

Математика 1 – Писмени испит

1. (20 поена) У зависности од реалног параметра a дискутовати и решити систем:

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\ 3x - y + 2z &= a \\ 2ax + 2y + 5z &= 6 \\ 5x + y + (a+1)z &= 5\end{aligned}$$

Решење:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & a \\ 2a & 2 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & a+1 & 5 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & a-3 \\ 0 & 0 & 3-a & \frac{(a-3)(-3-a)}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(a-3)(-6-a)}{3} \end{array} \right].$$

Разликујемо 3 случаја:

1. $a = 3$

$$[A|B] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$\rho(A) = \rho([A|B]) = 2$, па систем има бесконачно много решења са $3 - 2 = 1$ слободним параметром. Њему еквивалентан систем гласи

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\ -4y - z &= 0 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0\end{aligned}$$

За $y = t$, $t \in \mathbb{R}$, добијамо $z = -4t$ и $x = 1 + 3t$. Дакле, решења система су облика

$$(x, y, z) = (1 + 3t, t, -4t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

2. $a = -6$

$$[A|B] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$\rho(A) = \rho([A|B]) = 3$, па систем има јединствено решење. Њему еквивалентан систем гласи

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\ -4y - z &= -9 \\ 9z &= -9 \\ 0 &= 0\end{aligned}$$

Видимо из треће једначине да је $z = -1$, а затим добијамо $y = \frac{5}{2}$ и $x = -\frac{1}{2}$.
Дакле, решења система су облика

$$(x, y, z) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, -1\right).$$

3. $a \notin \{3, -6\}$

$\rho(A) = 3$, $\rho([A|B]) = 4$, па систем нема решења.

2. а) (10 поена) Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n^2 + 4n + 8}{6n^2 - 4n + 5} \right)^{2n-22}$;

б) (10 поена) Наћи граничну вредност функције користећи Маклоренову формулу:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} \cos x - 1}{x^2}.$$

Решење:

а)

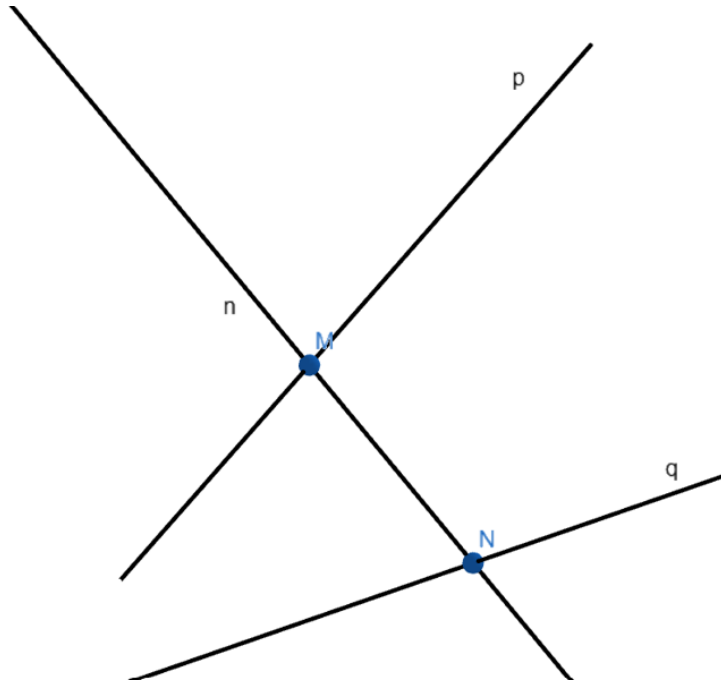
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n^2 + 4n + 8}{6n^2 - 4n + 5} \right)^{2n-22} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n^2 - 4n + 5 + 8n + 3}{6n^2 - 4n + 5} \right)^{2n-22} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{8n + 3}{6n^2 - 4n + 5} \right)^{2n-22} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{6n^2 - 4n + 5}{8n + 3}} \right)^{\frac{6n^2 - 4n + 5}{8n + 3}} \right]^{\frac{(8n + 3)(2n - 22)}{6n^2 - 4n + 5}} \\ &= e^{\frac{16}{6}} = e^{\frac{8}{3}}. \end{aligned}$$

б)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} \cos x - 1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x^2 + o(x^2))(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) - 1}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + x^2 + o(x^2) - 1}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3. (20 поена) Наћи заједничку нормалу мимоилазних правих $p: \frac{x-4}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-8}{5}$ и $q: \frac{x-1}{-2} = \frac{y-8}{3} = \frac{z-1}{1}$.

Решење: Из једначина правих p и q видимо да је $\vec{p} = (3, 2, 5)$ и $\vec{q} = (-2, 3, 1)$. Тачка $P = (4, 0, 8) \in p$, а $Q = (1, 8, 1) \in q$. Означимо са M и N пресечне тачке нормале n са правама p и q , редом.



Координате тачака M и N можемо добити из параметарског облика равнина:

$$M = (4 + 3t, 2t, 8 + 5t), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$N = (1 - 2s, 8 + 3s, 1 + s), \quad s \in \mathbb{R},$$

па је $\overrightarrow{MN} = (-3 - 2s - 3t, 8 + 3s - 2t, -7 + s - 5t)$. Пошто је $\overrightarrow{MN} \perp \vec{p}$, следи $\overrightarrow{MN} \circ \vec{p} = 0$, односно $-28 + 5s - 38t = 0$. Такође, из $\overrightarrow{MN} \perp \vec{q}$, следи $\overrightarrow{MN} \circ \vec{q} = 0$, односно $23 + 14s - 5t = 0$. Решавањем система од ове две једнакосте добијамо $t = -1$ и $s = -2$. Дакле, $M = (1, -2, 3)$, $N = (5, 2, -1)$ и $\overrightarrow{MN} = (4, 4, -4)$. За вектор правца нормале n можемо узети $\vec{n} = (1, 1, -1)$, па њена једначина у канонском облику гласи

$$n : \frac{x - 1}{1} = \frac{y + 2}{1} = \frac{z - 3}{-1}.$$

4. (20 поена) Испитати ток и нацртати график функције

$$f(x) = (2x + 1)e^{\frac{1}{2x+1}}.$$

Решење:

1. *Домен:* Функција је дефинисана ако је $x \neq -\frac{1}{2}$, па је

$$D_f = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

2. *Парност/непарност/периодичност:* Функција f није ни парна ни непарна. Функције f није периодична.

3. *Нуле и знак:* Функција f нема нула. $f(x) > 0$ за $x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$, а $f(x) < 0$ за $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$.

