Naziv predmeta:

SATELITSKA GEODEZIJA

Nivo studija: Osnovne akademske studije
Studijski program: Geodezija
Semestar: V

Predmetni nastavnik:
dr Dušan Petković, mast. inž. geodez.

Građevinski fakultet, Univerzitet u Beogradu
Katedra za geodeziju i geoinformatiku

Školska godina: 2025/2026.

Informacije o predmetu

Naziv predmeta:	**Satelitska geodezija**
Fond časova:	**3 + 0**
Prisustvo:	**obavezno** (75%)
Način polaganja ispita:	**usmeni ispit**
Predispitne obaveze:	**-**
Literatura:	Uvod u Satelitsku geodeziju – D. Blagojević Satellite geodesy: foundations, methods and applications – G. Seeber

Informacije o predmetu

<u>Predmetni nastavnik</u>: dr Dušan Petković, mast. inž. geodez.
Docent, Građevinski fakultet
Univerzitet u Beogradu

<u>Kancelarija</u>: **334**

<u>Mail adresa</u>: **dpetkovic@grf.bg.ac.rs**
petkovicdusaan@yahoo.com

<u>Termini konsultacija</u>: **sreda 10-11**

<u>Predispitne obaveze</u>: **-**

Sadržaj predmeta

Nastavne celine:

1. Uvodna razmatranja
2. Referentni sistemi satelitske geodezije
3. Osnovna teorija satelitskih orbita
4. Principi satelitskih merenja
5. Satelitski sistemi i metode

PREDAVANJE 1

Uvodna razmatranja

Uvodna razmatranja

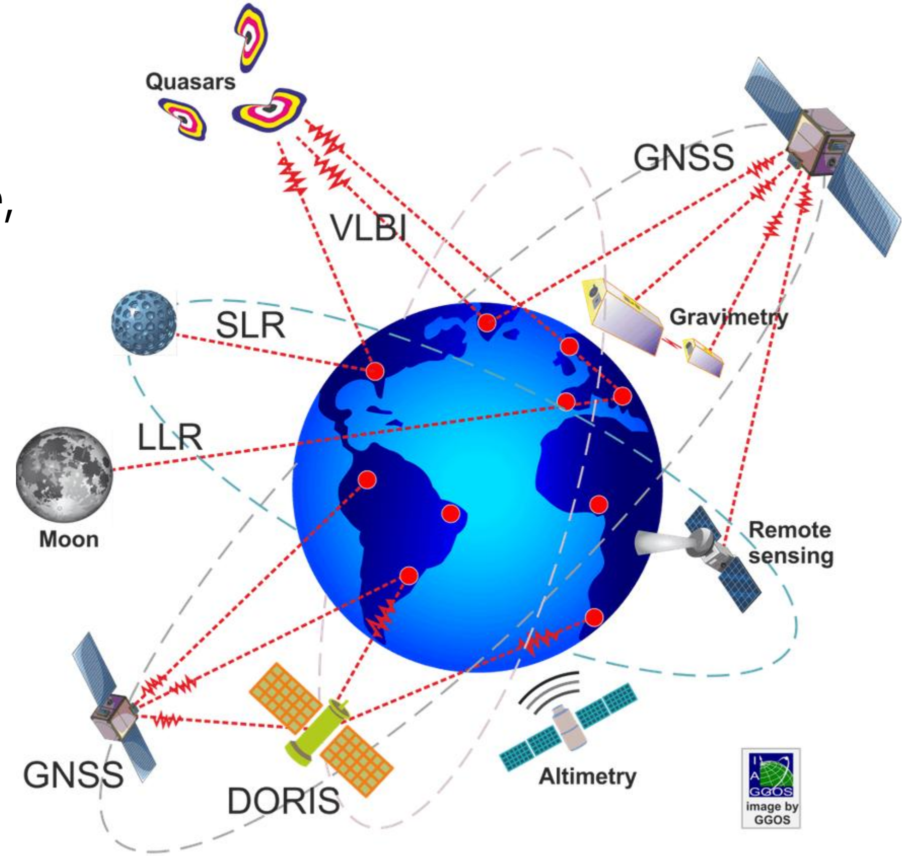
1. Definicija i zadaci satelitske geodezije
2. Klasifikacija i koncept satelitske geodezije
3. Istorijski razvoj satelitske geodezije
4. Primena satelitske geodezije

Definicija i zadaci satelitske geodezije

<u>Definicija</u>: Satelitska geodezija je oblast geodezije koja obuhvata postupke i obradu preciznih merenja ka satelitima, od satelita i između satelita, koji se izvode u cilju rešavanja različitih geodetskih zadataka.

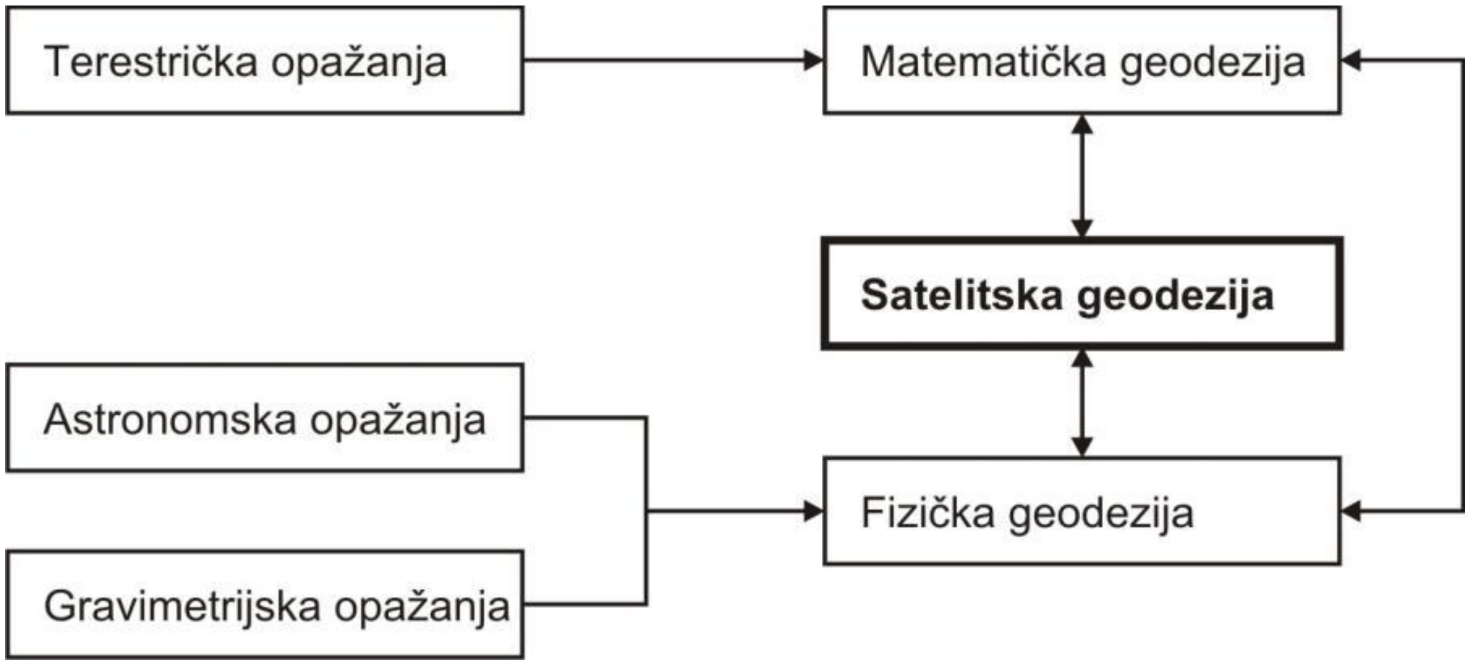
<u>Osnovni ciljevi</u>:

- određivanje preciznih geodetskih mreža,
- određivanje spoljašnjeg gravitacionog polja Zemlje,
- merenje i modeliranje geodinamičkih fenomena.



Uloga satelitske geodezije

Definicija: Satelitska geodezija je oblast geodezije koja obuhvata postupke i obradu preciznih merenja ka satelitima, od satelita i između satelita, koji se izvode u cilju rešavanja različitih geodetskih zadataka.



Klasifikacija i osnovni koncept satelitske geodezije

Osnovni aspekti korišćenja veštačkih satelita:

- Direktna (geometrijska) metoda: sateliti se mogu smatrati visokim signalima prema kojima se vrše opažanja,
- Indirektna (dinamička) metoda: satelit predstavlja svojevrsni senzor Zemljinog gravitacionog polja.

Osnovne metode:

- Zemlja-kosmos (satelitski sistemi za globalno pozicioniranje),
- kosmos-Zemlja (radarska altimetrija, satelitska gradiometrija),
- kosmos-kosmos (satelitsko praćenje satelita).

Klasifikacija i osnovni koncept satelitske geodezije

Osnovni koncept (fundamentalna jednačina satelitske geodezije):

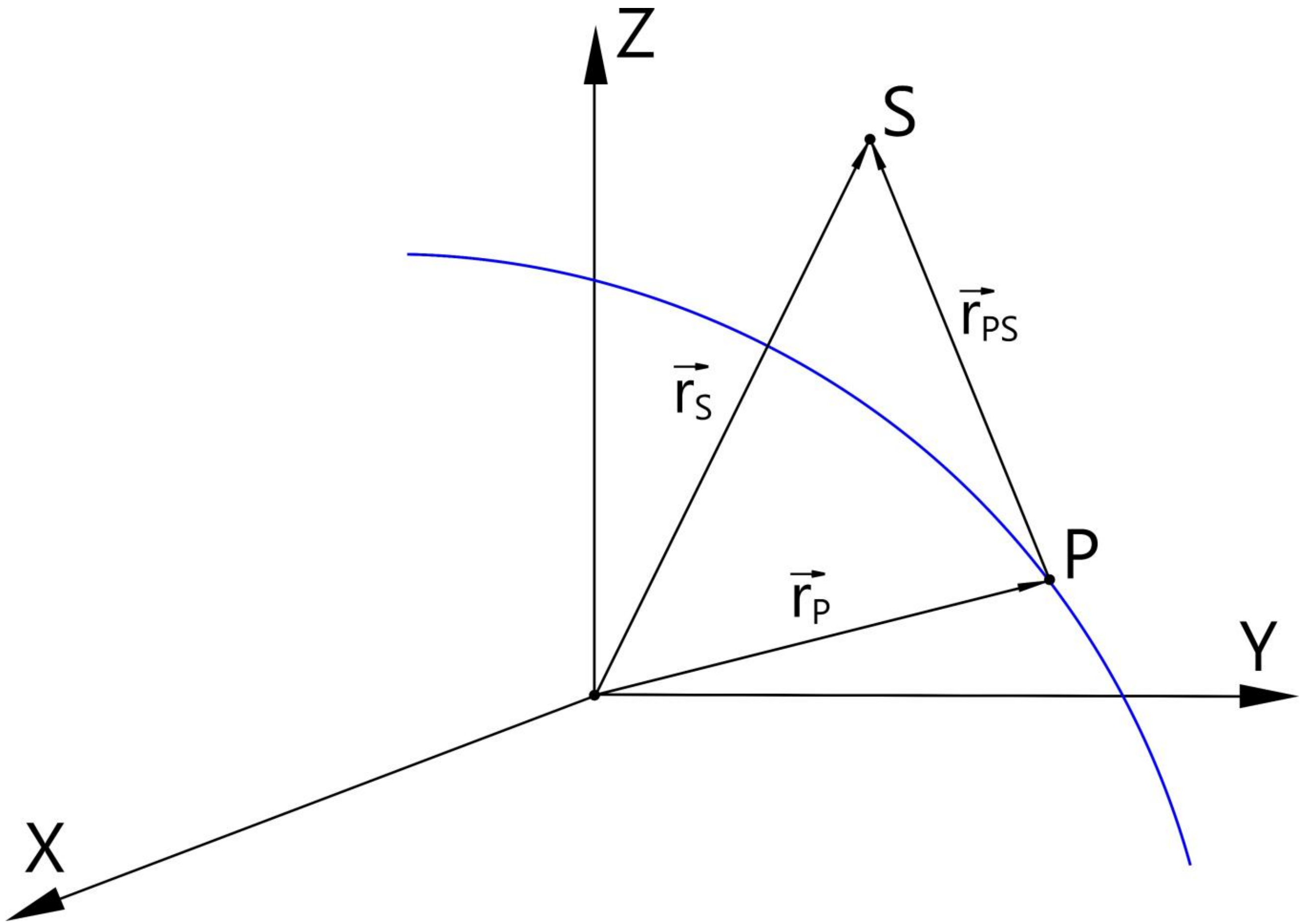
- $\vec{\boldsymbol{r}}_S = \vec{\boldsymbol{r}}_P + \vec{\boldsymbol{r}}_{PS}$

Merene veličine → $\vec{\boldsymbol{r}}_{PS}$

Poznate veličine → $\vec{\boldsymbol{r}}_S$

Finalni oblik jednačine:

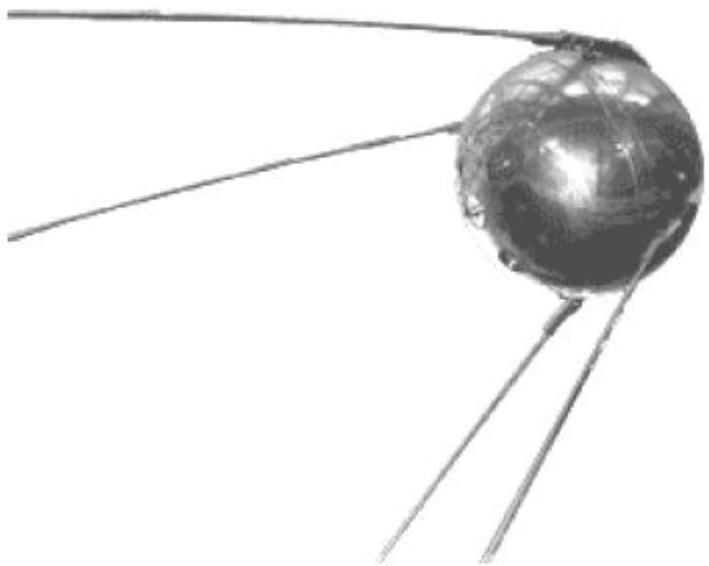
- $\vec{\boldsymbol{r}}_S - \vec{\boldsymbol{r}}_{PS} = \vec{\boldsymbol{r}}_P$



Istorijski razvoj

<u>Početak satelitske geodezije:</u>

- 04.10.1957. godine SSSR lansira prvi veštački satelit SPUTNIK-1,
- osnovni cilj misije: istraživanje atmosfere,
- trajanje misije: 3 meseca (1440 obilaska na visinama od 200-1000 km),
- **Doplerski pomak**.



Istorijski razvoj

Period 1958-1970:

- nagli razvoj metode satelitskih opažanja i teorije kretanja satelita,
- globalni geopotencijalni modeli Zemlje (SAO SE I II i III, GEM).

