати појам детерминанте. Затим израчунати по дефиницији $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$. (2)

Дефиниција 2.3. на страни 46. Према овој дефиницији биће:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{N(1,2)} 2 \cdot 4 + (-1)^{N(2,1)} 1 \cdot 3 = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = 5.$$

3. Дефинисати језгро и слику линеарног оператора. Показати да је пресликавање $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ дефинисано са $L(v) = Av$, где је $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, линеарно, одредити слике стандардних базних вектора и његово језгро. Нацртати одговарајућу слику. (4)

Дефиниција 2.32. на страни 74. Како је: $A(u+v) = Au + Av$ и $A(\lambda u) = \lambda A(u)$, за све $u, v \in \mathbb{R}^2$ и за све $\lambda \in \mathbb{R}$, дато пресликавање је линеарно. Слике базних вектора $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ и $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ су колоне матрице A ; $Ae_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $Ae_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ и $Ae_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Даље, $A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff 2x + y + 3z = 0, y + z = 0$, па

$$\text{Ker}(L) = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}. \text{ Геометријски, то су сви вектори који леже на правој } \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}.$$

4. Дефинисати појам векторског производа и дати геометријску интерпретацију. (2)

Дефиниција 3.10. на страни 122 и коментар након дефиниције.

5. Формулисати Штолцову теорему. Применом ове теореме одредити $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n}$. (2)

Теорема 4.9. на страни 169. Како је низ $y_n = n$ очигледно строго растући и тежи ка $+\infty$, то је тражена гранична вредност једнака:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1) - \ln n}{n+1 - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{n+1}{n} = \ln 1 = 0.$$

6. Формулисати Болцано - Вајерштрасову теорему за функције. Проверити да ли функција $f(x) = \sqrt{3x+1} + \arcsin x$ достиже минимум на сегменту $[0,1]$ и образложити одговор. (3)

Теорема 5.9. на страни 203. Дата функција дефинисана је на сегменту $[-1/3,1] \supset [0,1]$ и задовољава услове Болцано - Вајерштрасове теореме на $[0,1]$, те достиже минимум на датом сегменту.

7. Формулисати теорему о односу непрекидности и диференцијабилности функције у тачки. Применити теорему на функцију $f(x) = \operatorname{sgn}|x+2|$ у тачки $x_0 = -2$. (3)

Теорема 6.2. на страни 218.
Како функција $f(x) = \operatorname{sgn} x$ има прекид (прве врсте) у тачки $x_0 = -2$, то према наведеној теореме она не може имати извод у тој тачки.

8. Дефинисати појам извода функције у тачки. Одредити затим по дефиницији извод функције $f(x) = x^2 - x$ у тачки $x_0 = -1$. (2)

Дефиниција 6.1. на страни 214.

$$f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 2h + h^2 + 1 - h - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h-3)}{h} = -3.$$

9. У векторском простору сваки вектор на јединствен начин се представља као линеарна комбинација базних вектора. Доказати. (5)

Теорема 2.11. на страни 78.

10. Кошијева дефиниција лимеса еквивалентна је Хајнеовој дефиницији. Доказати. (5)

Теорема 5.1. на страни 187.

Завршни испит из Математике 1

Презиме и име:

Број индекса:

1. Појам и егзистенција инверзне функције. Када важе следеће једнакости: $\arccos(\cos x) = x$, $\cos(\arccos x) = x$, $\arctg(\tg x) = x$ и $\tg(\arctg x) = x$? (2)

Видети теорему 1.1 на страни 9. и једнакости (1.24), (1.25), (1.28) и (1.29) на странама 28 и 29. Важи:

$$\begin{aligned}\arccos(\cos x) = x &\iff x \in [0, \pi], & \cos(\arccos x) = x &\iff x \in [-1, 1], \\ \arctg(\tg x) = x &\iff x \in (-\pi/2, \pi/2), & \tg(\arctg x) = x &\iff x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

2. Формулисати Крамерову теорему. Да ли постоји систем линеарних једначина 2×2 код кога $D = D_1 = D_2 = 0$ и који није сагласан? Образложити одговор. (2)

Теорема 2.5. на страни 55. Да. Систем који задовољава тражене услове је, на пример

$$\begin{aligned}x + y &= 0, \\ x + y &= 1.\end{aligned} \quad \text{Наведени систем очигледно нема решења и важи } D = D_1 = D_2 = 0.$$