4. *Асимптоте:* Испитаћемо понашање функције на рубу домена да проверимо да ли постоје вертикалне асимптоте:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} (2x+1)e^{\frac{1}{2x+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} \frac{e^{\frac{1}{2x+1}}}{\frac{1}{2x+1}} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty; \\ \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} f(x) &= 0.\end{aligned}$$

Дакле, $x = -\frac{1}{2}$ је десна вертикална асимптота.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty,$$

па функција нема хоризонталних асимптота. Испитујемо сад постојање косих асимптота:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} &= 2; \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - 2x) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} ((2x+1)e^{\frac{1}{2x+1}} - 2x) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(2x \left(\frac{e^{\frac{1}{2x+1}} - 1}{\frac{1}{2x+1}} \right) \cdot \left(\frac{1}{2x+1} \right) + e^{\frac{1}{2x+1}} \right) \\ &= 1 + 1 = 2.\end{aligned}$$

Дакле, $y = 2x + 2$ је лева и десна коса асимптота.

5. *Монотоност и локални екстремуми:*

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2e^{\frac{1}{2x+1}} + (2x+1)e^{\frac{1}{2x+1}}((2x+1)^{-1})' \\ &= 2e^{\frac{1}{2x+1}} + (2x+1)e^{\frac{1}{2x+1}}(-1)(2x+1)^{-2} \cdot 2 \\ &= e^{\frac{1}{2x+1}} \left(2 - \frac{2}{2x+1} \right) \\ &= e^{\frac{1}{2x+1}} \left(\frac{4x}{2x+1} \right).\end{aligned}$$

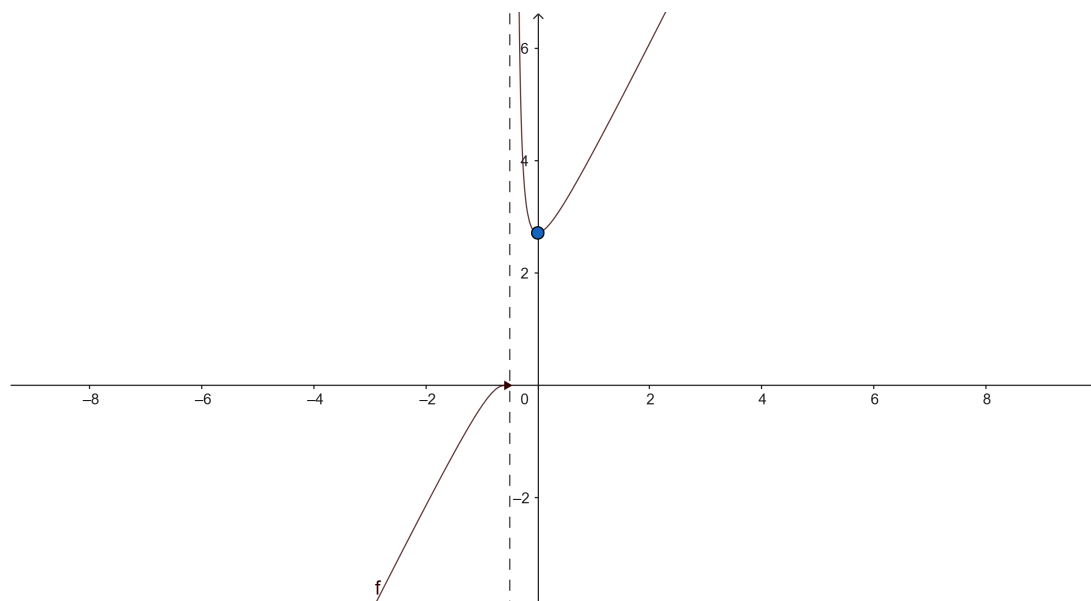
Видимо да је $f'(x) > 0$ ако је $\frac{x}{2x+1} > 0$, тј. ако $x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (0, +\infty)$. $f'(x) < 0$ ако $x \in (-\frac{1}{2}, 0)$. Дакле, функција расте на $(-\infty, -\frac{1}{2})$, затим опада на $(-\frac{1}{2}, 0)$, па поново расте на $(0, +\infty)$. Функција достиже локални минимум у $x = 0$ и он износи $f(0) = e$.

6. *Конвексност и превојне тачке:*

$$\begin{aligned}f''(x) &= e^{\frac{1}{2x+1}}(-1)(2x+1)^{-2} \cdot 2 \cdot \left(\frac{4x}{2x+1} \right) + e^{\frac{1}{2x+1}} \frac{4(2x+1) - 8x}{(2x+1)^2} \\ &= e^{\frac{1}{2x+1}} \frac{-8x}{(2x+1)^3} + e^{\frac{1}{2x+1}} \frac{4}{(2x+1)^2} \\ &= e^{\frac{1}{2x+1}} \left(\frac{4}{(2x+1)^3} \right).\end{aligned}$$

Функција је конвексна када је $f''(x) > 0$, тј. за $x \in (-\frac{1}{2}, +\infty)$, а конкавна када је $f''(x) < 0$, тј. за $x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$. Функција нема превојних тачака.

7. График:



Математика 1 – Писмени испит

1. (20 поена) У зависности од реалног параметра a дискутовати и решити систем:

$$\begin{aligned} -x + (a-2)y + az + (a+1)t &= -1, \\ ax + (a-2)y + az - t &= a, \\ ax + (a-2)y - z + at &= a. \end{aligned}$$

Решење:

$$\begin{aligned} [A|B] &= \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & a-2 & a & a+1 & -1 \\ a & a-2 & a & -1 & a \\ a & a-2 & -1 & a & a \end{array} \right] \sim \dots \sim \\ &\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & a-2 & a & a+1 & -1 \\ 0 & (a-2)(a+1) & a(a+1) & a^2+a-1 & 0 \\ 0 & 0 & -(a+1) & a+1 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Разликујемо 3 случаја:

1. $a = -1$

$$[A|B] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & -3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$\rho(A) = \rho([A|B]) = 2$, па систем има бесконачно много решења са $4 - 2 = 2$ слободна параметра. Њему еквивалентан систем гласи

$$\begin{aligned} -x - 3y - z &= -1 \\ -t &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Видимо да је $t = 0$, а за $x = r$ и $y = s$, $r, s \in \mathbb{R}$, добијамо $z = -r - 3s + 1$. Дакле, решења система су облика

$$(x, y, z, t) = (r, s, -r - 3s + 1, 0), \quad r, s \in \mathbb{R}.$$

2. $a = 2$

$$[A|B] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 0 \end{array} \right]$$