Period 1970-1980:

- lasersko merenja rastojanja do satelita i Meseca,
- Doplersko pozicioniranje,
- satelitska altimetrija,
- praćenje geodinamičkih pojava,
- globalni geopotencijalni modeli (GEM 10, GRIM).

Istorijski razvoj

Period 1980-1990:

- period operacionalizacije satelitskih metoda u geodeziji i geodinamici,
- poboljšanja u performansama i tačnosti satelitskih sistema (naročito NAVSTAR GPS),
- poboljšanja nivoa tačnosti metode laserskog merenja rastojanja (SLR) i dugobazisne radiointerferometrije (VLBI) → određivanje parametara rotacije Zemlje,
- određivanje pomeranja Zemljine kore.

Istorijski razvoj

<u>Period 1990-2000:</u>

- osnivanje međunarodnih permanentnih službi:
  - Međunarodna služba Zemljine rotacije – IERS;
  - Međunarodna GNSS služba – IGS;
- osnivanje međunarodnih permanentnih službi:
  - CORS u SAD-u;
  - CACS u Kanadi;
  - SAPOS u Nemačkoj;

Istorijski razvoj

Period 2000-:

- poboljšanje tačnosti satelitskih podataka,
- specijalizovane satelitske misije,
- kompletno uspostavljanje satelitskih sistema za globalno pozicioniranje (NAVSTAR GPS, GLONASS, GALILEO, BEIDOU),
- uspostavljanje velikog broja mreža permanentnih stanica.

Oblasti primene

Globalna geodezija:

- opšti oblik Zemljine figure i gravitacionog polja,
- dimenzije opšteg Zemljinog elipsoida,
- uspostavljanje globalne terestričke referentne osnove.

Geodetske mreže:

- uspostavljanje fundamentalnih nacionalnih mreža,
- uspostavljanje homogenih trodimenzionalnih mreža,
- geodetsko povezivanje kopna i ostrva.

Oblasti primene

Geodinamika:

- određivanje savremenih pomeranja Zemljine kore,
- permanentno trodimenzionalno praćenje seizmičkih zona,
- određivanje pomeranja polova i Zemljine rotacije.

Praktična i primenjena geodezija:

- uspostavljanje specijalnih lokalnih mreža za potrebe inženjerstva,
- pozicioniranje različite tačnosti za potrebe kartografije, šumarstva, poljoprivrede, arheologije i slično,
- detaljni premer za potrebe katastra, planiranja i projektovanja, geografskih informacionih sistema, urbanizma, razgraničenja i slično.

Oblasti primene

Navigacija i marinska geodezija:

- precizna navigacija na kopnu, moru i u vazduhu,
- precizno pozicioniranje za potrebe marinskog premera, eksploatacije morskog dna, hidrografije, okeanografije, marinske geologije i geofizike,
- povezivanje i unifikacija različitih vertikalnih referentnih sistema.

Ostale primene:

- pozicioniranje i određivanje brzina za potrebe geofizičkih osmatranja,
- tomografija atmosfere (istraživanje jonosfere i troposfere),
- određivanje parametara satelitskih orbita.

PREDAVANJE 2

Referentni sistemi satelitske geodezije

Referentni sistemi satelitske geodezije

1. Koordinatni sistemi i transformacije
2. Globalni referentni sistemi
3. Geodetski datum i datumska transformacija
4. Lokalni referentni sistemi
5. Pojam geoida i koncept visina
6. Referentni sistemi vremena

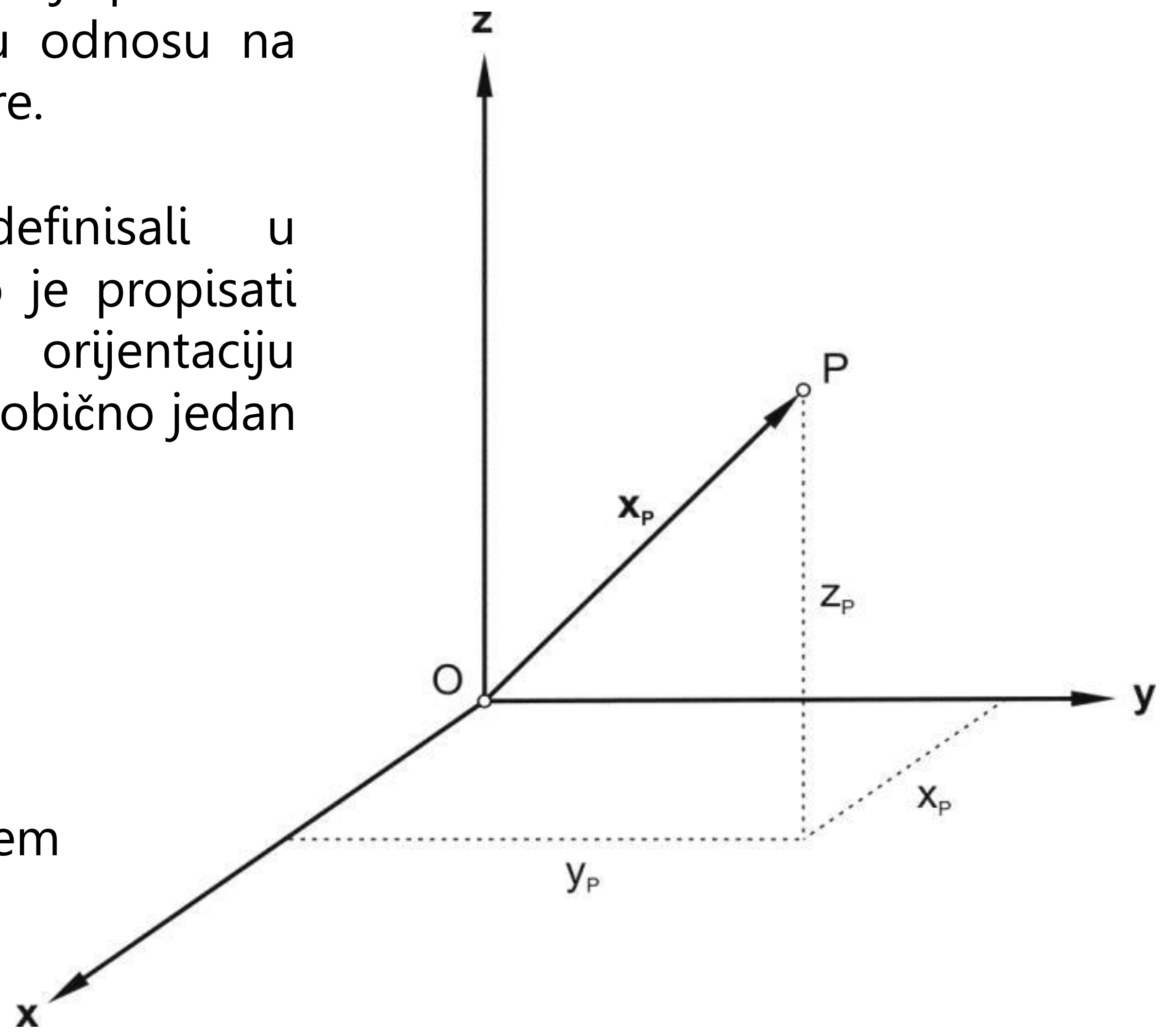
Koordinatni sistemi i transformacije

Definicija: Koordinatni sistem je matematički okvir u kome se položaj tačaka u prostoru jednoznačno opisuje pomoću skupa brojeva (koordinata), definisanih u odnosu na izabrani početak, orijentaciju i jedinice mere.

Da bi se koordinatni sistemi definisali u trodimenzionalnom prostoru, neophodno je propisati koordinatni početak (tri elementa), orijentaciju koordinatnih osa (tri elementa) i razmeru (obično jedan element).

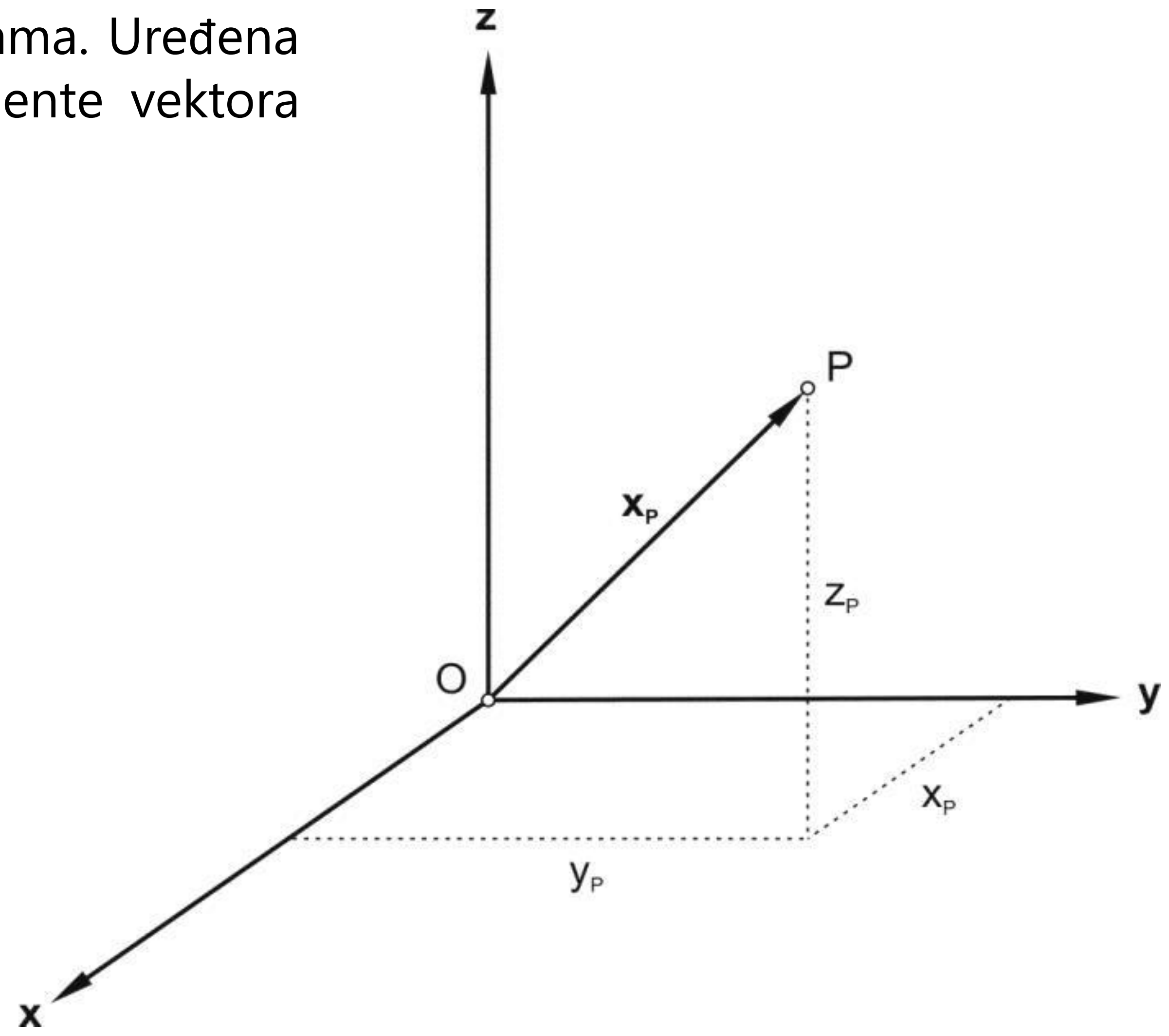
Napomene:

- desno orijentisani koordinatni sistem
- pravougli pravolinijski koordinatni sistem
- trodimenzionalni koordinatni sistem



Koordinatni sistemi i transformacije

Definicija: Položaj neke tačke u trodimenzionalnom prostoru jedinstveno je određen uređenom trojkom realnih brojeva koji se nazivaju njenim koordinatama. Uređena trojka predstavlja istovremeno i komponente vektora položaja tačke po koordinatnim osama.



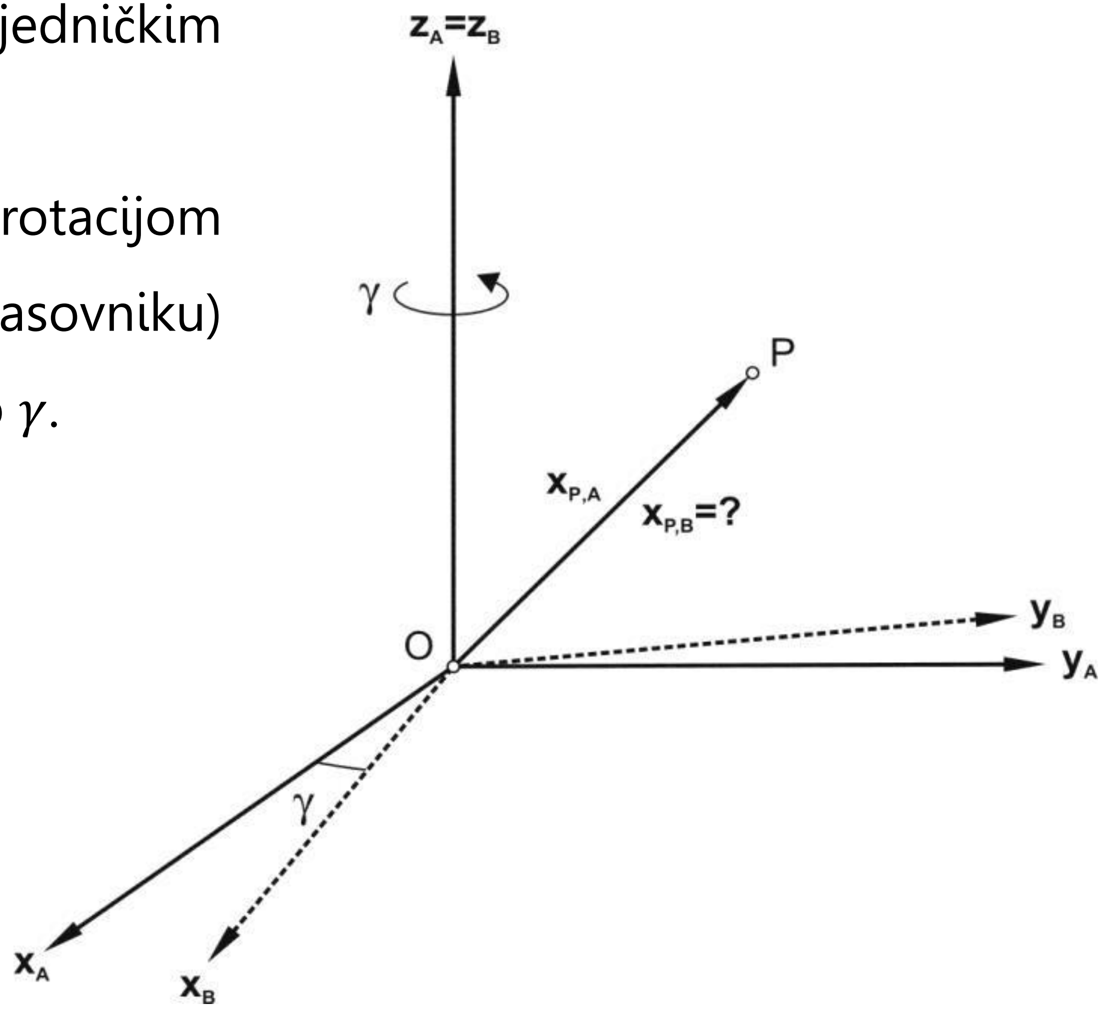
Položaj tačke P:

- $\vec{\boldsymbol{x}}_P = [x_P \quad y_P \quad z_P]^{\mathrm{T}}$

Koordinatni sistemi i transformacije

Problem transformacije:

- dva koordinatna sistema (A i B) sa zajedničkim koordinatnim početkom;
- koordinatni sistem B nastao pozitivnom rotacijom (suprotno od smera kretanja kazaljke na časovniku) sistema A oko koordinatne ose Z_A za ugao γ.