3. Дефинисати језгро и слику линеарног оператора. Показати да је пресликавање $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ дефинисано са $L(v) = Av$, где је $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, линеарно, одредити слике стандардних базних вектора и његово језгро. Нацртати одговарајућу слику. (4)

Дефиниција 2.32. на страни 74. Како је: $A(u+v) = Au + Av$ и $A(\lambda u) = \lambda A(u)$, за све $u, v \in \mathbb{R}^3$ и за све $\lambda \in \mathbb{R}$, дато пресликавање је линеарно. Сlike базних вектора $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ и $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ су

колоне матрице A ; $Ae_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $Ae_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ и $Ae_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$. Даље, $A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff 2x + y + 3z = 0, y + z = 0$, па

$$\text{Ker}(L) = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}. \quad \text{Геометријски, то су сви вектори који леже на правој } \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}.$$

4. Написати једначину услова под којим две праве одређују раван. У ком су односу права $p: 2x - y + 4 = 0$, $x - y - z + 3 = 0$ и раван $\alpha: x + 2y - z = 3$? (2)

Нека су дате праве p и q са векторима праваца $\vec{p}$, $\vec{q}$ и тачкама $P \in p$ и $Q \in q$. Ове праве одређују раван ако су паралелне или се секу, односно ако су вектори $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{PQ}$ компланарни. Тражени услов је: $[\vec{p}, \vec{q}, \vec{PQ}] = 0$.

У датом примеру је $\vec{p} = \vec{n}_\alpha = (1, 2, -1)$ па је $p \perp \alpha$. Тачка продора је тачка $T(-1, 2, 0)$.

5. Дефинисати лимес низа, а затим наћи $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} p^n$ у зависности од параметра $p \in \mathbb{R}$. (2)

Дефиниција 4.3 на страни 159 и поглавље "Неки важнији лимеси" на страни 164. Тражене граничне вредности једнаке су:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p = \begin{cases} 0, & p < 0, \\ 1, & p = 0, \\ +\infty, & p > 0, \end{cases} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p^n = \begin{cases} 0, & |p| < 1, \\ 1, & p = 1, \\ +\infty, & p > 1, \end{cases} \quad \text{док } \lim_{n \rightarrow \infty} p^n \text{ не постоји за } p \leq -1.$$

6. Формулисати Кошијеву и Хајнеову дефиницију непрекидности функције. Да ли се функција $f(x) = \frac{1-\cos 2x}{x^2}$ може додефинисати до непрекидне функције на $\mathbb{R}$? (3)

Дефиниција 5.18 на страни 197. Дата функција може се додефинисати до непрекидне, јер је $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2} = 2$, те је

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos 2x}{x^2}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

непрекидна на скупу реалних бројева.

7. Формулисати теорему о односу непрекидности и диференцијабилности функције у тачки. Применити теорему на функцију $f(x) = \operatorname{sgn} x$ у тачки $x_0 = 0$. (3)

Теорема 6.2 на страни 218.

Како функција $f(x) = \operatorname{sgn} x$ има прекид (прве врсте) у нули, то према наведеној теореме она не може имати извод у тој тачки.

8. Формулисати Ролову теорему. Да ли се ова теорема може применити на функцију $f(x) = \sin x$? Уколико је одговор потврдан, навести одговарајући одсечак. (2)

Теорема 6.7 на страни 225.

Да, може се применити на сваком одсечку $[a, b]$ на коме је $\sin a = \sin b$, на пример на одсечку $[0, \pi]$.

9. Доказати да сличне матрице имају исти карактеристични полином. Да ли важи обротно? Образложити одговор навођењем одговарајућег тврђења или контрапримером. (6)

Теорема 2.24. на страни 93.

Обротно не важи. На пример матрице

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

имају исти карактеристични полином $\varphi_A(\lambda) = \varphi_B(\lambda) = \lambda^2$, али нису сличне.

10. Формулисати и доказати Кошијеву теорему о средњој вредности. (4)

Теорема 6.11. на страни 229.