$\rho(A) = \rho([A|B]) = 3$, па систем има бесконачно много решења са $4 - 3 = 1$ слободним параметром. Њему еквивалентан систем гласи

$$\begin{aligned} -x + 2z + 3t &= -1 \\ -z + t &= 0 \\ 11t &= 0 \end{aligned}$$

Видимо да је $t = z = 0$ и $x = 1$. y може бити произвољно, тј. $y = r$, $r \in \mathbb{R}$. Дакле, решења система су облика

$$(x, y, z, t) = (1, r, 0, 0), \quad r \in \mathbb{R}.$$

3. $a \notin \{-1, 2\}$

$\rho(A) = \rho([A|B]) = 3$, па систем има бесконачно много решења са $4 - 3 = 1$ слободним параметром. Њему еквивалентан систем гласи

$$\begin{aligned} -x + (a-2)y + az + (a+1)t &= -1 \\ (a-2)(a+1)y + a(a+1)z + (a^2 + a - 1)t &= 0 \\ - (a+1)z + (a+1)t &= 0 \end{aligned}$$

За $z = t = r$, $r \in \mathbb{R}$, добијамо

$$\begin{aligned} y &= \frac{-r(2a^2 + 2a - 1)}{(a-2)(a+1)}, \\ x &= \frac{r(a+2) + a+1}{a+1}. \end{aligned}$$

Дакле, решења система су облика

$$(x, y, z, t) = \left(\frac{r(a+2) + a+1}{a+1}, \frac{-r(2a^2 + 2a - 1)}{(a-2)(a+1)}, r, r \right), \quad r \in \mathbb{R}.$$

2. (20 поена) Дата је матрица $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$. Одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A , а затим одредити A^n , $n \in \mathbb{N}$.

Решење:

$$\varphi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \dots = -(\lambda + 3)^2(\lambda - 6).$$

Дакле, матрица A има једну једноструку сопствену вредност $\lambda_1 = 6$ и две двоструке сопствене вредности $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$. Сопствени вектор $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ који одговара сопственој вредности $\lambda_1 = 6$ добијамо решавањем система $(A - 6E)v = \mathbf{0}$. Решење је

$$v_1 = t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Решавањем система $(A + 3E)v = \mathbf{0}$ добијамо сопствене векторе који одговарају сопственој вредности $\lambda_{2,3} = -3$. Решење је

$$v = \begin{bmatrix} -2r - 2s \\ r \\ s \end{bmatrix} = r \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_2} + s \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_3}, \quad r, s \in \mathbb{R}, \quad r^2 + s^2 \neq 0.$$

Видимо да је матрица A дијагонализабилна, па A^n можемо израчунати као $A^n = SD^nS^{-1}$, где су

$$D = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -2 & -4 & 5 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

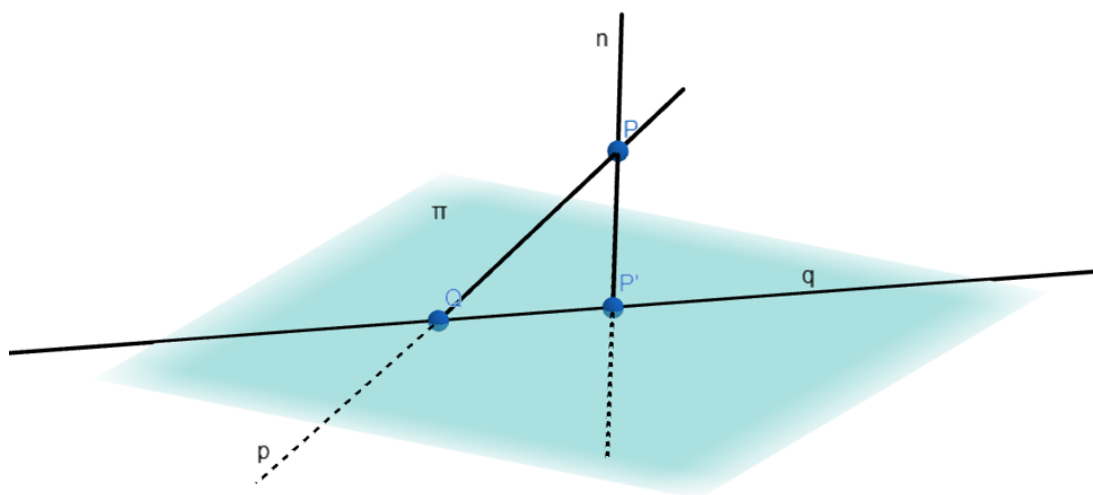
па је

$$A^n = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^n & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -4 & 5 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 8(-3)^n + 6^n & -2(-3)^n + 2 \cdot 6^n & -2(-3)^n + 2 \cdot 6^n \\ -2(-3)^n + 2 \cdot 6^n & 5(-3)^n + 4 \cdot 6^n & -4(-3)^n + 4 \cdot 6^n \\ -2(-3)^n + 2 \cdot 6^n & -4(-3)^n + 4 \cdot 6^n & 5(-3)^n + 4 \cdot 6^n \end{bmatrix}.$$

3. (20 поена) Наћи једначину нормалне пројекције праве $p : \frac{x+3}{4} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-4}{-1}$ на раван $\pi : 2x - 3y + z - 5 = 0$.

Решење:

Из једначине праве видимо да је њен вектор правца $\vec{p} = (4, 3, -1)$ и да јој припада тачка $P = (-3, 5, 4)$. Вектор нормале равни је $\vec{n}_\pi = (2, -3, 1)$. Како је $\vec{p} \circ \vec{n}_\pi = -2 \neq 0$, права и раван се секу. Пројекција праве p на раван α је права q која садржи Q - продор праве p кроз раван α и P' - пројекцију тачке P на раван (лако се проверава да $P \notin \pi$).