Transformacija:

- $\vec{\boldsymbol{x}}_{P,B} = \mathbf{R}_3(\gamma)\vec{\boldsymbol{x}}_{P,A}$

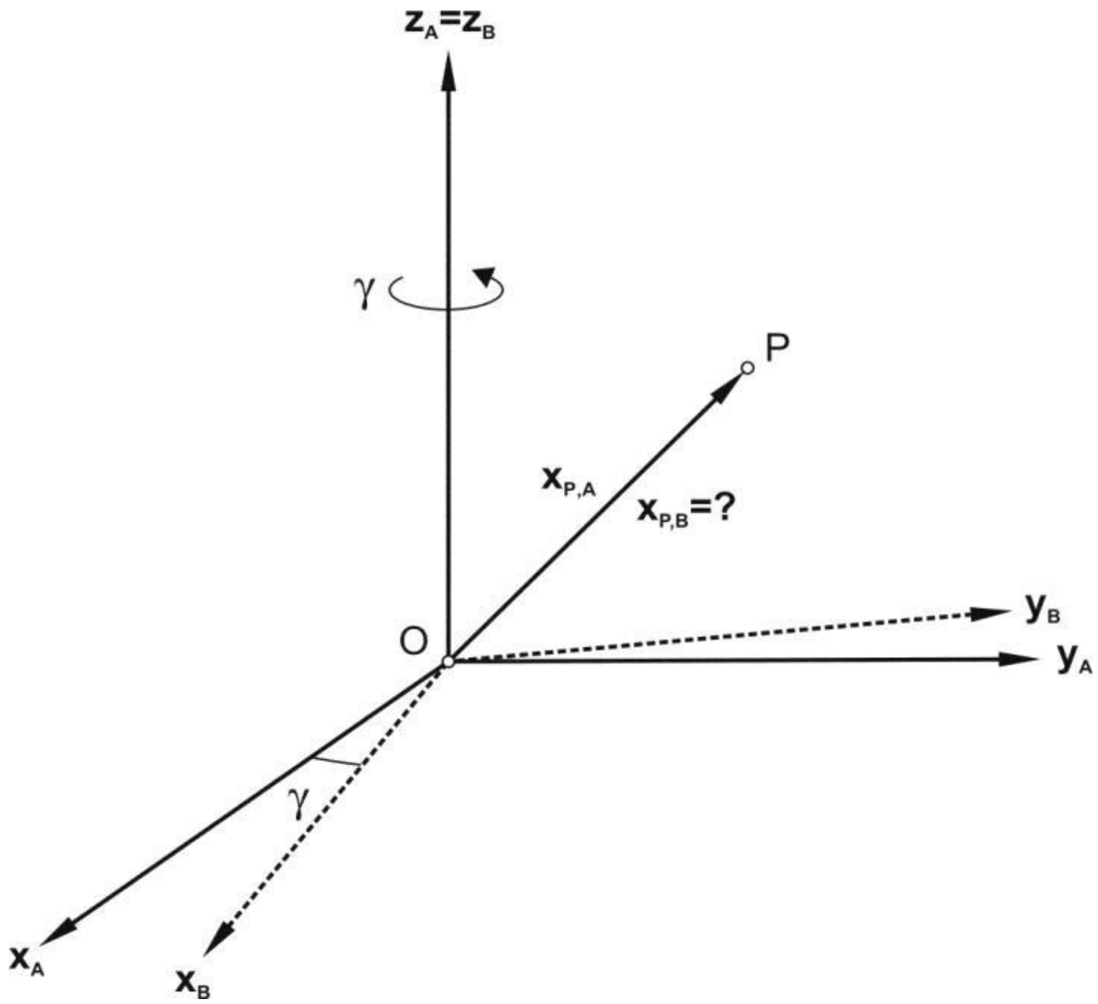
Koordinatni sistemi i transformacije

<u>Matrica rotacije</u>:

$$
\begin{gathered}
x_{P,B} = \cos(\gamma) \cdot x_{P,A} + \sin(\gamma) \cdot y_{P,A} \\
x_{P,B} = \cos(\gamma) \cdot y_{P,A} - \sin(\gamma) \cdot x_{P,A} \\
z_{P,B} = z_{P,A}
\end{gathered}
$$

$$
\begin{bmatrix} x_{P,B} \\ y_{P,B} \\ z_{P,B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) & 0 \\ -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{P,A} \\ y_{P,A} \\ z_{P,A} \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{R}_3(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) & 0 \\ -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$



Koordinatni sistemi i transformacije

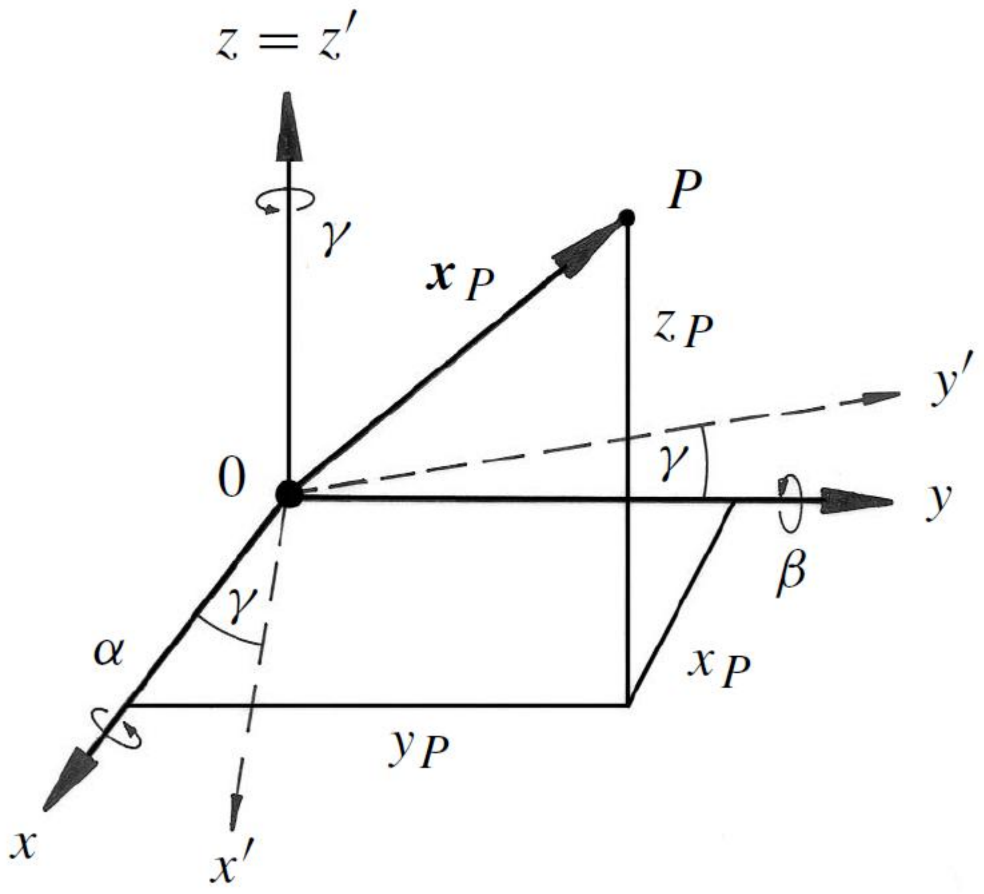
Rotacije oko ostalih koordinatnih osa:

- $$\mathbf{R}_1(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

- $$\mathbf{R}_2(\beta) = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & -\sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

Matrica ukupne rotacije:

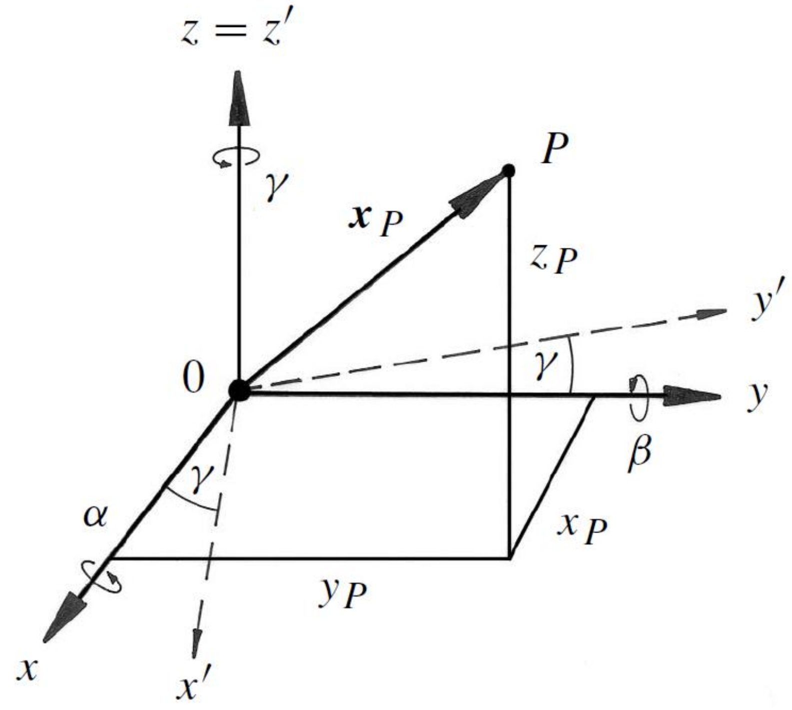
- $$\mathbf{R}(\alpha,\beta,\gamma) = \mathbf{R}_1(\alpha)\mathbf{R}_2(\beta)\mathbf{R}_3(\gamma)$$



Koordinatni sistemi i transformacije

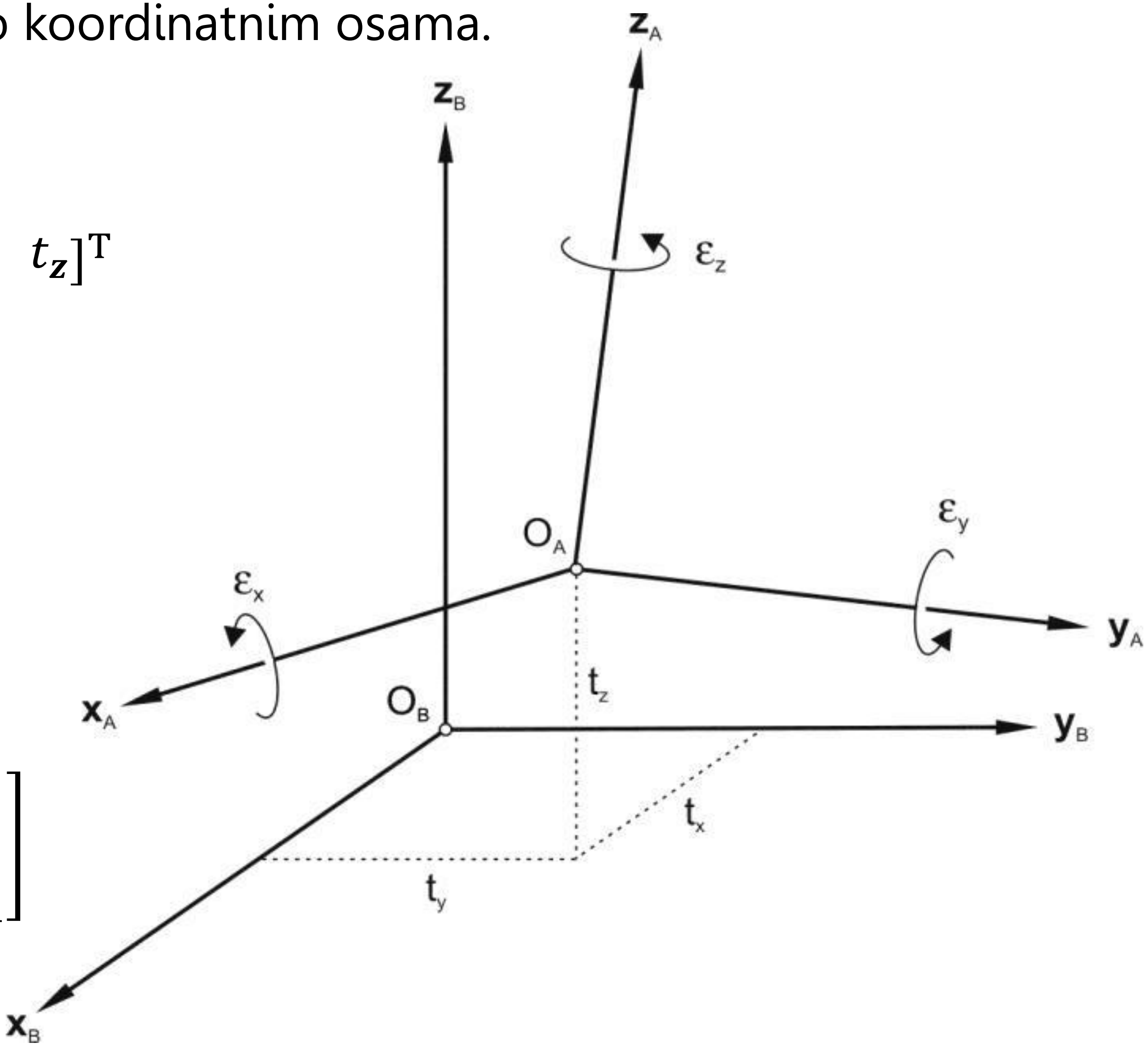
Važne osobine:

- rotacija ne menja intenzitet vektora
- proizvod matrica oko dve različite koordinate ose nije komutativan: $\mathbf{R}_i(\alpha)\mathbf{R}_j(\beta) \neq \mathbf{R}_j(\beta)\mathbf{R}_i(\alpha)$
- proizvod matrica je asocijativan: $\mathbf{R}_i(\mathbf{R}_j\mathbf{R}_k) = (\mathbf{R}_i\mathbf{R}_j)\mathbf{R}_k$
- rotacije oko iste koordinatne ose su aditivne: $\mathbf{R}_i(\alpha)\mathbf{R}_i(\beta) = \mathbf{R}_i(\alpha + \beta)$
- matrice elementarnih rotacija su ortogonalne: $\mathbf{R}_i^{-1}(\alpha) = \mathbf{R}_i^{\mathrm{T}}(\alpha) = \mathbf{R}_i(-\alpha)$
- važi jednakost: $\left(\mathbf{R}_i\mathbf{R}_j\right)^{-1} = \mathbf{R}_j^{-1}\mathbf{R}_i^{-1}$



Koordinatni sistemi i transformacije

Pored orijentacije, dva koordinatna sistema mogu imati različiti koordinatni početak, suprotnu orijentaciju koordinatnih osa ili drugačiju razmeru po koordinatnim osama.