Завршни испит из Математике 1

Презиме и име:

Број индекса:

1. Дефинисати појам функције, сурјекције и инјекције. Дати пример функције $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ која је сурјективна и није инјективна. (2)

Дефиниције 1.9 и 1.10 на страни 9. Као пример може се узети функција

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0 \\ x^2-1, & x > 0. \end{cases}$$

2. Формулисати Кронекер - Капелијеву теорему. Дати пример система линеарних једначина 2×3 (две једначине са три непознате) који није сагласан. (2)

Теорема 2.18. на страни 87. Један систем који задовољава тражене услове је на пример

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0, \\ x + y + z &= 1. \end{aligned} \quad \text{Овде је } r(A) = 1 \neq r(\bar{A}) = 2.$$

3. Дефинисати линеаран оператор. Затим показати да је пресликавање $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ дефинисано са $L(v) = Av$, где је $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$, линеарно и одредити његово језгро. Нацртати слику. (2)

Дефиниција 2.31. на страни 74. Према особинама матричног множења и сабирања важи: $A(u+v) = Au + Av$ и $A(\lambda u) = \lambda A(u)$, за све $u, v \in \mathbb{R}^2$ и за све $\lambda \in \mathbb{R}$, па је дато пресликавање линеарно. Вектор $v = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T$ припада језгру акко је $Av = 0$, односно $2x + y = 0$. Одавде је

$$\text{Ker}(L) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ -2x \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}. \text{ Геометријски, то су сви вектори који леже на правој } y = -2x.$$

4. Написати по дефиницији $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 7$. Затим дати пример низа чији је лимес једнак 7 и који није монотон. (2)

Дефиниција 4.3 на страни 159; $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \implies |a_n - 7| < \varepsilon).$

Као пример можемо узети низ $a_n = 7 + \frac{(-1)^n}{n}$.

5. Формулисати Фермаову теорему. Илустровати примером. (2)

Теорема 6.6. на страни 224. На пример функција $f(x) = 1 - x^2$ има локални максимум у тачки $c = 0$ и диференцијабилна је у тој тачки, па је $f'(0) = 0$.

6. Дефинисати тачку локалног минимума функције. Да ли тачка локалног екстремума мора бити стационарна тачка? Образложити одговор. (2)

Дефиниција 6.4. на страни 223. Тачка локалног екстремума не мора бити стационарна тачка. На пример, функција

$$f(x) = |x|$$

има локални минимум у нули, али $f'(0) \neq 0$ (у тачки $x = 0$ извод не постоји).

7. Доказати да у еуклидском векторском простору сваки скуп међусобно ортогоналних вектора који не садржи нула вектор мора бити линеарно независан. (6)

Теорема 2.32. на страни 99.

8. Формулисати и доказати Болцано - Вајерштрасову теорему за реалне функције. (7)

Теорема 5.9. на страни 203.

Завршни испит из Математике 1

Презиме и име:

Број индекса:

1. Формулисати теорему о Лапласовом развоју детерминанте по i -тој врсти. Затим развити Вандермондову детерминанту реда 3 по другој врсти. (2)

Теорема 2.1. на страни 48. Пример:

$$V_3 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 \\ x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} 1 & x_1^2 \\ 1 & x_3^2 \end{vmatrix} - x_2^2 \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix}.$$

2. Набројати елементарне трансформације матрице. (1)

Дефиниција 2.23. на страни 66.

3. Дефинисати појам линеарне зависности и линеарне независности произвољних вектора у векторском простору. Дати пример два линеарно зависна вектора у реалном простору $\mathbb{R}^3$. (2)

Дефиниција 2.33. на страни 75. На пример вектори:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ и } v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \text{ су линеарно зависни, јер је } 2v_1 - v_2 = 0.$$

4. Дефинисати тачку нагомилавања низа. Дати пример низа који има две тачке нагомилавања, једну коначну и једну бесконачну. (2)

Дефиниција 4.13. на страни 176. Као пример можемо узети низ

$$x_n = n \cdot (1 + (-1)^n).$$

5. Формулисати Лагранжову теорему о средњој вредности. (1)

Теорема 6.8. на страни 226.

6. Дефинисати тачку локалног максимума функције. (1)

Дефиниција 6.4. на страни 223.

7. Ранг матрице једнак је максималном броју њених линеарно независних врста (колона). Доказати и илустровати примером матрице реда 2×2 . (7)

Теорема 2.16. на страни 85. На пример, матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

је ранга 1, будући да је $A_{\downarrow 2} = 2A_{\downarrow 1}$.

8. Формуласати и доказати Фермаову теорему. Да ли се у исказу теореме може изоставити услов диференцијабилности функције? Образложити одговор. (7)

Теорема 6.6. на страни 224. Видети напомену 2 након доказа.