Пошто $Q \in p$, из векторског облика праве p добијамо да је $Q = (-3 + 4t, 5 + 3t, 4 - t)$. t добијамо из услова $Q \in \pi$:

$$2(-3 + 4t) - 3(5 + 3t) + 4 - t - 5 = 0 \iff t = -11.$$

Дакле, $Q = (-47, -28, 15)$. P' је продор праве n која садржи тачку P и нормална је на раван π . Из другог услова следи $\vec{n} = \vec{n}_\pi = (2, -3, 1)$, па права n има једначну

$$n : \underbrace{(-3, 5, 4)}_P + s \underbrace{(2, -3, 1)}_{\vec{n}} = (-3 + 2s, 5 - 3s, 4 + s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

$P' \in n$, па је $P' = (-3 + 2s, 5 - 3s, 4 + s)$. s добијамо из услова $P' \in \pi$:

$$2(-3 + 2s) - 3(5 - 3s) + 4 + s - 5 = 0 \iff s = \frac{11}{7}.$$

Дакле, $P' = (\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{39}{7})$. $\vec{q}$ је колинеаран са $\overrightarrow{P'Q} = (\frac{-330}{7}, \frac{-198}{7}, \frac{66}{7}) = \frac{-66}{7}(5, 3, -1)$, па можемо узети $\vec{q} = (5, 3, -1)$. Тражена права q има једначину у канонском облику:

$$q: \frac{x - \frac{1}{7}}{5} = \frac{y - \frac{2}{7}}{3} = \frac{z - \frac{39}{7}}{-1}.$$

4. (20 поена) Испитати ток и нацртати график функције

$$f(x) = \ln \left(\frac{x^2}{x+1} \right).$$

Решење:

1. *Домен:* Функција је дефинисана ако је $\frac{x^2}{x+1} > 0$, па је

$$D_f = (-1, 0) \cup (0, +\infty).$$

2. *Парност/непарност/периодичност:* Функција f није ни парна ни непарна. Функције f није периодична.

3. *Нуле и знак:* $f(x) = 0 \iff \frac{x^2}{x+1} = 1 \iff x^2 = x + 1 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
 $f(x) > 0$ акко је $\frac{x^2}{x+1} > 1$, тј. $\frac{x^2 - x - 1}{x+1} > 0$. Решавањем ове неједначине добијамо да је

$$f(x) > 0 \text{ за } x \in \left(-1, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, +\infty\right),$$

а слично добијамо и да је

$$f(x) < 0 \text{ за } x \in \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right).$$

4. *Асимптоте:* Испитаћемо понашање функције на рубу домена да проверимо да ли постоје вертикалне асимптоте:

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$, па је $x = -1$ десна вертикална асимптота;

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$, па је $x = 0$ лева вертикална асимптота;

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, па је $x = 0$ десна вертикална асимптота.

Сада испитујемо постојање хоризонталних и вертикалних асимптота.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, па функција нема хоризонталну асимптоту.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(\frac{x^2}{x+1} \right)}{x}$ (ово је неодређени израз $\frac{\infty}{\infty}$, па ћемо применити Лопиталово правило).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left[\ln \left(\frac{x^2}{x+1} \right) \right]'}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x+1}{x^2} \cdot \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x(x+1)} = 0,$$

па је и

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0, \text{ што значи да функција нема ни косу асимптоту.}$$

5. *Монотоност и локални екстремуми:*

$$f'(x) = \left[\ln \left(\frac{x^2}{x+1} \right) \right]' = \frac{x+1}{x^2} \cdot \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x+2}{x(x+1)}.$$

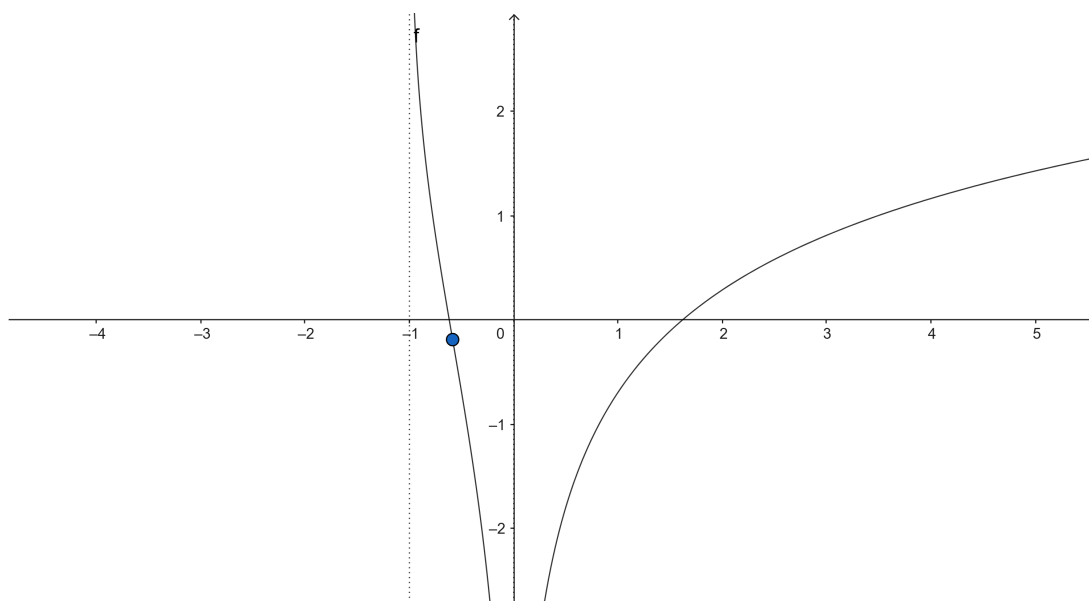
Провером ћемо установити да је $f'(x) > 0$ за $x \in (0, +\infty)$ и $f'(x) < 0$ за $x \in (-1, 0)$, па функција опада на $(-1, 0)$, а затим расте на $(0, +\infty)$. Функција нема локалних екстремума.

6. *Конвексност и превојне тачке:*

$$f''(x) = \left(\frac{x+2}{x(x+1)} \right)' = \frac{x(x+1) - (x+2)(2x+1)}{x^2(x+1)^2} = -\frac{x^2 + 4x + 2}{x^2(x+1)^2}.$$

Видимо да је $f''(x) > 0$ за оне x из домена за које је $x^2 + 4x + 2 < 0$, тј. $f''(x) > 0$ за $x \in (-1, -2 + \sqrt{2})$, а слично добијамо да је $f''(x) < 0$ за $x \in (-2 + \sqrt{2}, 0) \cup (0, +\infty)$. Дакле, функција је конвексна на $(-1, -2 + \sqrt{2})$, а конкавна на $(-2 + \sqrt{2}, 0)$ и $(0, +\infty)$ и има превојну тачку у $-2 + \sqrt{2}$. Вредност функције у овој тачки је $f(-2 + \sqrt{2}) = \ln(2(\sqrt{2} - 1))$.