Translacija:

- $\vec{\boldsymbol{x}}_{P,B} = \vec{\boldsymbol{x}}_{P,A} + \vec{\boldsymbol{t}}$ gde je $\vec{\boldsymbol{t}} = [t_{\boldsymbol{x}} \quad t_{\boldsymbol{y}} \quad t_{\boldsymbol{z}}]^{\mathrm{T}}$

Razmera:

- $\vec{\boldsymbol{x}}_{P,B} = (1 + dm)\vec{\boldsymbol{x}}_{P,A}$

Polarnost:

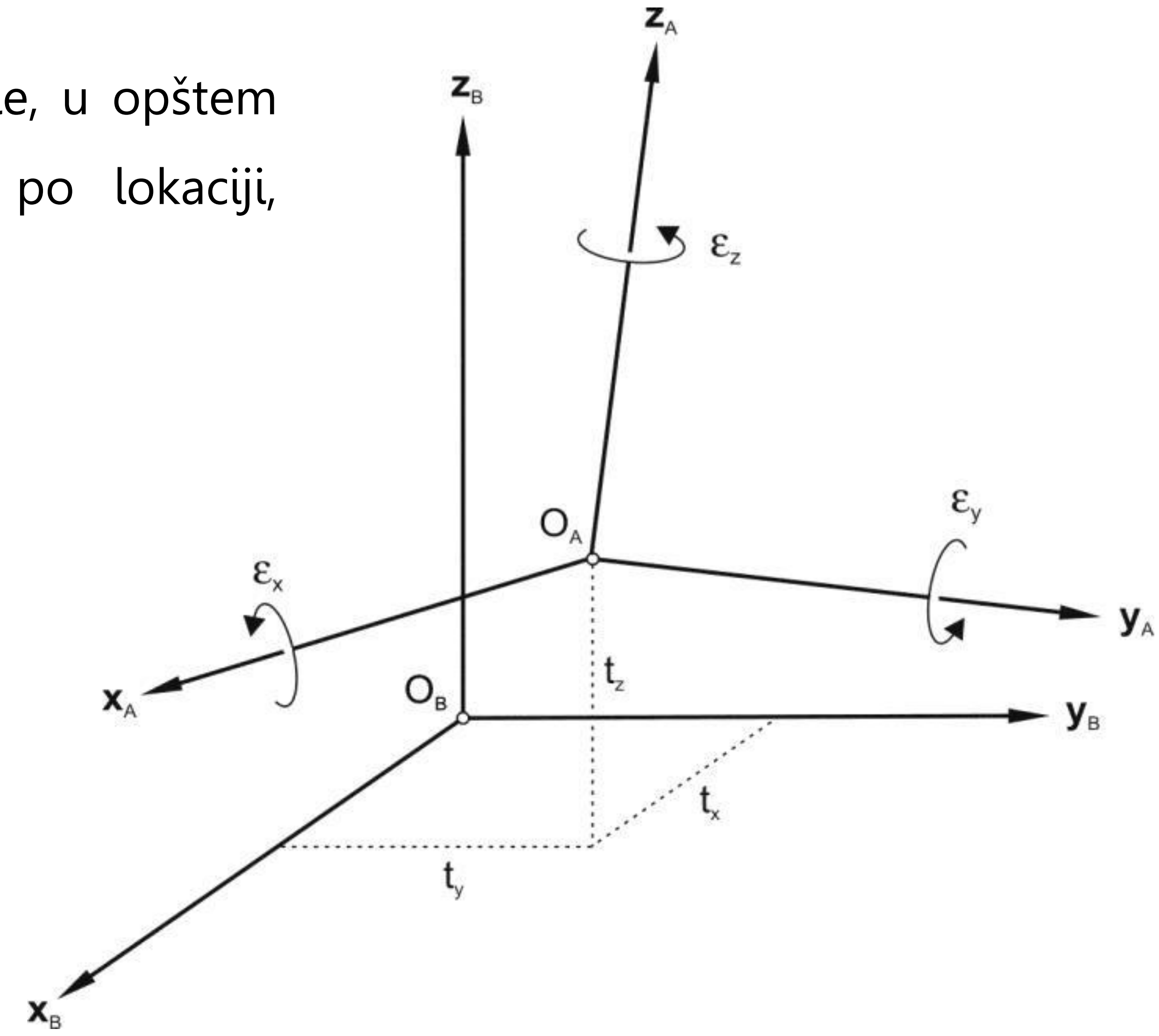
- $\vec{\boldsymbol{x}}_{P,B} = \mathbf{S}\vec{\boldsymbol{x}}_{P,A}$

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{S}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Koordinatni sistemi i transformacije

Problem transformacije (u opštem slučaju):

Dva koordinatna sistema mogu se, dakle, u opštem slučaju međusobno mogu razlikovati po lokaciji, orijentaciji, razmeri i polarnosti.



Izraz za transformaciju (u opštem slučaju):

- $\vec{\boldsymbol{x}}_{P,B} = \vec{\boldsymbol{t}} + (1 + dm)\mathbf{RS}\vec{\boldsymbol{x}}_{P,A}$

Globalni referentni sistemi

Definicija: Da bi se koordinatni sistemi definisali u trodimenzionalnom prostoru, neophodno je propisati koordinatni početak (tri elementa), orijentaciju koordinatnih osa (tri elementa) i razmeru (obično jedan element).

Tako usvojeni koordinatni sistemi, uz neophodne konstante, parametre, konvencije i teorije koje definišu koordinate i nedvosmisleno određuju na koji se način one pridružuju tačkama i objektima, nazivaju se **referentnim sistemima**.

Definicija: Referentni sistem sam po sebi ne obezbeđuje nikakvu praktičnu mogućnost određivanja koordinata novih tačaka. Stoga se u modernoj terminologiji razlikuje pojam referentnog okvira ili referentne osnove.

Referentni okvir materijalizuje odgovarajući referentni sistem, i na taj način ga čini dostupnim korisnicima. Realizacija referentnog okvira najčešće se postiže skupom fizički stabilizovanih tačaka ili kosmičkih tela i objekata, zajedno sa spiskom njihovih koordinata koje se upravo odnose na referentni sistem koji se materijalizuje.

Globalni referentni sistemi

Referentni sistemi od interesa u satelitskog geodeziji:

- **Inercijalni referentni sistem**:

  opisivanje položaja i kretanja satelita;
- **Terestrički referentni sistem**:

  opisivanje položaja tačaka na površi Zemlje.

Inercijalni referentni sistemi

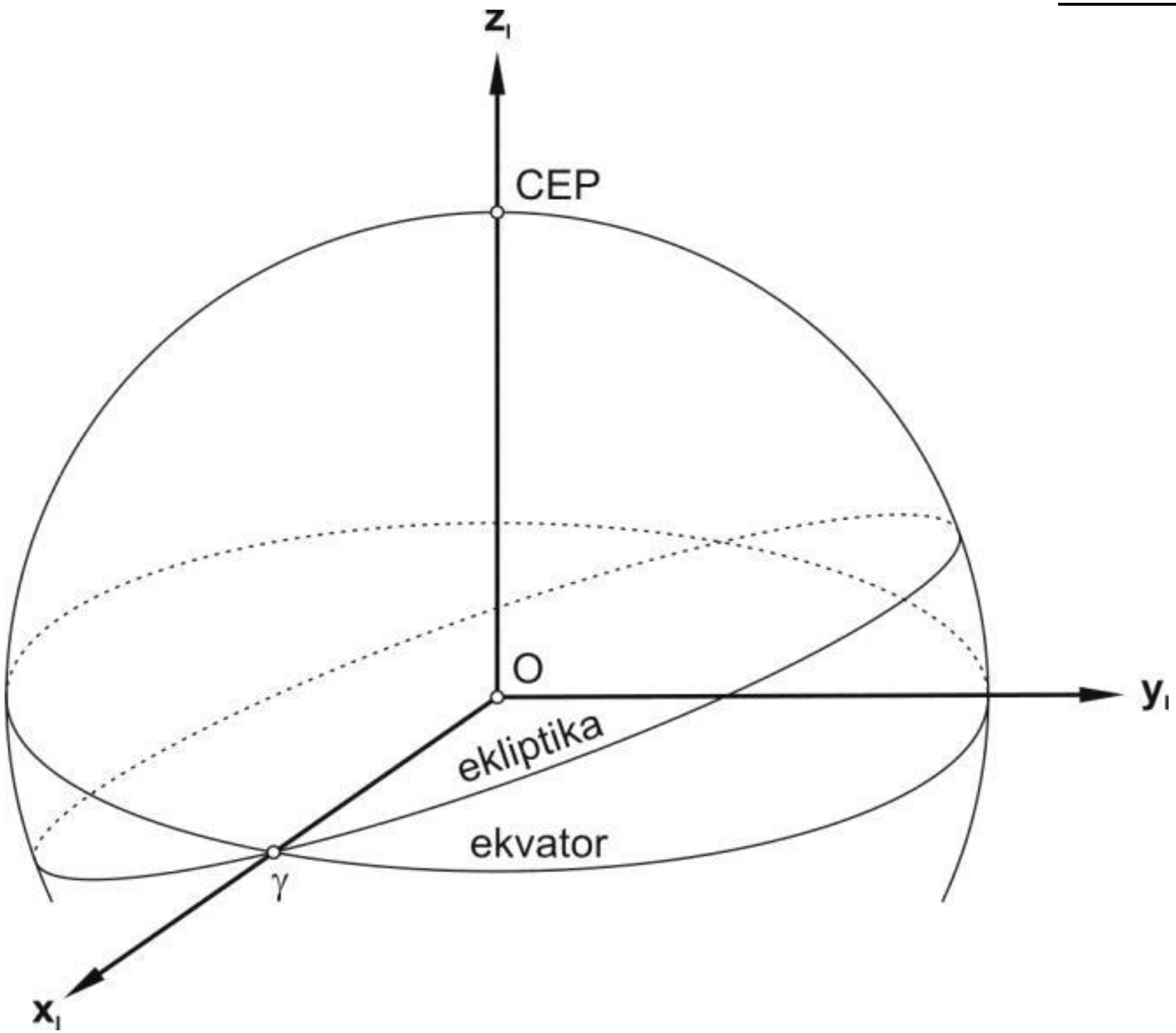
Definicija: **Inercijalni referentni sistem** (IRS) definiše se kao koordinatni sistem koji je nepomičan u prostoru, ili se u njemu translatorno kreće konstantnom brzinom. To je sistem u kojem se izražavaju vektori sile, ubrzanja, brzine i položaja, u skladu sa jednačinama Njutnove mehanike.

Položaji udaljenih zvezda i kosmičkih objekata su u odnosu na IRS u principu nepromenljivi.

Definicija referentnog sistema:

- koordinatni početak je u centru mase Zemlje (geocentrična definicija),
- osa z_{I} se poklapa sa osom rotacije Zemlje,
- osa x_{I} je usmerena u pravcu tačke prolećne ravnodnevnice (γ tačka),
- osa y_{I} kompletira pravougli sistem desne orijentacije.

Inercijalni referentni sistemi



Definicija referentnog sistema:

- koordinatni početak je u centru mase Zemlje (geocentrična definicija),
- osa z_{I} se poklapa sa osom rotacije Zemlje,
- osa x_{I} je usmerena u pravcu tačke prolećne ravnodnevnice (γ tačka),
- osa y_{I} kompletira pravougli sistem desne orijentacije.

Inercijalni referentni sistemi

Neophodni pojmovi:

- nebeska sfera – imaginarna sfera na proizvoljno velikoj udaljenosti čiji se centar poklapa sa centrom mase Zemlje; služi za definiciju i opisivanje položaja nebeskih objekata;
- ekliptika – ravan putanje Zemlje oko Sunca;
- γ tačka (tačka prolećne ravnodnevnice) – tačka na nebeskoj sferi čiji se pravac definiše kao presek ravni Zemljinog ekvatora sa ravni ekliptike;
- CEP – severni nebeski pol;

Inercijalni referentni sistemi

Problem: Osa Zemljine rotacije ne zauzima fiksni pravac u inercijalnom prostoru.

Gravitacioni uticaj Sunca i Meseca na nehomogenu i blago spljoštenu Zemlju uzrokuje složeno periodično kretanje ose rotacije Zemlje u odnosu na zvezde i ekstragalaktičke objekte.

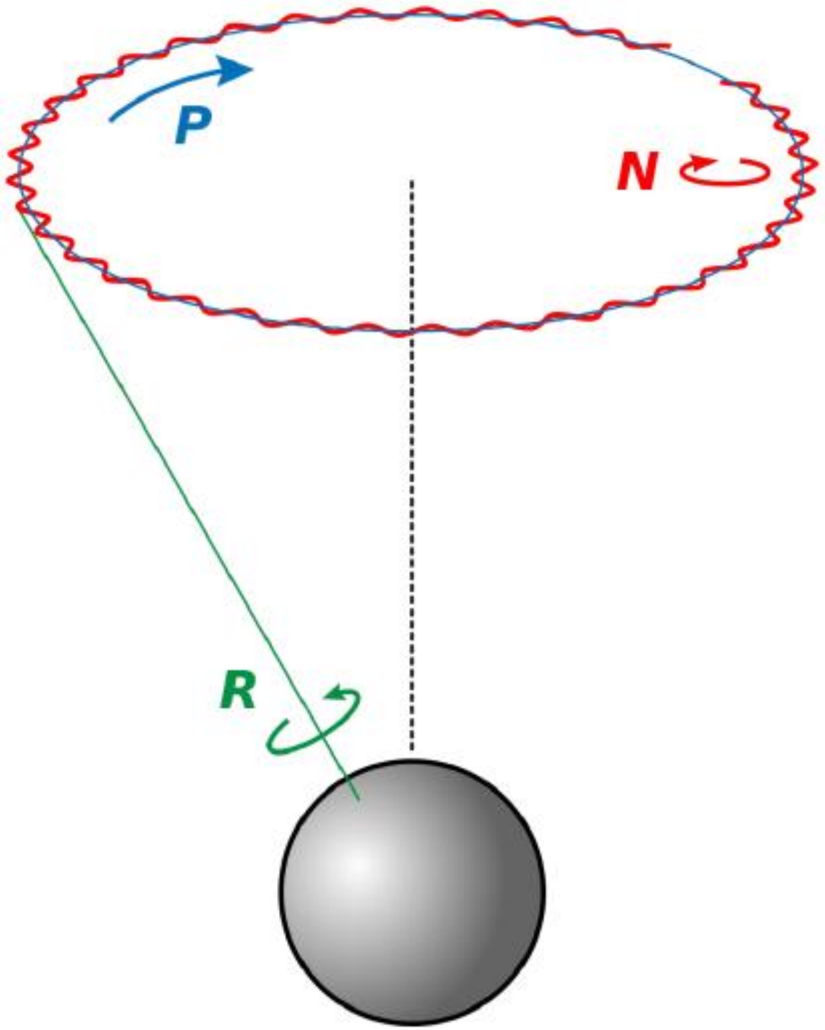
Periodično kretanje ose rotacije Zemlje se može razložiti na dve komponente:

- **Precesija** – konstanta rotacija γ tačke u ravni ekliptike sa periodom od oko 25800 godina, odnosno 50.3" godišnje;
- **Nutacija** – periodična promena nagiba ravni ekvatora u odnosu na ravan ekliptike, sa osnovnim periodom od 18.6 godina i amplitudom od 9.2";

Inercijalni referentni sistemi

Periodično kretanje ose rotacije Zemlje se može razložiti na dve komponente:

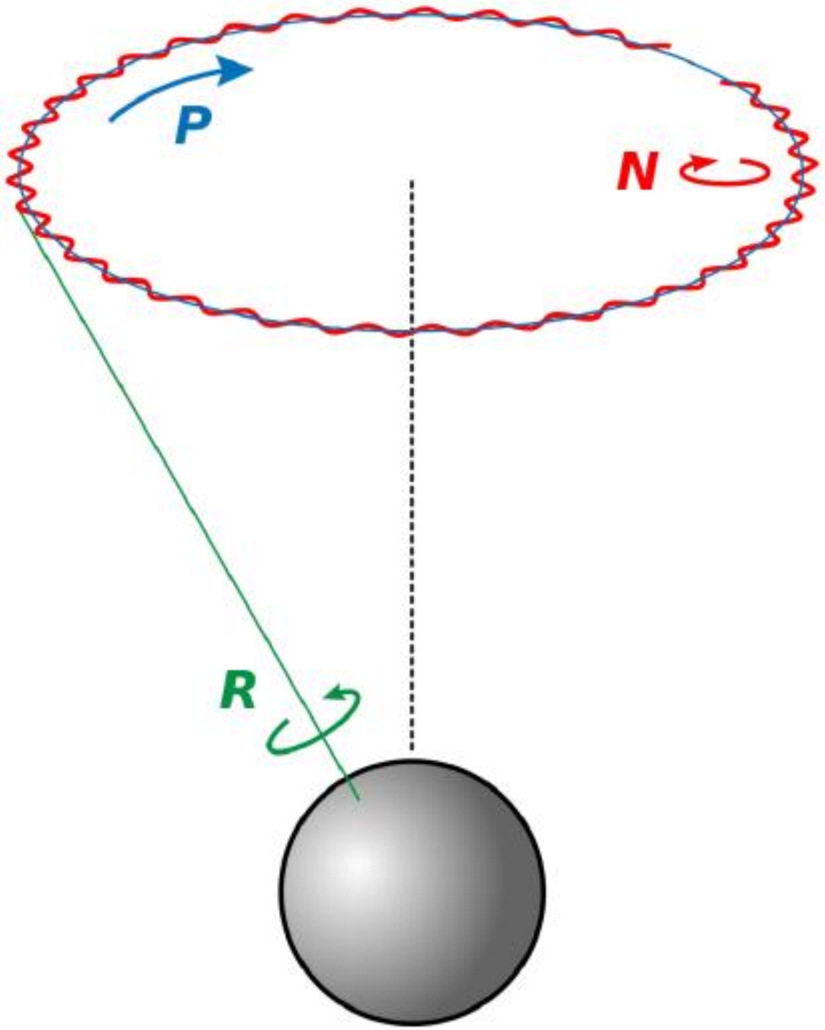
- **Precesija** – konstanta rotacija γ tačke u ravni ekliptike sa periodom od oko 25800 godina, odnosno 50.3" godišnje;
- **Nutacija** – periodična promena nagiba ravni ekvatora u odnosu na ravan ekliptike, sa osnovnim periodom od 18.6 godina i amplitudom od 9.2";



Inercijalni referentni sistemi

Posledica → referentni vremenski trenutak na koji će se svoditi opažanja i položaji:

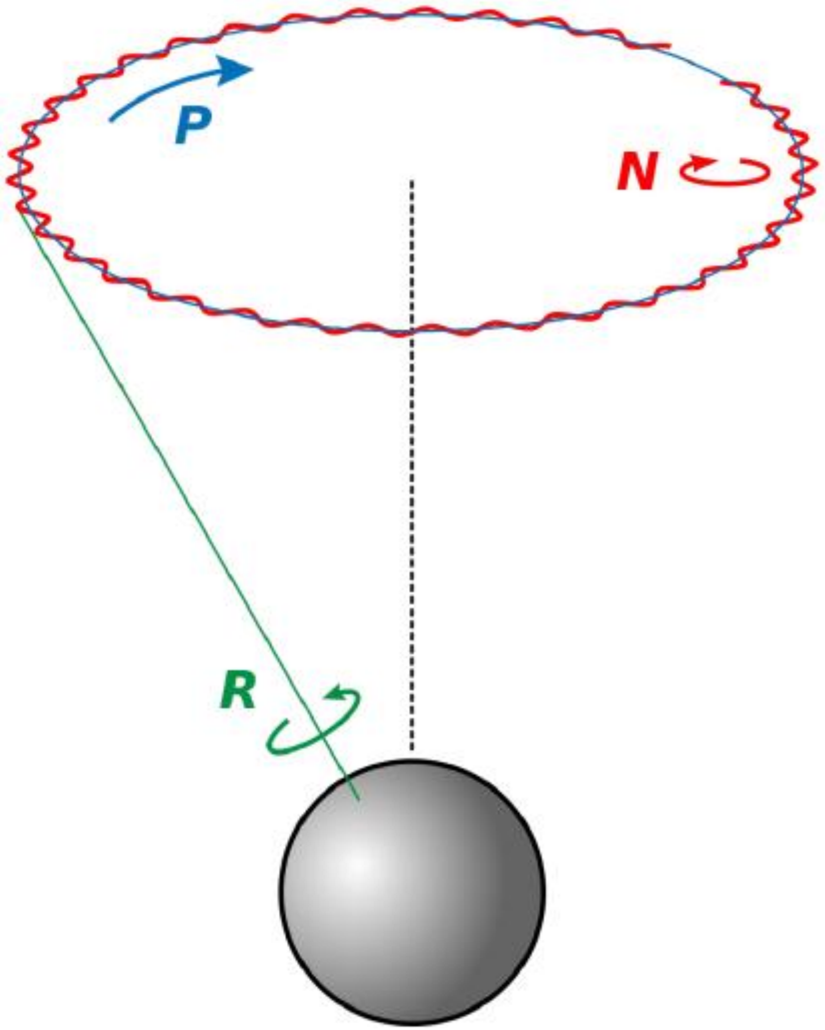
- **Konvencionalni inercijalni referentni sistem** (CIRS) – epoha 1. januara 2000. godine u 12 časova UT vremena (J2000);
- **Konvencionalni inercijalni referentni okvir** (CIRF) - katalog položaja i sopstvenih kretanja skupa fundamentalnih zvezda, kvazara i drugih ekstragalaktičkih objekata, pod nazivom FK5 (Fifth Fundamental Catalogue);



Inercijalni referentni sistemi

Od 1991 godine, Međunarodna astronomska unija uspostavlja novi referentni sistem:

- ➢ kinematički definisan međunarodni nebeski referentni sistem - **International Celestial Reference System** (ICRS);
- ➢ **International Celestial Reference Frame** (ICRF) – katalog položaja za 608 ekstragalaktičkih radio izvora određenih VLBI tehnikom, kao i Hipparcos katalog sa položajima i sopstvenim kretanjem za 118 218 zvezda;



Terestrički referentni sistemi

Problem: Inercijalni sistem nije pogodan za predstavljanje položaja tačaka na fizičkoj površi Zemlje; Usled rotacije Zemlje, koordinate stacioniranih tačaka se neprekidno menjaju!

Definicija: **Terestrički referentni sistem** (TRS) definiše se kao koordinatni sistem koji je čvrsto fiksiran za Zemljinu koru, tako da su u odnosu na njega koordinate stacioniranih tačaka praktično nepomične.

Definicija referentnog sistema (?):

- koordinatni početak je u centru mase Zemlje (uključujući i masu okeana i atmosfere),
- osa z_{T} se poklapa sa osom rotacije Zemlje,
- osa x_{T} je usmerena u pravcu tačke preseka ekvatora i Griničkog meridijana,
- osa y_{T} kompletira pravougli sistem desne orijentacije.

Terestrički referentni sistemi

Problem: Osa Zemljine rotacije ne zauzima fiksni položaj u odnosu na telo Zemlje (geografske polove).

Pol rotacije pomera se tokom vremena u odnosu na okolnu Zemljinu koru po približno spiralnoj putanji čiji poluprečnik ne prelazi 15 m. Ovaj fenomen naziva se **kretanjem pola**.

Za razliku od precesije i nutacije, tačan mehanizam kretanja pola nije poznat, ali se veruje da je rezultat neke vrste preraspodele masa unutar Zemljinog tela.

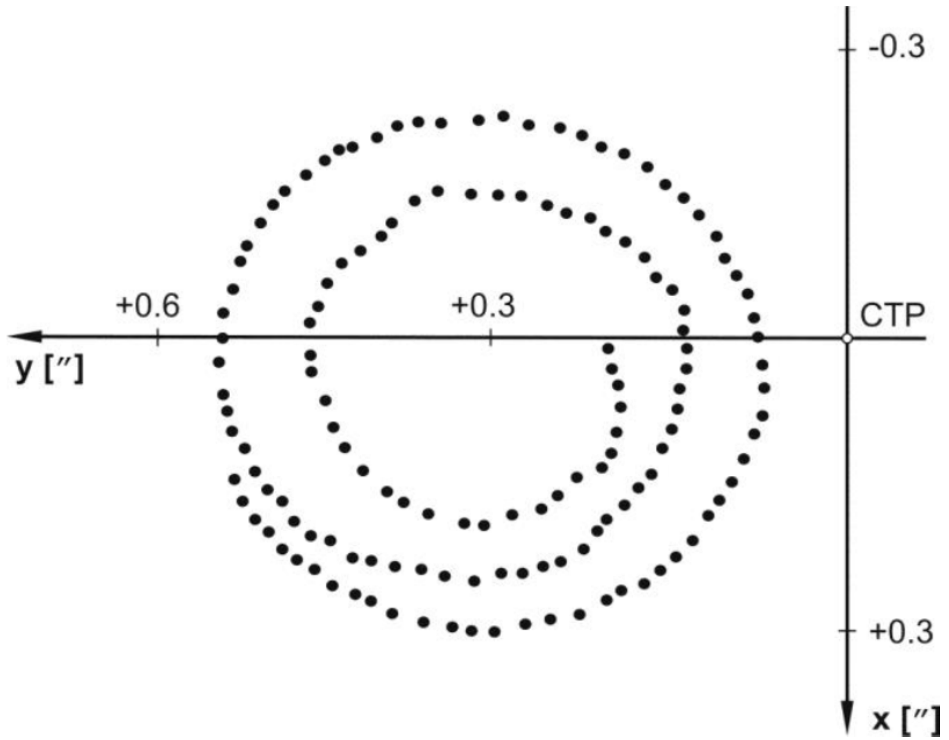
Terestrički referentni sistemi

<u>Problem:</u> Osa Zemljine rotacije ne zauzima fiksni položaj u odnosu na telo Zemlje (geografske polove).

<u>Rešenje:</u> Međunarodnim dogovorom definisan je srednji položaj pola za period od 1900. do 1905. godine, pod nazivom konvencionalni terestrički pol (CTP).

Kretanje trenutnog pola u odnosu na CTP se određuje visokom tačnošću i rezolucijom pomoću satelitskih metoda.

Kretanje pola za period 1900. – 1993. →



Terestrički referentni sistemi

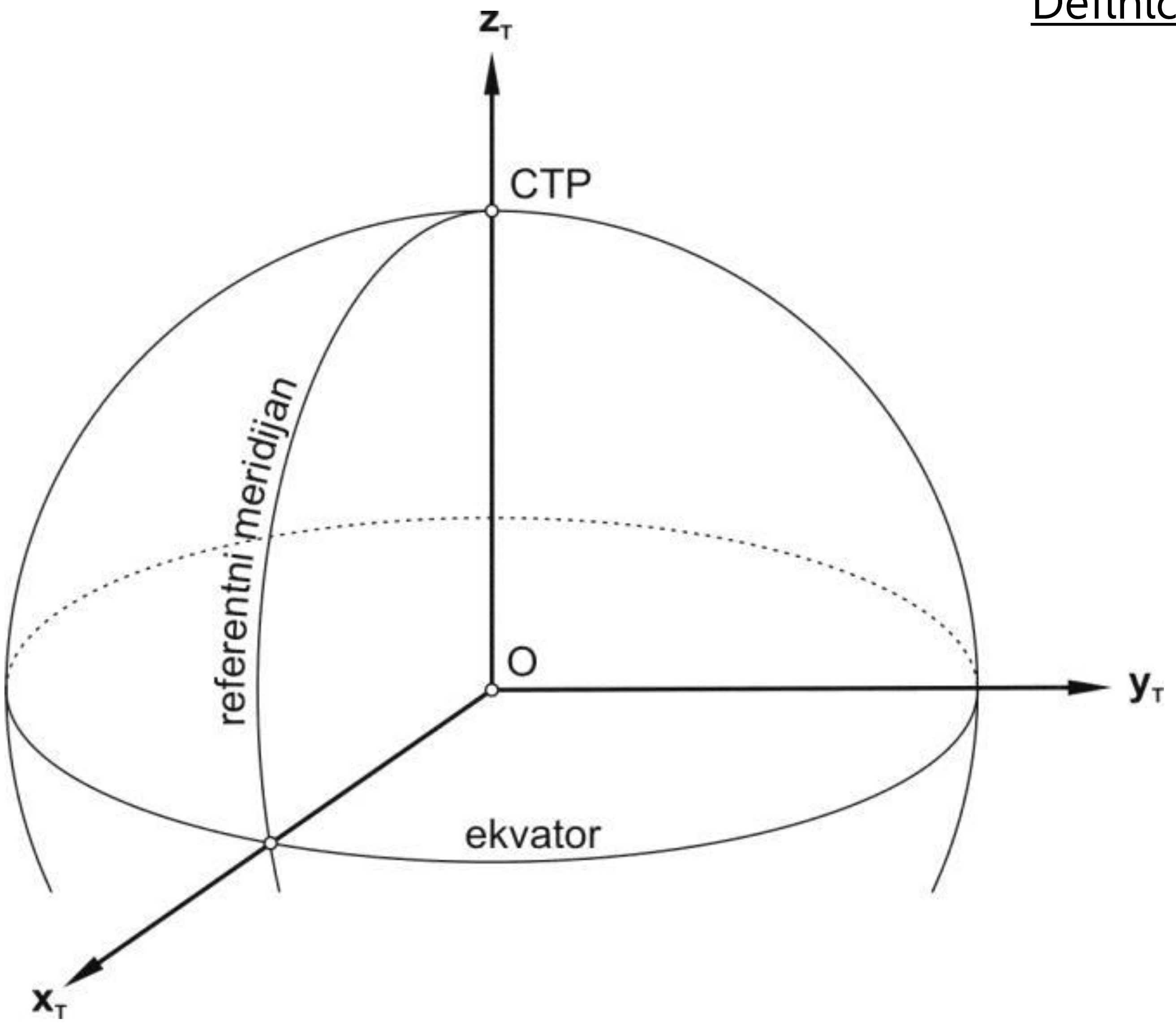
Problem: Inercijalni sistem nije pogodan za predstavljanje položaja tačaka na fizičkoj površi Zemlje; Usled rotacije Zemlje, koordinate stacioniranih tačaka se neprekidno menjaju!