Завршни испит из Математике 1

Презиме и име:

Број индекса:

1. Формулисати Крамерову теорему. (1)

Теорема 2.5. на страни 55.

2. Дефинисати сопствене вредности и сопствене векторе матрице. Одредити затим сопствене векторе матрице $A^T A$, где је $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$. (2)

Дефиниција 2.44. на страни 91.

Сопственим вредностима $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 2$ одговарају редом сопствени вектори: $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3. Дефинисати мешовити производ три вектора у $\mathbb{R}^3$ и дати геометријску интерпретацију. (1)

Дефиниција 3.11. на страни 123 и Теорема 3.5. на страни 124.

4. Дати су следећи низови: $a_n = 3^n$, $b_n = n!$, $c_n = \ln^7 n$ и $d_n = n^{1000}$. Поређати низове по брзини којом теже ка $+\infty$. (1)

Видети неједнакост 4.3. на страни 166.

$$c_n \ll d_n \ll a_n \ll b_n$$

5. Дефинисати непрекидност функције у тачки и на скупу. Дати пример функције f дефинисане на $\mathbb{R}$ која има прекид друге врсте у тачки $x_0 = 1$. (2)

Дефиниција 5.18. на страни 197. Функција је непрекидна на скупу $S \subset \mathbb{R}$ ако је непрекидна у свакој тачки скупа S . На пример

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ \frac{1}{x-1}, & x > 1, \end{cases}$$

или пример 5.20. на страни 201.

6. Формулисати Ролову теорему. Да ли постоји одсечци облика $[a, b]$ на коме су испуњени услови ове теореме за функције $x \mapsto x^2$ и $x \mapsto x^3$? Образложити одговор. (2)

Теорема 6.7. на страни 225.

Прва функција $f_1(x) = x^2$ задовољава услове теореме на било ком одсечку облика $[-a, a]$, $a \neq 0$. Функција $f_2(x) = x^3$ је строго растућа, тј.

$$a < b \implies a^3 < b^3,$$

па такав одсечак за ову функцију не постоји.

7. Формулисати и доказати Кејли–Хамилтонову теорему.

(7)

Теорема 2.23. на страни 92.

8. Формуласати и доказати теорему о изводу и монотоности функције.

(7)

Теорема 6.9. на страни 227.

Завршни испит из Математике 1

Презиме и име:

Број индекса:

1. Навести (по избору) три особине детерминанти. (1)

Књига, стр. 46-47.

2. Дефинисати сопствене вредности и сопствене векторе матрице. Одредити затим сопствене векторе нула матрице реда 3. (2)

Дефиниција 2.44. на страни 91.

Сопствени вектори: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3. Дефинисати векторски производ два вектора у $\mathbb{R}^3$. (1)

Дефиниција 3.10. на страни 122.

4. Формулисати Штолцову теорему. (1)

Теорема 4.9. на страни 169.

5. Израчинати $L = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$ и формулисати теорему која се користи. (2)

$L = 0$. Тврђење 5.4. на страни 190 и пример након тврђења.

6. Написати табличне Маклоренове формуле степена 3 са остатком у Пеановом облику. (2)

Видети страну 239. Добија се:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3), \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4),$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \quad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + o(x^3), \quad x \rightarrow 0.$$

7. Формулисати и доказати Кронекер–Капелијеву теорему.

(7)

Теорема 2.18. на страни 87.

8. Формуласати и доказати Тејлорову формулу са остатком у Лагранжовом облику.

(7)

Теорема 6.14. на страни 236.

Завршни испит из Математике 1

Презиме и име:

Број индекса:

1. Дефинисати еквивалентност матрица.

(1)

Дефиниција 2.24. на страни 66.

2. Дефинисати појам векторског простора. Затим дати примере векторских простора коначне и бесконачне димензије.

(2)

Дефиниција 2.25. на страни 68.

На пример, векторски простор матрица типа 2×3 над пољем $\mathbb{R}$ је коначне димензије (6), док је векторски простор реалних полинома бесконачнодимензионалан.

3. Дефинисати ранг матрице.

(1)

Дефиниција 2.40. на страни 84.

4. Дефинисати појам конвергентног низа реалних бројева.

(1)

Дефиниција 4.3. на страни 159.

5. Формулисати Болцано - Вајерштрасову теорему о непрекидности функције на одсечку. Дали је функција $x \mapsto e^{\arctg x} + \sqrt[3]{\lg x}$ ограничена на сегменту $[-1, 1]$? Образложити одговор.