7. *График:*



Математика 1 – Писмени испит

1. (20 поена) У зависности од реалног параметра p дискутовати и решити систем:

$$\begin{aligned} 2x + y + 3z + 4u &= 3 \\ 10x + 3y + (2p+1)z + 12u &= 13 \\ 5x + 2y + 6z + 8u &= 2p-1 \end{aligned}$$

Решење:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ 10 & 3 & 2p+1 & 12 & 13 \\ 5 & 2 & 6 & 8 & 2p-1 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 17-4p \\ 0 & 0 & 2p-8 & 0 & 32-8p \end{array} \right]$$

Разликујемо 2 случаја:

1. $p = 4$

$$[A|B] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$\rho(A) = \rho([A|B]) = 2$, па систем има бесконачно много решења са $4 - 2 = 2$ слободна параметра. Њему еквивалентан систем гласи

$$\begin{aligned} 2x + y + 3z + 4u &= 3 \\ y + 3z + 4u &= 1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

За $z = r$ и $u = t$, $r, t \in \mathbb{R}$, добијамо $y = 1 - 3r - 4t$ и $x = 1$. Дакле, решења система су облика

$$(x, y, z, t) = (1, 1 - 3r - 4t, r, t), \quad r, t \in \mathbb{R}.$$

2. $p \neq 4$

$\rho(A) = \rho([A|B]) = 3$, па систем има бесконачно много решења са $4 - 3 = 1$ слободним параметром. Њему еквивалентан систем гласи

$$\begin{aligned} 2x + y + 3z + 4u &= 3 \\ y + 3z + 4u &= 17 - 4p \\ (2p - 8)z &= 32 - 8p \end{aligned}$$

Из треће једначине добијамо $z = -4$. За $u = t$, $t \in \mathbb{R}$, добијамо $x = 2p - 7$ и $y = 29 - 4p - 4t$. Решења система су облика

$$(x, y, z, t) = (2p - 7, 29 - 4p - 4t, -4, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

2. (20 поена) Дата је матрица $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. Одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A , а затим одредити A^n , $n \in \mathbb{N}$.

Решење:

$$\varphi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \dots = -1 - \lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda = -(\lambda + 1)^3.$$

Дакле, матрица A има троструку сопствену вредност $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Сопствени вектор $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ који одговара овој сопственој вредности добијамо решавањем система $(A + E)v = \mathbf{0}$. Решење је

$$v = t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Пошто матрица није дијагонализабилна, A^n ћемо израчунати позивајући се на Кејли-Хамилтонову теорему, која каже да је $\varphi_A(A) = \mathbf{0}$. Дељењем полинома x^n полиномом $\varphi_A(x)$ добијамо

$$x^n = \varphi_A(x)q(x) + r(x),$$

где је $\deg r(x) < \deg \varphi_A(x)$. Пошто је $\deg \varphi_A(x) = 3$, $r(x)$ је степена највише 2, па је

$$x^n = \varphi_A(x)q(x) + ax^2 + bx + c. \quad (1)$$

Пошто је -1 трострука нула полинома $\varphi_A(x)$, следи да је $\varphi_A(x) = \varphi'_A(x) = \varphi''_A(x) = 0$, па диференцирањем једнакости (1) два пута добијамо

$$nx^{n-1} = \varphi'_A(x)q(x) + \varphi_A(x)q'(x) + 2ax + b \quad (2)$$

$$n(n-1)x^{n-2} = \varphi''_A(x)q(x) + 2\varphi'_A(x)q'(x) + \varphi_A(x)q''(x) + 2a \quad (3)$$

Заменом -1 у једнакостима (1) – (3) добијамо систем линеарних једначина по a, b и c

$$\begin{aligned} (-1)^n &= a - b + c \\ -n(-1)^n &= -2a + b \\ n(n-1)(-1)^n &= 2a. \end{aligned}$$

Решења овог система су

$$a = \frac{n(n-1)(-1)^n}{2}, \quad b = n(n-2)(-1)^n, \quad c = \frac{(n-2)(n-1)(-1)^n}{2}.$$

Сада из (1) следи

$$A^n = \underbrace{\varphi_A(A)}_{\mathbf{0}} q(A) + aA^2 + bA + cE = aA^2 + bA + cE.$$

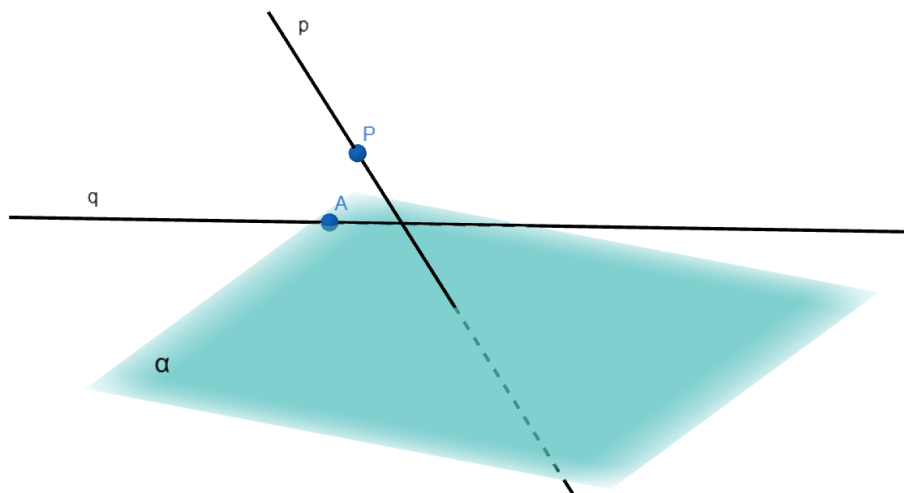
3. (20 поена) Дате су права $p : x = t + 2, y = -2t + 1, z = -t + 3$, где је $t \in \mathbb{R}$, раван $\alpha : 2x - y - 2z - 3 = 0$ и тачка $A(2, 2, 0)$. Одредити једначину праве која садржи тачку A , паралелна је са α и сече праву p .

Решење: Из задатка читамо да је $\vec{p} = (1, -2, -1)$, $P = (2, 1, 3) \in p$ и $\vec{n}_\alpha = (2, -1, -2)$. Пошто је тражена права q паралелна са равни α , следи да је $\vec{q} \perp \vec{n}_\alpha$, па је $\vec{q} \cdot \vec{n}_\alpha = 0$. Ако је $\vec{q} = (a, b, c)$, следи $(a, b, c) \cdot (2, -1, -2) = 0$, односно $2a - b - 2c = 0$. Пошто се p и q секу, важи $[\vec{PA}, \vec{p}, \vec{q}] = 0$, односно

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0,$$

из чега даље следи $5c = 13a$. За $a = 5$ (на пример) добијамо $c = 13$ и $b = -16$. Дакле, $\vec{q} = (5, -16, 13)$, па пошто $A \in q$, права q има једначину

$$q : \frac{x-2}{5} = \frac{y-2}{-16} = \frac{z}{13}.$$



4. (20 поена) Испитати ток и нацртати график функције

$$f(x) = \frac{x^2}{2x-1} e^{-\frac{1}{x}}.$$

Решење:

1. *Домен:* Функција је дефинисана за све реалне бројеве осим за $x = 0$ и $x = \frac{1}{2}$, па је

$$D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty).$$

2. *Парност/непарност/периодичност:* Функција f није ни парна ни непарна. Функције f није периодична.