Definicija: **Terestrički referentni sistem** (TRS) definiše se kao koordinatni sistem koji je čvrsto fiksiran za Zemljinu koru, tako da su u odnosu na njega koordinate stacioniranih tačaka praktično nepomične.

Definicija konvencionalnog terestričkog referentnog sistema (CTRS):

- koordinatni početak je u centru mase Zemlje (uključujući i masu okeana i atmosfere),
- osa z_{T} se poklapa sa srednjom osom rotacije Zemlje za period od 1900. do 1905. godine, odnosno prolazi kroz CTP,
- osa x_{T} prolazi kroz tačku preseka CTP ekvatora i CTP početnog Griničkog meridijana,
- osa y_{T} se nalazi u ravni ekvatora i kompletira pravougli sistem desne orijentacije.

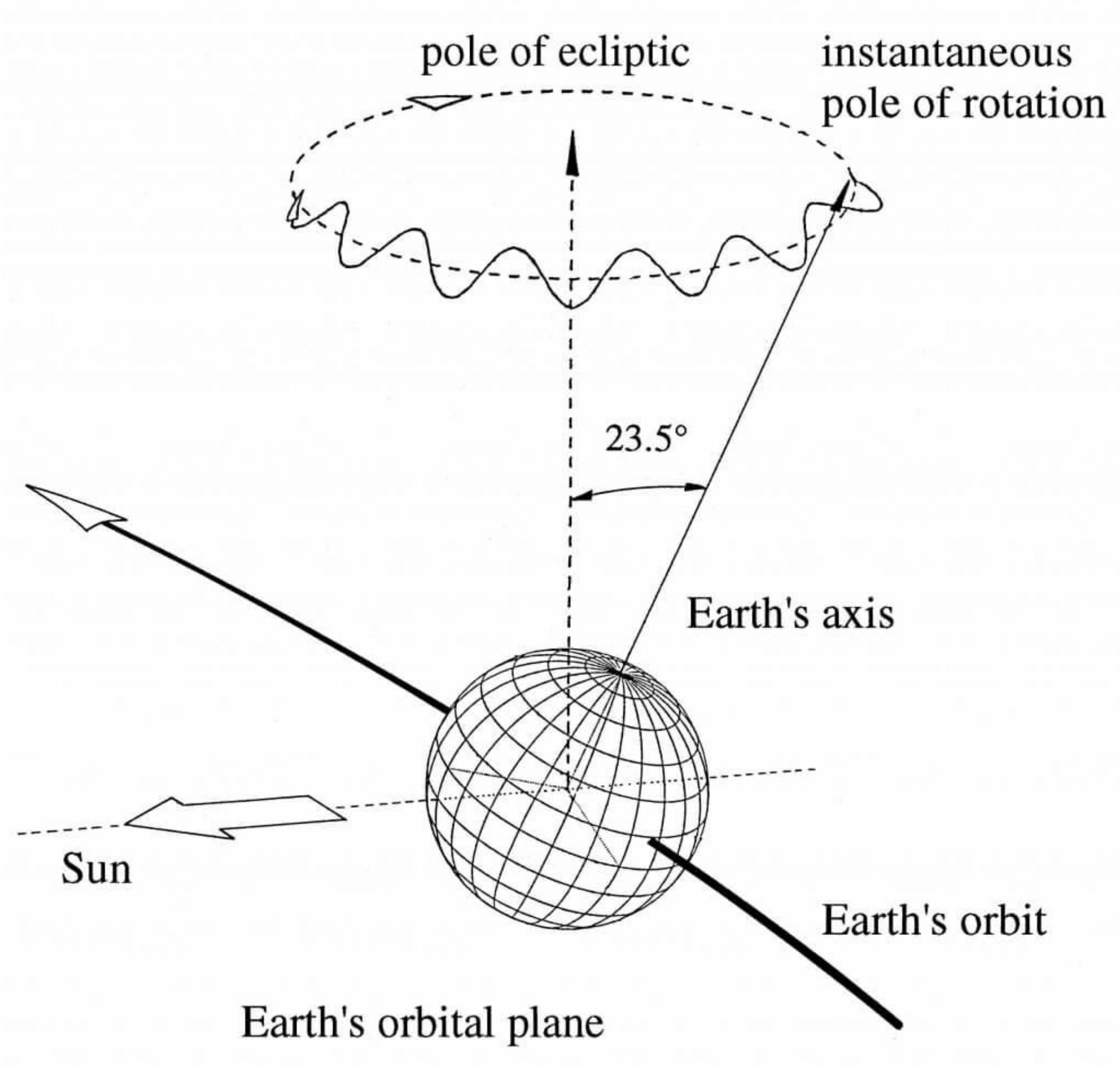
Terestrički referentni sistemi

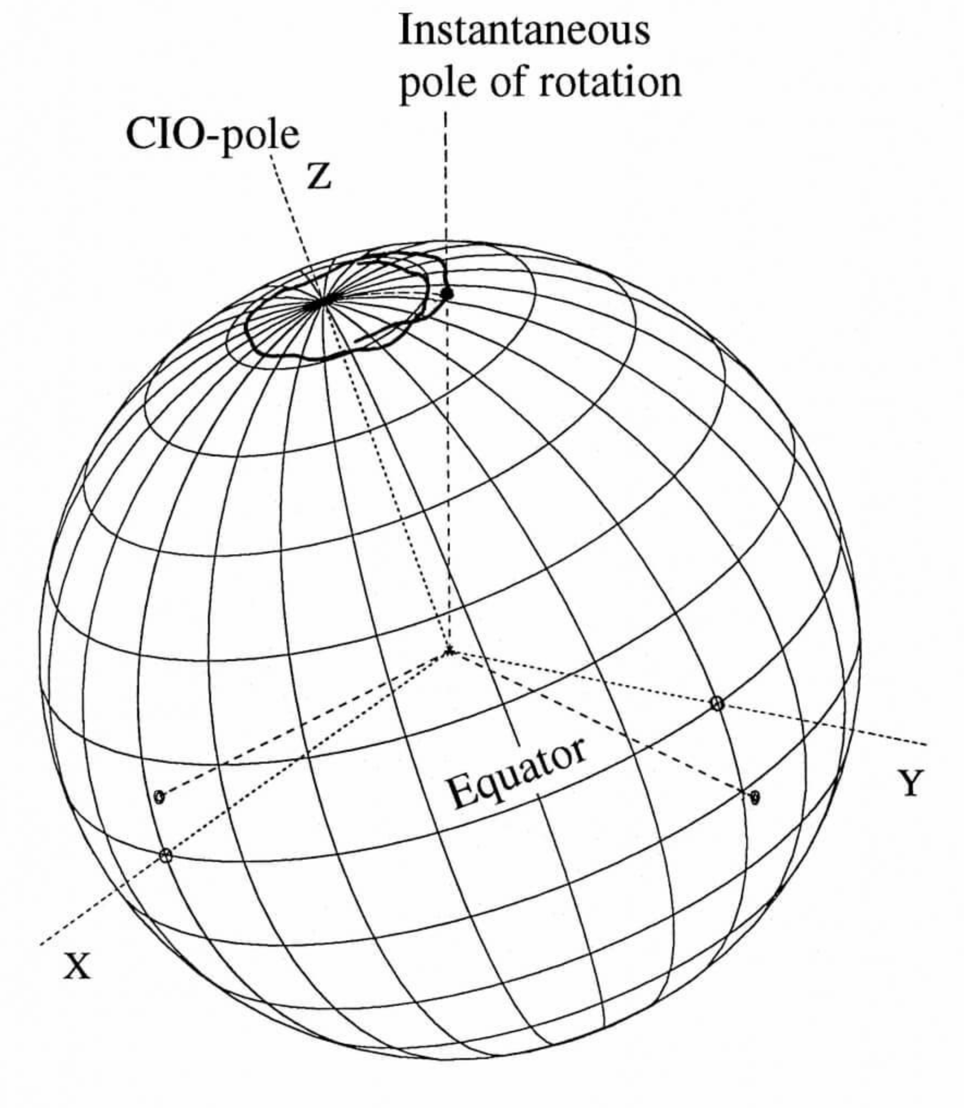


<u>Definicija referentnog sistema</u>:

- koordinatni početak je u centru mase Zemlje (uključujući i masu okeana i atmosfere),
- osa z_{T} se poklapa sa srednjom osom rotacije Zemlje za period od 1900. do 1905. godine, odnosno prolazi kroz CTP,
- osa x_{T} prolazi kroz tačku preseka CTP ekvatora i CTP početnog Griničkog meridijana,
- osa y_{T} kompletira pravougli sistem desne orijentacije.

VAŽNO: Precesija i nutacija i kretanje pola





Terestrički referentni sistemi

1988: Definisanje i održavanje referentnih sistema povereno je Međunarodnoj službi Zemljine rotacije (International Earth Rotation Service – IERS; od 2003. godine: International Earth Rotation and Reference Systems Service).

IERS rezultati su bazirani na modernim tehnikama kao što su SLR, VLBI, GNSS.

Konvencionalni terestrički referentni sistem koji se danas koristi u gotovo svim naučnim i praktičnim primenama, definisan od strane IERS-a, naziva se Međunarodni terestrički referentni sistem (**International Terrestrial Reference System** – **ITRS**), dok se njegova praktična realizacija naziva Međunarodni terestrički referentni okvir (**International Terrestrial Reference Frame** – **ITRF**).

Međunarodni terestrički referentni sistem

Definicija referentnog sistema:

- sistem je geocentričan, pri čemu je centar mase definisan za celu Zemlju uključujući okeane i atmosferu,
- jedinica dužine je SI metar, sa razmerom koja je definisana u kontekstu relativističke teorije gravitacije,
- orijentacija koordinatnih osa zadata je inicijalnom orijentacijom bivše Međunarodne službe vremena (Fr.: Bureau International de l'Heure – BIH) za epohu 1984.0,
- vremenska evolucija orijentacije koordinatnih osa definisana je tako da nema globalnih rezidualnih rotacija u odnosu na Zemljinu koru (No-Net-Rotation – NNR).

Međunarodni terestrički referentni okvir

Praktična realizacija ITRS-a → ITRF:

- uspostavljanje ITRF praktično se ostvaruje pomoću pravouglih koordinata i linearnih brzina za skup globalno raspoređenih opažačkih stanica opremljenih različitom satelitskom i kosmičkom mernom opremom,
- stanice su smeštene na litosfernim pločama koje se međusobno kreću, primena NNR kriterijuma u definiciji ITRS-a obezbeđuje stabilnost orijentacije koordinatnih osa u odnosu na Zemljinu koru,
- usled geodinamičkih procesa javlja se potreba za periodične realizacije ITRF:
  - rezultati se publikuju pod oznakom ITRFyy, gde yy predstavlja poslednju godinu čiji su podaci opažanja korišćeni,
  - aktuelna realizacija → ITRF2020.

Međunarodni terestrički referentni okvir

Realizacije ITRS-a:

- globalna realizacija – ITRF2020, ITRF2014,
- regionalne realizacije:
  - European Terrestrial Reference Frame (ETRFxx) pod pokroviteljstvom EUREF-a i mreže EPN (EUREF Permanent Network),
  - Geodetic Reference System for the Americas (SIRGAS).

Transformacija između sistema

Problem: Koordinate stanica na površi Zemlje izražavaju se u odnosu na terestrički referentni sistem, za razliku od satelitskih orbita koje su obično zadate u inercijalnom referentnom sistemu. Da bi se dužina između stanice i satelita izrazila u funkciji koordinata, one se moraju odnositi na jedinstveni koordinatni sistem.

Rešenje: Poznavanje izraza za **transformaciju** između inercijalnog i terestričkog referentnog sistema.

- sistemi imaju zajednički koordinatni početak,
- sistemi poseduju istu polarnost,
- definicija razmere pomenutih sistema je ista.

Transformacija između sistema

Transformacija između sistema se praktično svodi samo na rotaciju:

- matrica ukupne rotacije je praktično u funkciji tri ugla rotacije oko koordinatnih osa:

$$\vec{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{T}} = \mathbf{R}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}(\alpha, \beta, \gamma)\vec{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{I}}$$

- imajući u vidu posmatrane fenomene, matrica ukupne rotacije se razlaže na četiri komponente i prikazuje se u funkciji devet argumenata:

$$\vec{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{T}} = \mathbf{R}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{I}} = \mathbf{WSNP}\vec{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{I}}$$

  - $\mathbf{P}$ - matrica precesije,
  - $\mathbf{N}$ – matrica nutacije,
  - $\mathbf{S}$ – matrica Zemljine rotacije,
  - $\mathbf{W}$ – matrica kretanja pola.

Transformacija između sistema

Transformacija između sistema se praktično svodi samo na rotaciju:

$$\vec{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{T}} = \mathbf{R}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{I}} = \mathbf{WSNP}\vec{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{I}}$$

Svaka od navedenih komponenti je takođe sama po sebi rezultat više elementarnih rotacija, sa argumentima čije se vrednosti u konkretnom trenutku vremena računaju po komplikovanim algoritmima.

Detalji u vezi transformacije se mogu naći u oficijelnoj IERS periodičnoj publikaciji pod nazivom **IERS Conventions**.

Geodetski datum i datumska transformacija

U literaturi se često mogu pronaći i termini geodetski datum i datumska transformacija.