(2)

Теорема 5.9. на страни 203.

Да. Све елементарне функције непрекидне су на свом домену. Како је збир и композиција непрекидних функција непрекидна функција, то је дата функција непрекидна и задовољени су услови Болцано - Вајерштрасове теореме.

6. Написати табличне Маклоренове формуле степена 3 са остатком у Пеановом облику.

(2)

Видети страну 239. Добија се:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3), \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4),$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \quad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + o(x^3), \quad x \rightarrow 0.$$

7. Формулисати и доказати теорему Коши–Шварц–Буњаковског.

(7)

Теорема 2.30. на страни 97.

8. Формуласати и доказати Кошијеву теорему о средњој вредности диференцијалног рачуна. Објаснити због чега је Лагранжова теорема последица Кошијеве теореме.

(7)

Теорема 6.11. на страни 229.
Видети примедбу након доказа теореме на страни 229.

Завршни испит из Математике 1

Презиме и име:

Број индекса:

1. Како се дефинише производ две матрице? (1)

Дефиниција 2.18. на страни 60.

2. Дефинисати појам потпростора датог векторског простора V . Ако је $V = \mathbb{R}_3[x]$ и ако су дати вектори $v_1 = x - 1$, $v_2 = x^3$ и $v_3 = 2$, да ли је $\mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$ потпростор простора V ? Образложити одговор. (2)

Дефиниција 2.26. на страни 71.

Да. Линеарни омотач $\mathcal{L}(U)$ скупа вектора $U \subset V$ увек је потпростор простора V . Дефиниција 2.28. на страни 72 и коментар након дефиниције.

3. Формулисати теорему о базном минору. (1)

Теорема 2.15. на страни 84.

4. Формулисати Канторов принцип уметнутих одсецака. (1)

Теорема 4.15. на страни 175.

5. Формулисати Болцано - Кошијеву теорему о међувредности. Користећи се овом теоремом показати да једначина $\sqrt{2x-1} + 3 \arccos x = \pi/2$ има бар једно решење. (2)

Теорема 5.8. на страни 203 и задатак 5.12. након теореме.

6. Дефинисати појам извода функције f . Ако је $f(x) = xe^{-x}$, одредити по дефиницији $f'(x)$. (2)

Дефиниција 6.1. на страни 114. Према овој дефиницији добија се:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)e^{-(x+h)} - xe^{-x}}{h} = e^{-x} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{xe^{-h} + he^{-h} - x}{h} \\ &= e^{-x} \lim_{h \rightarrow 0} \left(x \frac{e^{-h} - 1}{h} + e^{-h} \right) = e^{-x}(-x + 1). \end{aligned}$$

7. Различитим сопственим вредностима квадратне матрице A одговарају линеарно независни сопствени вектори. Доказати. (7)

Теорема 2.28. на страни 95.

8. Формулација и доказ Лагранжове теореме о средњој вредности диференцијалног рачуна. Исказати бар једну последицу Лагранжове теореме. (7)

Теорема 6.8. на страни 226.
Неке од бројних последица су Теорема 6.9. и последица 6.2. на страни 227.

Завршни испит из Математике 1

Презиме и име:

Број индекса:

1. Ако је A квадратна матрица реда n , дефинисати појам инверзне матрице матрице A . (1)

Дефиниција 2.20 на страни 64.

2. Дефинисати појам линеарног оператора. Дати пример линеарног пресликавања $L: \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ и одредити његово језгро $\text{Ker}(L)$. Да ли је $\text{Ker}(L) \leq \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$? Образложити одговор. (2)

Дефиниција 2.31 на страни 74.

На пример $L(A) = \text{Tr}(A)$

$$\text{Ker}(L) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a + d = 0 \right\}.$$

Да. Језгро линеарног оператора $L: V \rightarrow W$ је потпростор простора V . Дефиниција 2.32 на страни 74 и коментар након дефиниције.

3. Формулисати Кејли - Хамилтонову теорему. (1)

Теорема 2.23 на страни 92.

4. Дефинисати појам Кошијевог низа. Да ли је низ $x_n = \sqrt[n]{n} \arctg n$ Кошијев? Образложити. (2)

Дефиниција 4.10 на страни 172.