3. *Нуле и знак*: Експоненцијална функција је увек позитивна, па функција нема нула. Знак функције зависи од знака израза $\frac{x^2}{2x-1}$:

$$f(x) > 0 \text{ за } x \in (\frac{1}{2}, +\infty), \quad f(x) < 0 \text{ за } x \in (-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2}).$$

4. *Асимптоте*: Испитујемо понашање функције у тачкама у којима није дефинисана, као и на крајевима домена. Прво,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{2x-1} e^{-\frac{1}{x}} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{2x-1} e^{-\frac{1}{x}} = \left\{ t = -\frac{1}{x} \rightarrow +\infty \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{t^2}}{-2\frac{1}{t}-1} e^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{-2t-t^2} = -\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{2t+t^2} = -\infty, \end{aligned}$$

где последња једнакост важи јер експоненцијална функција расте брже од полинома када $t \rightarrow +\infty$. Дакле, права $x = 0$ је вертикална асимптота функције f са леве стране, док са десне стране график функције улази у тачку $(0, 0)$. Даље, имамо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{x^2}{2x-1} e^{-1/x} = \frac{(1/2)^2}{0^-} e^{-2} = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{x^2}{2x-1} e^{-1/x} = \frac{(1/2)^2}{0^+} e^{-2} = +\infty. \end{aligned}$$

па је права $x = \frac{1}{2}$ вертикална асимптота функције f .

Испитујемо понашање функције на крајевима домена. Кад $x \rightarrow \pm\infty$ можемо искористити Маклоренове развоје:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2}{2x-1} e^{-1/x} = \frac{x^2}{2x(1-\frac{1}{2x})} e^{-1/x} \\ &= \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{(1-\frac{1}{2x})} e^{-1/x} = \frac{x}{2} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{-1} e^{-1/x} \\ &= \frac{x}{2} \left(1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{2x}\right)\right) \left(1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= \frac{x}{2} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow \pm\infty. \end{aligned}$$

Дакле, права $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$ је коса асимптота функције f када $x \rightarrow \pm\infty$.

5. $f'(x)$, *монотоност*: Имамо:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^2}{2x-1} e^{-\frac{1}{x}} \right)' = \frac{2x(2x-1) - 2x^2}{(2x-1)^2} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{x^2}{2x-1} e^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{2x^2-1}{(2x-1)^2} e^{-\frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

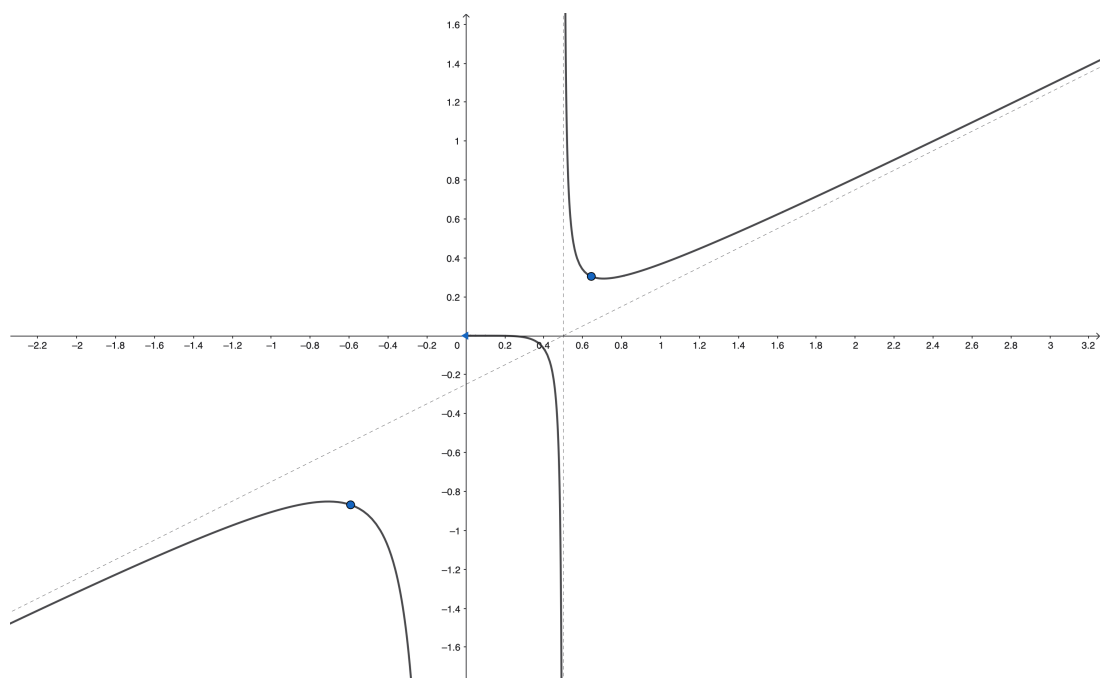
Важи $f'(x) = 0$ акко је $2x^2 - 1 = 0$. Дакле, тачке $x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ су стационарне тачке. Знак првог извода зависи само од знака израза $2x^2 - 1$, па је $f'(x) > 0$ акко је $x \in (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$, односно $f'(x) < 0$ акко је $x \in (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \cup (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Закључујемо да функција f расте за $x \in (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ и за $(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$, а опада за $x \in (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ и за $x \in (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$. У тачки $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ функција f има локални максимум, а у тачки $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ локални минимум.

6. $f''(x)$, конвексност/конкавност: Имамо:

$$f''(x) = \left(\frac{2x^2 - 1}{(2x - 1)^2} e^{-\frac{1}{x}} \right)' = \dots = \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2(2x - 1)^3} e^{-\frac{1}{x}}.$$

Како је $2x^2 - 2x + 1 > 0$ за свако $x \in D_f$, знак другог извода зависи само од знака израза $2x - 1$. Важи $f''(x) > 0$ акко је $x > \frac{1}{2}$, односно $f''(x) < 0$ акко $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2})$. Дакле, функција f је конкавна за $x \in (-\infty, 0)$ и за $x \in (0, \frac{1}{2})$, а конвексна је за $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$. Превојних тачака нема.