Definicija: „A **Geodetic Datum** is a set of parameters and constants that defines a coordinate system, including its origin and (where appropriate) its orientation and scale, in such a way as to make these accessible for geodetic applications.“

„The geodetic datum describes the orientation of any geodetic coordinate system with respect to the Earth’s body.“

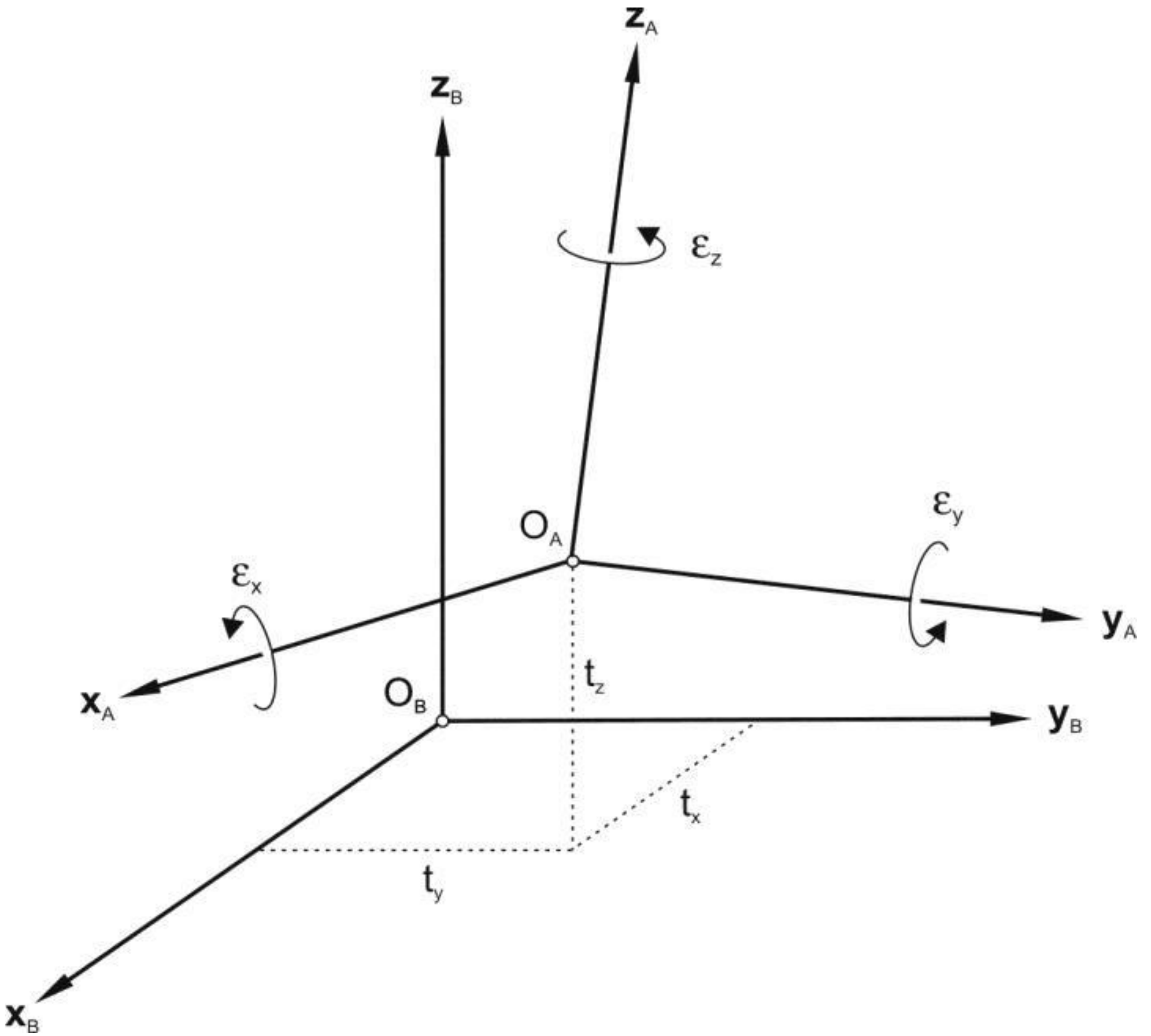
Transformacija između terestričkih referentnih sistema se uglavnom realizuje trodimenzionalnom transformacijom sličnosti koja se često u literaturi naziva **datumskom transformacijom**.

Geodetski datum i datumska transformacija

Pomenuta transformacija je najčešće u formi sedmoparametarske transformacije:

- tri parametara translacije po koordinatnim osama,
- tri parametara rotacije oko koordinatnih osa,
- jedan parametar razmere,

ili čak u formi 14-o parametarske transformacije, kada se pomenutim parametrima pridružuju parametri koji definišu promene parametara transformacije u vremenu.

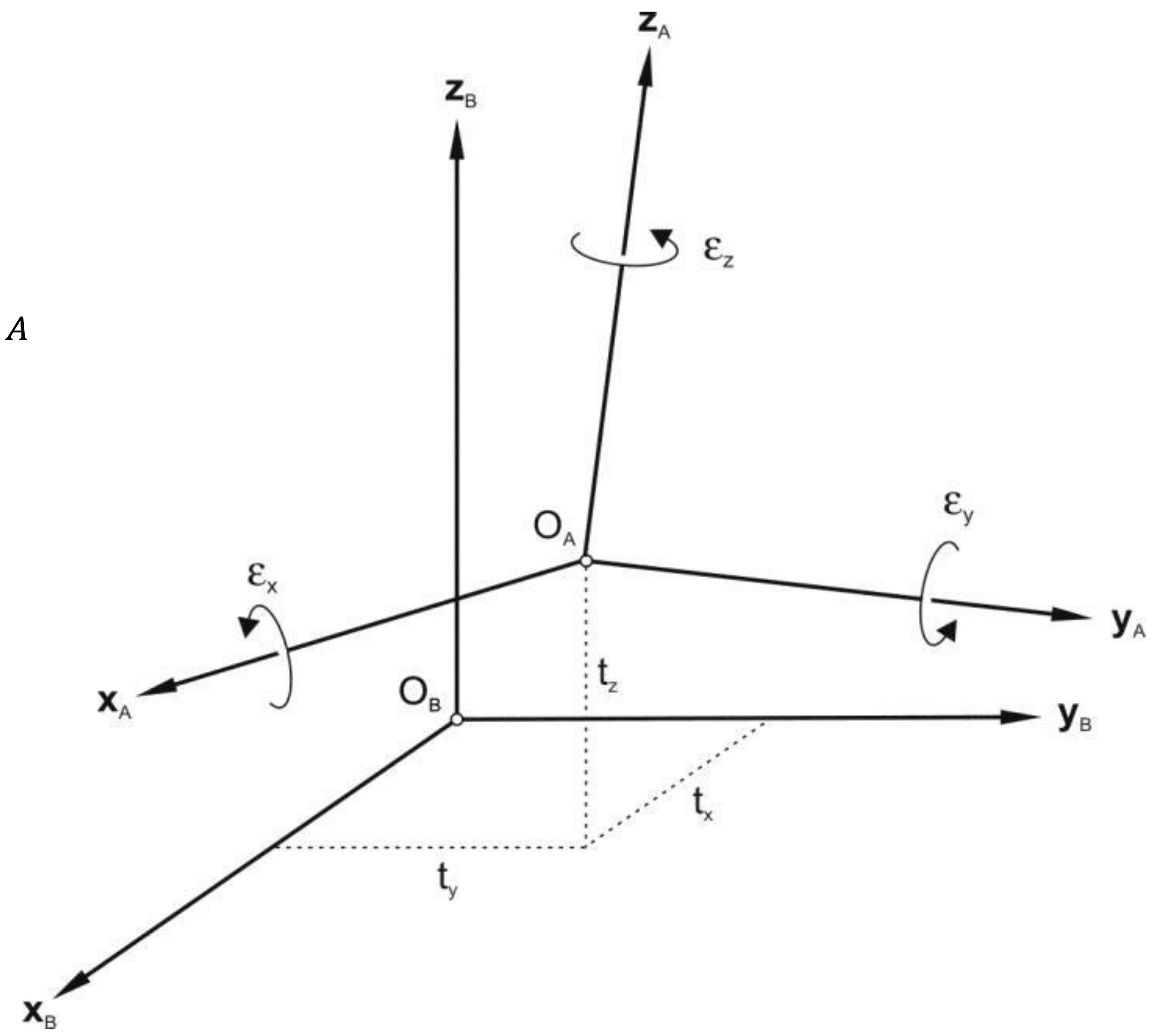


Geodetski datum i datumska transformacija

Datumska transformacija pravouglih koordinata iz sistema A u sistem B:

$$\begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}_{A,B} + (1 + dm)\mathbf{R}_1(\varepsilon_x)\mathbf{R}_2(\varepsilon_y)\mathbf{R}_3(\varepsilon_z)\begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix}_A$$

- tri parametara translacije - t_x, t_y, t_z,
- tri parametara rotacije - $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$,
- jedan parametar razmere - dm.



Geodetski datum i datumska transformacija

$$\begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}_{A,B} + (1 + dm)\mathbf{R}(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z) \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix}_A$$

gde je:

$$\mathbf{R}(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z) =$$

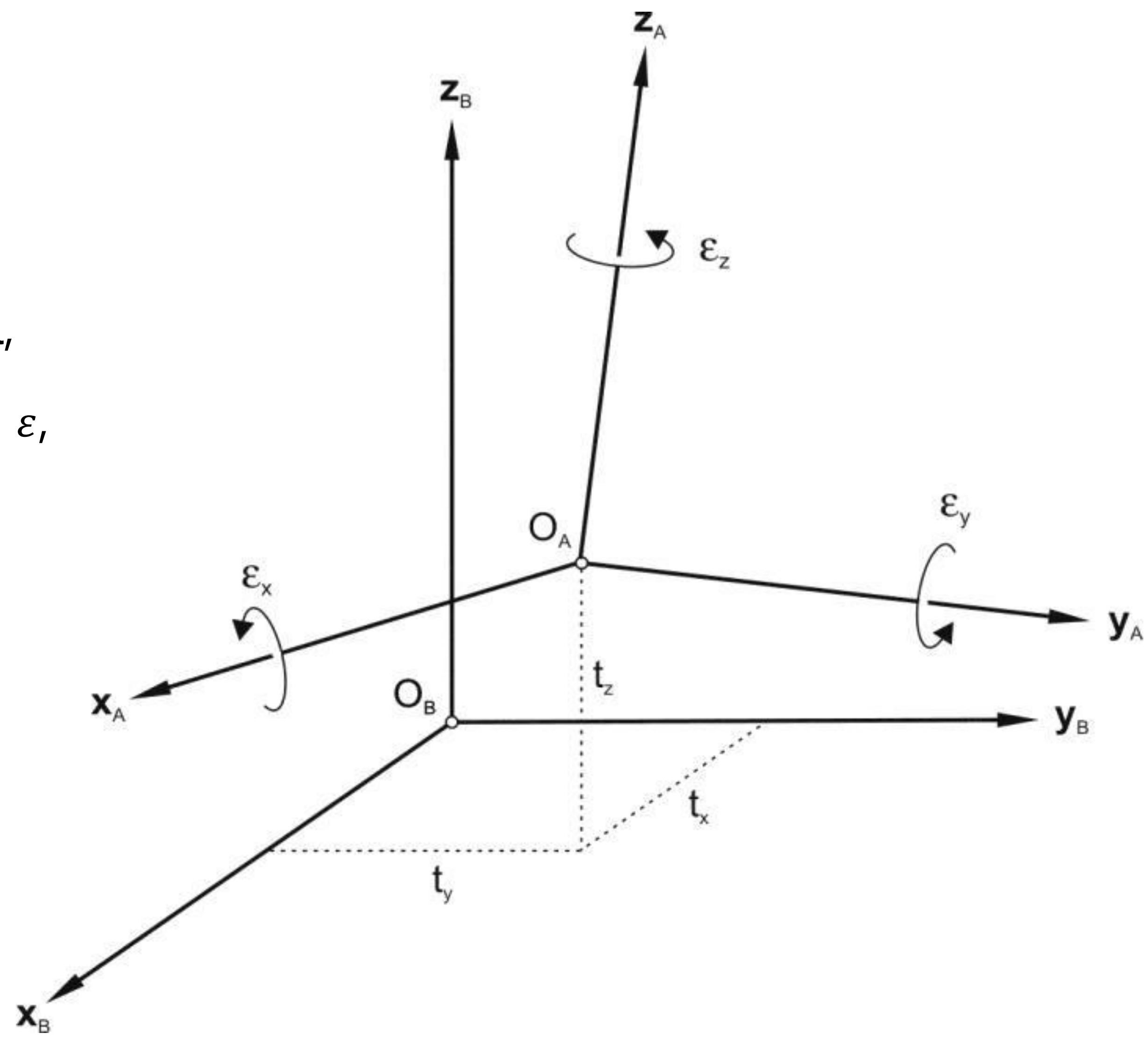
$$= \begin{bmatrix} \cos(\varepsilon_y)\cos(\varepsilon_z) & \cos(\varepsilon_y)\sin(\varepsilon_z) & -\sin(\varepsilon_y) \\ \sin(\varepsilon_x)\sin(\varepsilon_y)\cos(\varepsilon_z) - \cos(\varepsilon_x)\sin(\varepsilon_z) & \sin(\varepsilon_x)\sin(\varepsilon_y)\sin(\varepsilon_z) + \cos(\varepsilon_x)\cos(\varepsilon_z) & \sin(\varepsilon_x)\cos(\varepsilon_y) \\ \cos(\varepsilon_x)\sin(\varepsilon_y)\cos(\varepsilon_z) + \sin(\varepsilon_x)\sin(\varepsilon_z) & \cos(\varepsilon_x)\sin(\varepsilon_y)\sin(\varepsilon_z) - \sin(\varepsilon_x)\cos(\varepsilon_z) & \cos(\varepsilon_x)\cos(\varepsilon_y) \end{bmatrix}$$

Geodetski datum i datumska transformacija

$$\begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}_{A,B} + (1 + dm) \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix}_A$$

Napomena:

- uglovi rotacije $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ imaju male vrednosti,
- usvojene aproksimacije $\cos(\varepsilon) \approx 1$ i $\sin(\varepsilon) \approx \varepsilon$,
- proizvodi $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ su vrlo bliski nuli.



Geodetske (elipsoidne) koordinate

Problem: Iako su sa matematičke tačke gledišta veoma jednostavne, pravougle koordinate terestričkog referentnog sistema nisu najpogodnije za svakodnevnu upotrebu. Na osnovu njih se ne može lako proceniti gde se tačka nalazi u odnosu na Zemljino telo, i na kojoj je visini iznad njene površi.

Najjednostavnija matematička površ koja u dovoljnoj meri aproksimira pravi oblik Zemlje je obrtni elipsoid koji nastaje rotacijom elipse oko njene male ose. Obrtni elipsoid se u velikoj meri koristi kao referentna površ.

Površ koja najbolje aproksimira oblik Zemlje je troosni elipsoid, ali matematičke relacije postaju daleko složenije njegovom upotrebom.

Geodetske (elipsoidne) koordinate

Obrtni elipsoid pridružuje se terestričkom referentnom sistemu na sledeći način:

- geometrijski centar obrtnog elipsoida se poklapa sa koordinatnim početkom,
- mala poluosa obrtnog elipsoida poklapa se sa z osom.

Kada se na opisani način uspostavi tačna lokacija i orijentacija elipsoida u odnosu na telo Zemlje, obrtni elipsoid se naziva se **apsolutnim datumom**.

Geodetske (elipsoidne) koordinate

Za potpunu definiciju apsolutnog datuma preostaju još samo dva parametra:

- velika poluosa elipsoida - a,
- mala poluosa elipsoida - b.