Да. Важи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \arctg n = \pi/2.$$

Како је према Кошијевом критеријуму конвергенције реалан низ конвергентан ако и само ако је Кошијев (Теорема 4.13 на страни 173), то је дати низ Кошијев.

5. Дефинисати појам тачке прекида, као и врсте прекида. Дати пример функције дефинисане на $\mathbb{R}$ која у тачки $x_1 = 1$ има прекид прве врсте, а у тачки $x_2 = 2$ прекид друге врсте. Скицирати график одабране функције. (2)

Дефиниције 5.20 и 5.21 на страни 200.

На пример

$$f(x) = \begin{cases} \text{sgn}(x-1), & x \leq 2, \\ \frac{1}{x-2}, & x > 2. \end{cases}$$

6. Формулисати Фермаову теорему. (1)

Теорема 6.6 на страни 224.

7. Линеарни оператор $L: V \rightarrow V$ еуклидског векторског простора V је ортогоналан ако и само ако чува скаларни производ. Доказати. (7)

[Теорема 2.34 на страни 103.](#)

8. Формулисати и доказати Тејлорову формулу са остатком у Лагранжовом облику. Због чега је Лагранжова теорема о средњој вредности специјалан случај ове теореме? (7)

[Теорема 6.14 на страни 236](#) и [Напомена 6.5 након доказа теореме.](#)

Завршни испит из Математике 1 - решења

Презиме и име:

Број индекса:

1. Дефинисати појам детерминанте. Ако је A квадратна матрица реда 5, за коју је $\det(A) = 3$, одредити $\det(5A)$, $\det(2AA^T)$ и $\det(\operatorname{adj} A)$. (2)

Страна 46. Дефиниција 2.3.

- Како је A реда 5, то је $\det(5A) = 5^5 \det(A) = 3 \cdot 5^5$.
- Како је $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ и $\det(A) = \det(A^T)$, то је $\det(2AA^T) = 2^5 \cdot 3^2$.
- Како је $\operatorname{adj}(A) = \det(A)A^{-1}$ и $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$, то је $\det(\operatorname{adj} A) = \frac{(\det(A))^5}{\det(A)} = 3^4$.

2. Дефинисати појам базе и димензије векторског простора. Дати примере два реална векторског простора димензије 10. Да ли су они изоморфни? Образложити одговор. (2)

Стране 77 и 79. Дефиниције 2.35. и 2.36.

- Примери: векторски простор уређених десеторки $\mathbb{R}^{10}$, простор $M_{2 \times 5}(\mathbb{R})$ реалних матрица типа 2×5 , простор $\mathbb{R}_9[x]$ реалних полинома степена мањег од 10, итд.
- Да. Сви коначно димензиони простори исте димензије су изоморфни (Последица 2.3. на страни 81).

- 1.5. Формулисати Кронекер - Капелијеву теорему. (1)

Страна 87. Теорема 2.18.

4. Формулисати Болцано - Вајерштрасову теорему за низове. (1)

Страна 177. Теорема 4.19.

5. Написати Кошијеву и Хајнеову дефиницију граничне вредности функције. Записати затим $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$ користећи обе дефиниције. (2)

Стране 186 и 187. Дефиниције 5.8. и 5.12.

- $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \Delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(x < -\Delta \implies e^x < \varepsilon)$.
- $(\forall x_n)(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} e^{x_n} = 0^+)$.

6. Формулисати Лагранжову теорему о средњој вредности. Применити теорему на функцију $x \mapsto \ln x$ на сегменту $[1, e]$. Нацртати слику. (2)

Страна 226. Теорема 6.8.

- Функција $f(x) = \ln x$ непрекидна је на $[1, e]$ и диференцијабилна на $(1, e)$. Према Лагранжовој теорему постоји $c \in (1, e)$ за које је

$$\frac{\ln e - \ln 1}{e - 1} = f'(c) \implies \frac{1}{e - 1} = \frac{1}{c} \implies c = e - 1.$$

Тангента у тачки $(e - 1, \ln(e - 1))$ паралелна је са сечицом кроз тачке $(1, 0)$ и $(e, 1)$.

7. Доказати да су сопствене вредности симетричног линеарног оператора $L: V \rightarrow V$ еуклидског векторског простора V реални бројеви. Илустровати примером. (7)

[Страна 105. Теорема 2.36.](#)

8. Болцано - Вајерштрасова теорема о непрекидној функцији на одсечку. Исказ и доказ. (7)

[Страна 203. Теорема 5.9.](#)