7. График:



МАТЕМАТИКА 1

1. Решити дати систем у зависности од реалног параметра p и дати геометријску интерпретацију:

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\ px + 2y + 2z &= p \\ x + 2py + 2z &= 2p \\ x + y + 3pz &= 3p\end{aligned} \quad (20)$$

2. Одредити једначину равни која је нормална на пресек равни $\alpha : x + 2y = 3$ и $\beta : -2x + z = 1$ и удаљена је од координатног почетка за $\sqrt{21}$. (20)

3. Израчунати граничне вредности низова:

$$a) a_n = \frac{(n+1) \ln n! - 2 \ln(2! 3! \cdots n!)}{n^2 + n} \quad b) b_n = \left(\frac{n^4 - 1}{n^4} \right)^{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3} \quad (20)$$

4. Испитати ток и нацртати график функције $f(x) = \arccos \frac{x}{\sqrt{2x^2 + 4x + 4}}$. (20)

5. Скуп полинома $W = \{\alpha + \beta x + \gamma x^2 \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \alpha\beta\gamma = 0\}$ је потпростор простора $\mathbb{R}_2[x]$. Доказати или оповргнути. (10)

Решења:

- Збирка Линеарна алгебра, задатак 265 на страни 226.
- Збирка Линеарна алгебра, задатак 243 на страни 211.
- Збирка Математичка анализа 1, задаци 1.33 на страни 29 и 1.42 на страни 35.
- Збирка Математичка анализа 1, задатак 3.223 на страни 261. Будући да за свако $t \in [-1, 1]$ важи $\arccos t = \pi/2 - \arcsin t$, задатак се своди на наведени пример.
- Књига Математика 1, задатак 35 на страни 109.

МАТЕМАТИКА 1

1. Одредити карактеристичне вредности и карактеристичне векторе матрице

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Затим наћи A^n , $n \in \mathbb{N}$, као и сопствене вредности и сопствене векторе матрице $A^4 - 2A^3 + A^T - 3\text{adj}(A)$.

2. Права $p : x = t + 1, y = 2t - 1, z = -2t, t \in \mathbb{R}$ продире равни $\pi_1 : x + y + z = 1$ и $\pi_2 : x - y + z = -4$ у тачкама P_1 и P_2 . Написати једначину равни π која садржи пресечну праву равни π_1 и π_2 и средиште дужи P_1P_2 . (20)

3. Израчунати граничну вредност

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4 x + \cos^4 x - e^{-2x^2}}{x^4}. \quad (20)$$

4. Испитати ток и нацртати график функције $f(x) = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^3}$. (20)

5. Доказати да $V = \mathbb{R}^+$ образује векторски простор над пољем $\mathbb{R}$ у односу на операције $u + v := uv, \lambda \cdot u := u^\lambda$. (10)

Решења:

1. Збирка Линеарна алгебра, задатак 162 на страни 145.
2. Збирка Линеарна алгебра, задатак 262 на страни 224.
3. Збирка Математичка анализа 1, задатак 3.188 на страни 207.
4. Збирка Математичка анализа 1, задатак 3.203 на страни 219.
5. Књига Математика 1, задатак 35 на страни 109.

МАТЕМАТИКА 1

1. У зависности од реалних параметара a и b дискутовати и решити систем:

$$\begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + y + az &= b \\ x + ay + z &= b + 1 \end{aligned} \quad (20)$$

2. Дате су тачке $O(0, 0, 0)$, $A(1, 2, 3)$, $B(3, 2, 1)$ и $C(3, 4, 3)$. Израчунати дужину висине AH у троуглу ABC , координате тачке H , запремину тетраедра $OABC$, а затим и дужину висине тетраедра из темена A . (20)

3. Израчунати граничну вредност

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \cos x)^{1 - \cos x} - 1}{\ln^2(1 + x)}. \quad (20)$$

4. Испитати ток и нацртати график функције $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - x$. (20)

5. Ако је $A \in GL_n(\mathbb{R})$ и ако је $n \geq 2$, онда је $\det(\operatorname{adj} A) = (\det A)^{n-1}$. Доказати. (10)

Решења:

- Збирка Линеарна алгебра, задатак 132 на страни 104.
- Збирка Линеарна алгебра, задатак 225 на страни 200.
- Збирка Математичка анализа 1, задатак 3.191 на страни 208.
- Збирка Математичка анализа 1, задатак 3.206 на страни 227.
- Књига Математика 1, задатак 41 на страни 108.

МАТЕМАТИКА 1

1. У зависности од реалних параметара a и b дискутовати и решити систем:

$$\begin{aligned} 4x + y + az &= 5 \\ 2x - y - 2z &= 3 \\ x + y - z &= 1 \\ x + 4y + z &= b \end{aligned} \quad (20)$$

2. Дата је раван $\alpha : y = -x$ и праве $l_1 : y = z+2, x = 1$ и $l_2 : x = 3t, y = t-1, z = 2t+3, t \in \mathbb{R}$. Одредити једначине свих правих које су паралелне датој равни и секу дате праве у тачкама чије је растојање једнако 3. (20)

3. Израчунати граничне вредности низова:

$$a) a_n = \frac{1}{\ln 2 \ln 4} + \frac{1}{\ln 4 \ln 8} + \cdots + \frac{1}{\ln 2^{n-1} \ln 2^n} \quad b) b_n = \left(\frac{2\sqrt{n} - 1}{2\sqrt{n}} \right)^{n(\sqrt{4n-1} - 2\sqrt{n})} \quad (20)$$

4. Испитати ток и нацртати график функције $f(x) = (5x - 1)e^{1/x}$. (20)

5. Ако је матрица $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ ортогонално слична некој дијагоналној матрици $D \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, онда је A симетрична матрица. Доказати. (10)

Решења:

1. Систем је сагласан акко је $b = 0 \vee a = -4$ и тада има јединствено решење $(\frac{3b+8}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{b}{2})$.
2. Збирка Линеарна алгебра, задатак 252 на страни 217.
3. Збирка Математичка анализа 1, задаци 1.22 и 1.30 на странама 19 и 25.
4. Функција је дефинисана за $x \neq 0$. Права $x = 0$ је десна вертикална асимптота; $f(0^+) = +\infty, f(0^-) = 0^-$, а права $y = 5x+4$ је коса асимптота. Тачка $N(\frac{1}{5}, 0)$ је једина нула функције, при чему је $f(x) < 0$ на интервалима $(-\infty, 0)$ и $(0, 1/5)$ и $f(x) > 0$ за $x > 1/5$. Како је $f'(x) = \frac{5x^2-5x+1}{x^2}e^{1/x}$ и $f''(x) = \frac{3x-1}{x^4}e^{1/x}$, дата функција има локални максимум у тачки $x_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}$ и локални минимум у тачки $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}$, опада на интервалу (x_1, x_2) а расте на интервалима $(-\infty, 0), (0, x_1)$ и $(x_2, +\infty)$. f је конкавна за $x \in (-\infty, 0)$ и $x \in (0, \frac{1}{3})$ и конвексна за $x \in (\frac{1}{3}, +\infty)$. Превојна тачка функције је тачка $P(\frac{1}{3}, \frac{2e^3}{3})$.
5. Књига Математика 1, задатак 127 на страни 113.

МАТЕМАТИКА 1

1. Дата је матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице $A^T A$. Затим наћи $(A^T A)^n$, $n \in \mathbb{N}$. (20)

2. Одредити ортогоналну пројекцију праве

$$p: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{0} \quad \text{на раван} \quad \pi: 2x + y - 3z = 5. \quad (20)$$

3. Испитати ток и нацртати график функције

$$f(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{2x^2 + 4x + 4}} \quad (20)$$

4. Израчунати граничну вредност

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos x} \sqrt[4]{\cos x}}{x^2}. \quad (15)$$

5. Показати да је скуп реалних симетричних матрица векторски простор над пољем реалних бројева. (5)

Решења:

- Збирка Линеарна алгебра, задатак 95 на страни 90 (за $n = 4$). Како је $(A^T A)^2 = 4A^T A$, важиће $(A^T A)^n = 4^{n-1} A^T A$.
- Збирка Линеарна алгебра, задатак 169 на страни 148.
- Збирка Математичка анализа 1, задатак 3.223 на страни 261.
- Збирка Математичка анализа 1, задатак 3.183 на страни 204.
- Књига Математика 1, задатак 48 на страни 108.

МАТЕМАТИКА 1

1. У зависности од реалног параметра a дискутовати и решити систем једначина

$$\begin{aligned} x - 2y - 3z &= 1, \\ 2x - 5y - 5z + t &= 2, \\ 3x - 7y + (a-8)z + (a+1)t &= a^2 + 2, \\ 5x - 12y + (a-13)z + (2a+3)t &= 2a^2 + 3. \end{aligned} \quad (20)$$

2. Одредити једначину праве l која садржи тачку $L(0, 2, 1)$ и сече праву $p: 2x - y + 2z = 3$, $x + y + z = 0$ под правим углом. Одредити затим једначину равни α која садржи праву l и тачку $M(-2, 3, 1)$. (20)

3. Испитати ток и нацртати график функције

$$f(x) = xe^{-\frac{1}{x}} \quad (20)$$

4. Користећи Маклоренове формуле израчунати граничну вредност

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} - e^{\sqrt{1-x^2}}}{x^4}. \quad (15)$$

5. Нека су $A_1, A_2, \dots, A_n \in M_n(\mathbb{R})$ ортогоналне матрице. Доказати да је онда и њихов производ $\prod_{i=1}^n A_i$ ортогонална матрица. (5)

Решења:

- За $a = 0$ систем није сагласан. За $a = -1$ постоји бесконачно много решења облика $\{(1 - 3\alpha, 0, -\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. За $a \notin \{-1, 0\}$ систем има јединствено решење.
- Збирка Линеарна алгебра, задатак 170 на страни 149.
- Збирка Математичка анализа 1, задатак 3.209 на страни 232.
- Збирка Математичка анализа 1, задатак 3.185 на страни 261.
- Књига Математика 1, задатак 99 на страни 111.

МАТЕМАТИКА 1

1. Одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

а затим наћи A^n , $n \in \mathbb{N}$ користећи Кејли-Хамилтонову теорему. (20)

2. Одредити једначину заједничке нормале, а потом и растојање мимоилазних правих

$$p: \frac{x-4}{-1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{1}, \quad q: \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-4}{1}. \quad (20)$$

3. Испитати ток и нацртати график функције

$$f(x) = (x^2 + 5x + 6)e^{-x} \quad (20)$$

4. Написати Маклоренову формулу четвртог степена са остатком у Пеановом облику за функцију

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{\sqrt[5]{1+5x}}. \quad (15)$$

5. Нека је $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ линеаран оператор. Одредити $L(0, -1, 5)$, ако је познато да важи $L(1, 0, 0) = (2, 1)$, $L(0, 1, 0) = (0, -1)$ и $L(0, 0, 1) = (3, 3)$. (5)

Решења:

1. Збирка Линеарна алгебра, задатак 92 на страни 86.

За други део задатка користимо Кејли - Хамилтонову теорему. Како је карактеристични полином $\varphi_A(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 + 4)$, имамо $\varphi_A(A) = 0 \implies A^3 = -4A$, те је

$$A^{2k} = (-4)^{k-1} A^2 = (-4)^k \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad k \geq 1, \quad A^{2k+1} = (-4)^k A = (-4)^k \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad k \geq 0.$$

2. Збирка Линеарна алгебра, задатак 182 на страни 156.

3. Књига Математика 1, задатак 6.28 на страни 251.

4. Збирка Математичка анализа 1, задатак 3.163 на страни 193.

5. Књига Математика 1, задатак 84 на страни 110.

МАТЕМАТИКА 1

1. У зависности од реалних параметара a и b дискутовати и решити систем:

$$\begin{aligned} ax + by + z &= 1, \\ x + by + az &= 1, \\ x + aby + z &= b. \end{aligned} \quad (20)$$

2. Дате су праве $p: \frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-3}{1}$ и $q: \frac{x-7}{-1} = \frac{y-11}{-3} = \frac{z+2}{0}$. Одредити једначину праве која садржи тачку $M(2, -1, 7)$ и сече дате праве. (20)

3. Испитати ток и нацртати график функције $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 12x^2}$. (20)

4. Применом Маклоренових развоја израчунати граничну вредност

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos 2x} - \sqrt{\cos 3x}}{x^2}. \quad (15)$$

5. Показати да је Ролова теорема специјалан случај Лагранжове теореме. (5)

Решења:

1. Збирка Линеарна алгебра, задатак 78 на страни 63.
2. Збирка Линеарна алгебра, задатак 167 на страни 147.
3. Збирка Математичка анализа 1, задатак 3.212 на страни 238.
4. Збирка Математичка анализа 1, задатак 3.176 на страни 202.
5. Књига Математика 1, задатак 33 на страни 254.