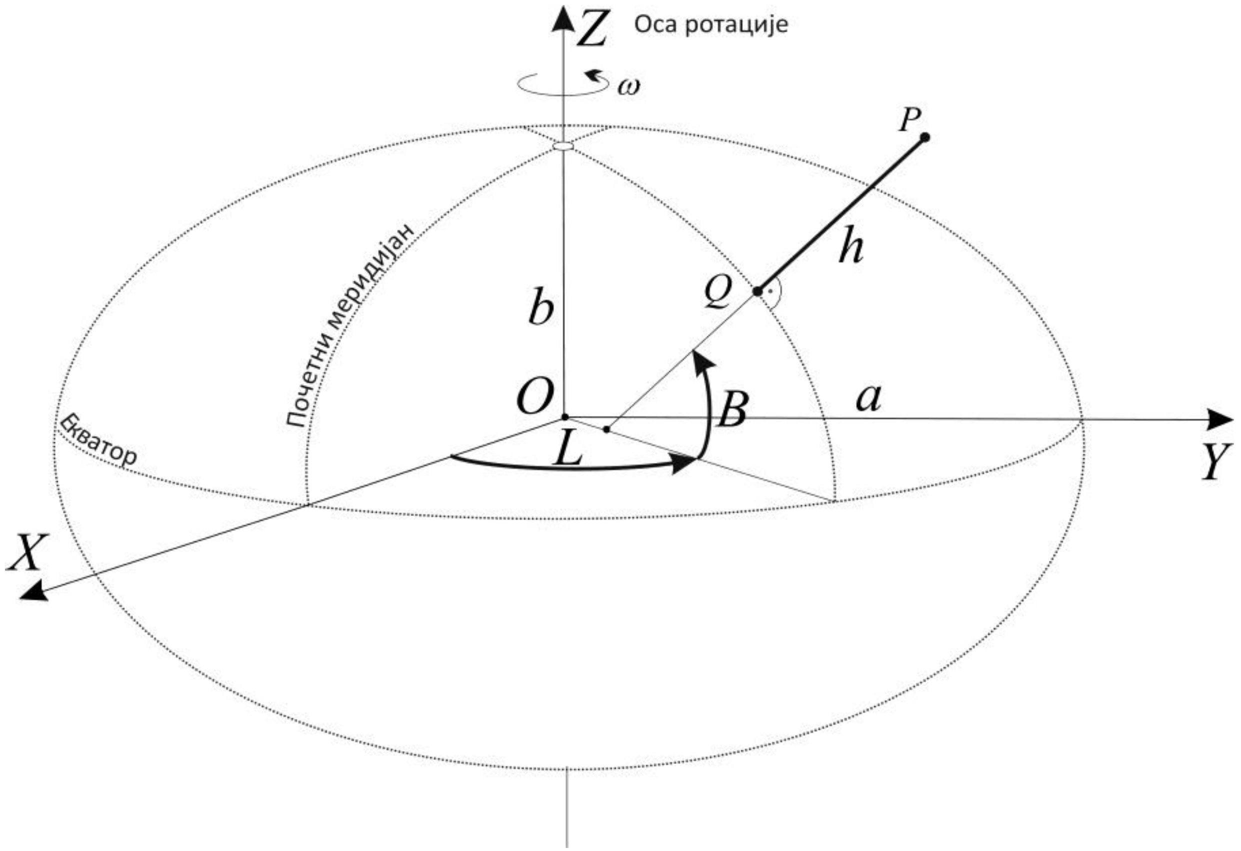
Često se umesto male poluose koriste sledeći izvedeni parametri:

- spljoštenost elipsoida - $f = (a - b)/a$,
- prvi numerički ekscentricitet elipsoida - $e = \sqrt{(a^2 - b^2)/a^2}$.

Geodetske (elipsoidne) koordinate

Geodetske (elipsoidne) koordinate definisane su na sledeći način:

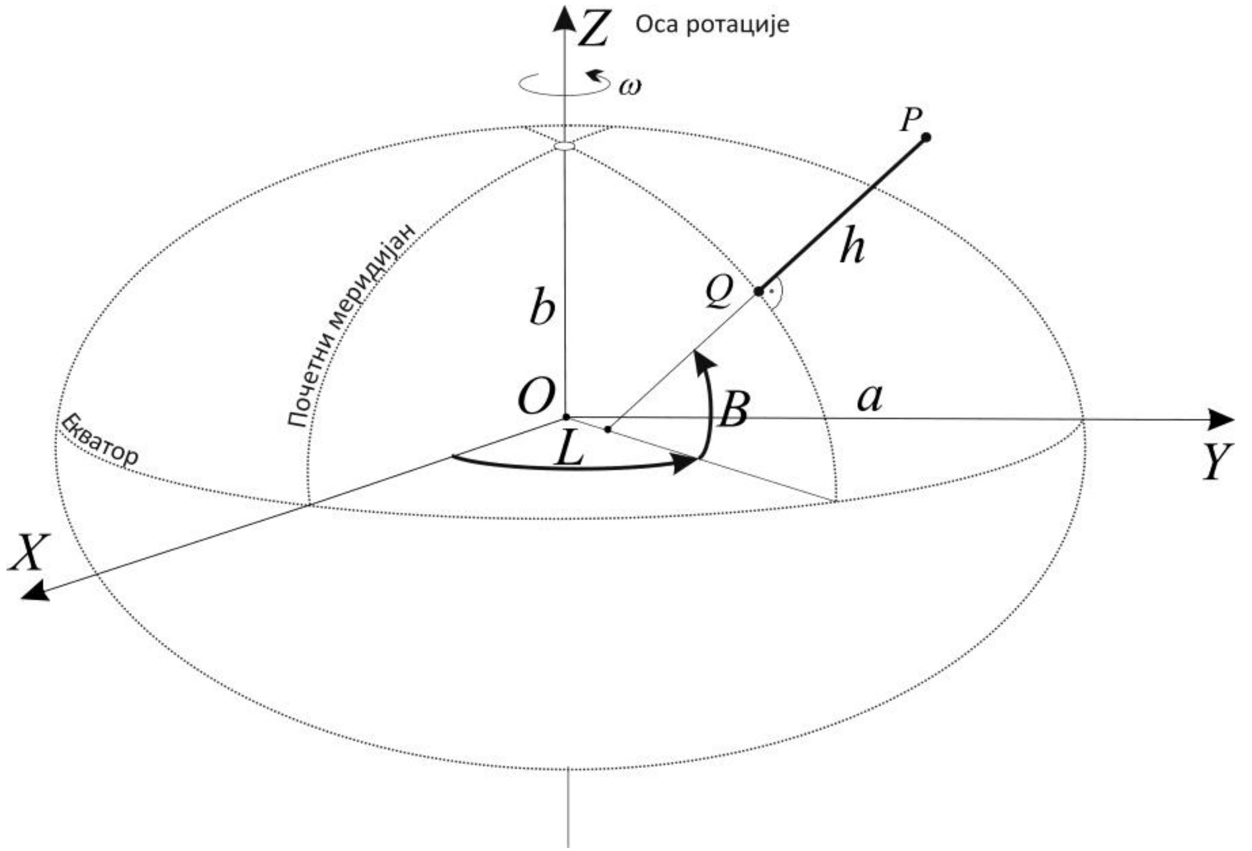
- geodetska latituda B je ugao u ravni meridijana posmatrane tačke između normala posmatrane tačke na površ elipsoida i ravni ekvatorom,
- geodetska longituda L je ugao u ravni ekvatora između ravni meridijana posmatrane tačke i ravni početnog meridijana,
- elipsoidna visina h je odsečak normale od posmatrane tačke do tačke prodora normale na površi elipsoida.



Geodetske (elipsoidne) koordinate

Geodetske (elipsoidne) koordinate definisane su na sledeći način:

- geodetska latituda B – od 0° do 90° severno i južno od ekvatora,
- geodetska longituda L – od 0° do 180° istočno i zapadno od početnog meridijana,
- elipsoidna visina h - pozitivna za tačke iznad elipsoida.



Geodetske (elipsoidne) koordinate

Veze između pravouglih i geodetskih koordinata definisane su sledećim relacijama:

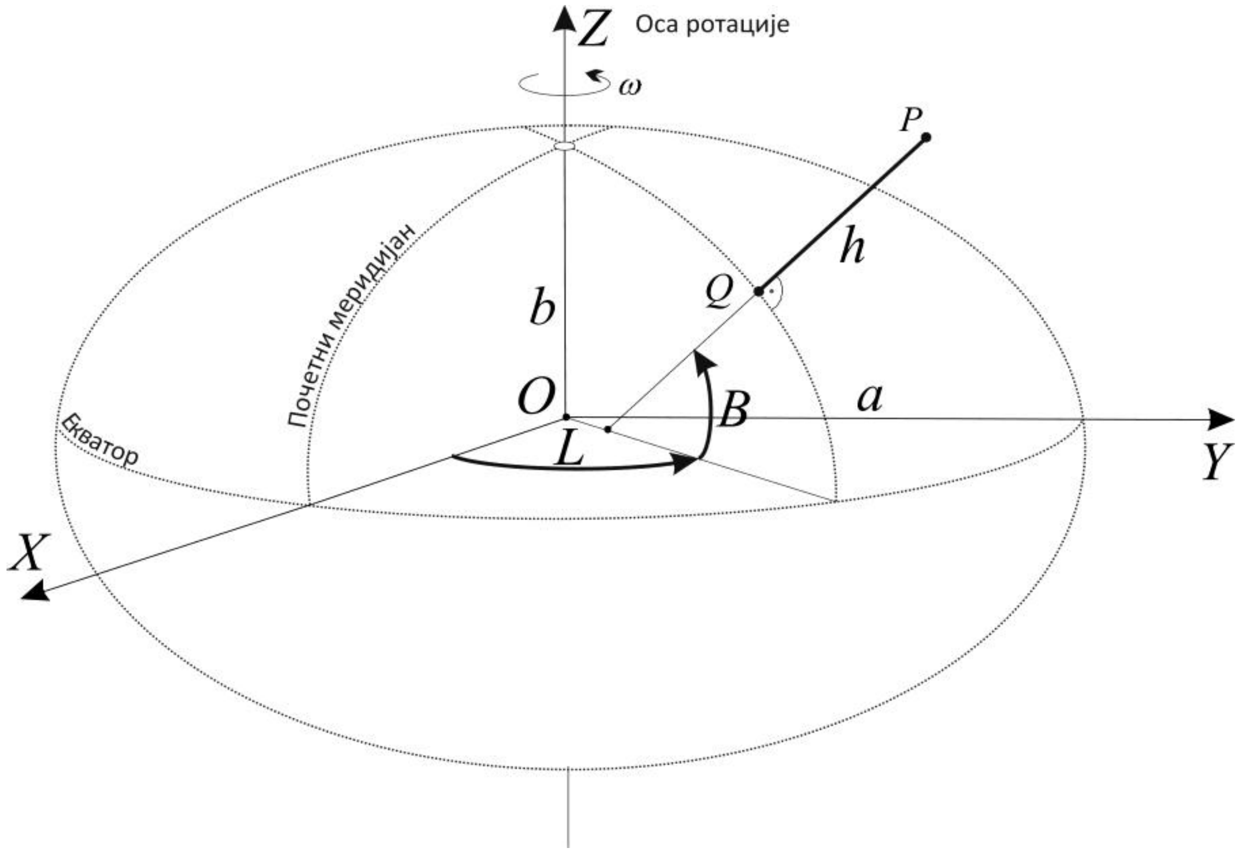
$$X = (N + h)\cos(B)\cos(L)$$

$$Y = (N + h)\cos(B)\sin(L)$$

$$Z = [N(1 - e^2) + h]\sin(B)$$

Napomena:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2(B)}}$$



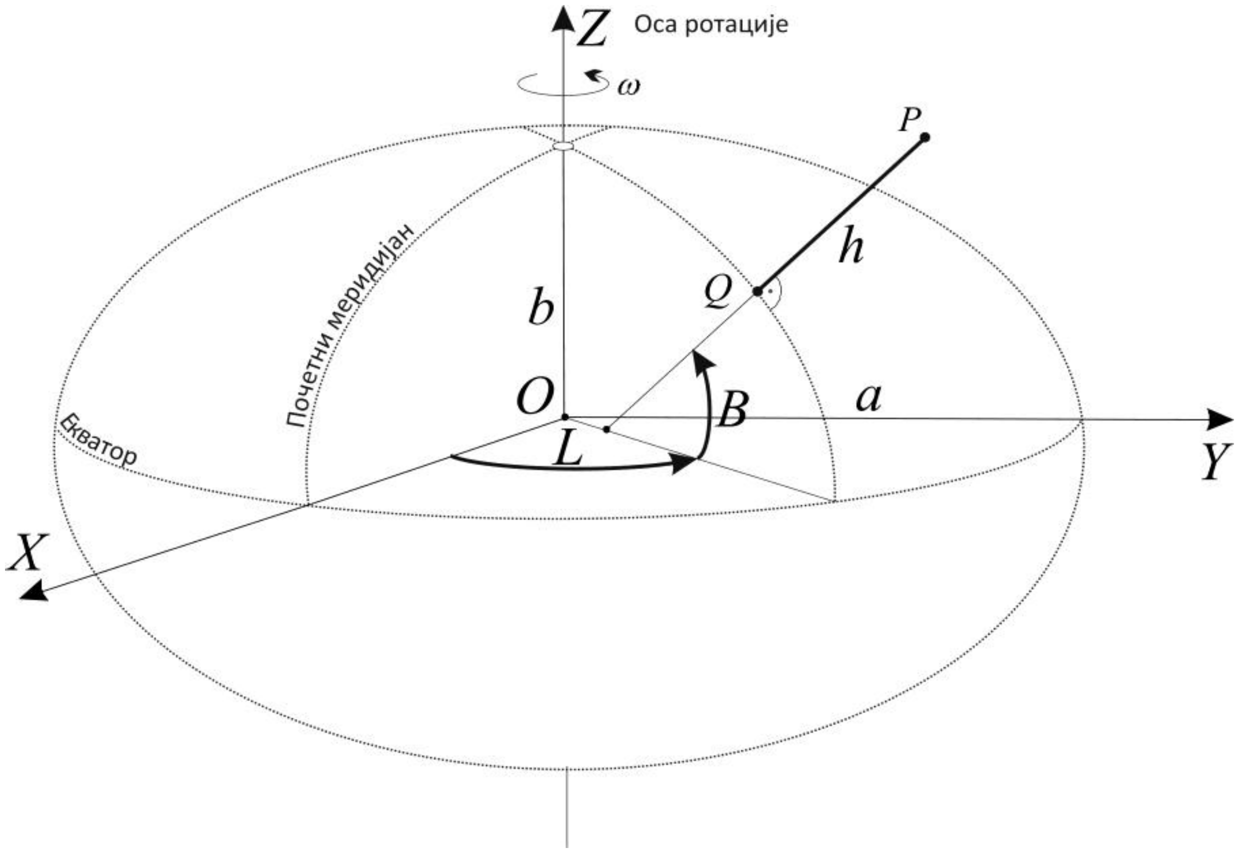
Geodetske (elipsoidne) koordinate

Veze između pravouglih i geodetskih koordinata definisane su sledećim relacijama:

$$B = \arctan\frac{Z + e'^2 b \sin^3(\theta)}{p - e^2 a\, cos^3(\theta)}$$

$$L = \arctan\frac{Y}{X}$$

$$h = \frac{p}{\cos(B)} - N$$



Napomena:

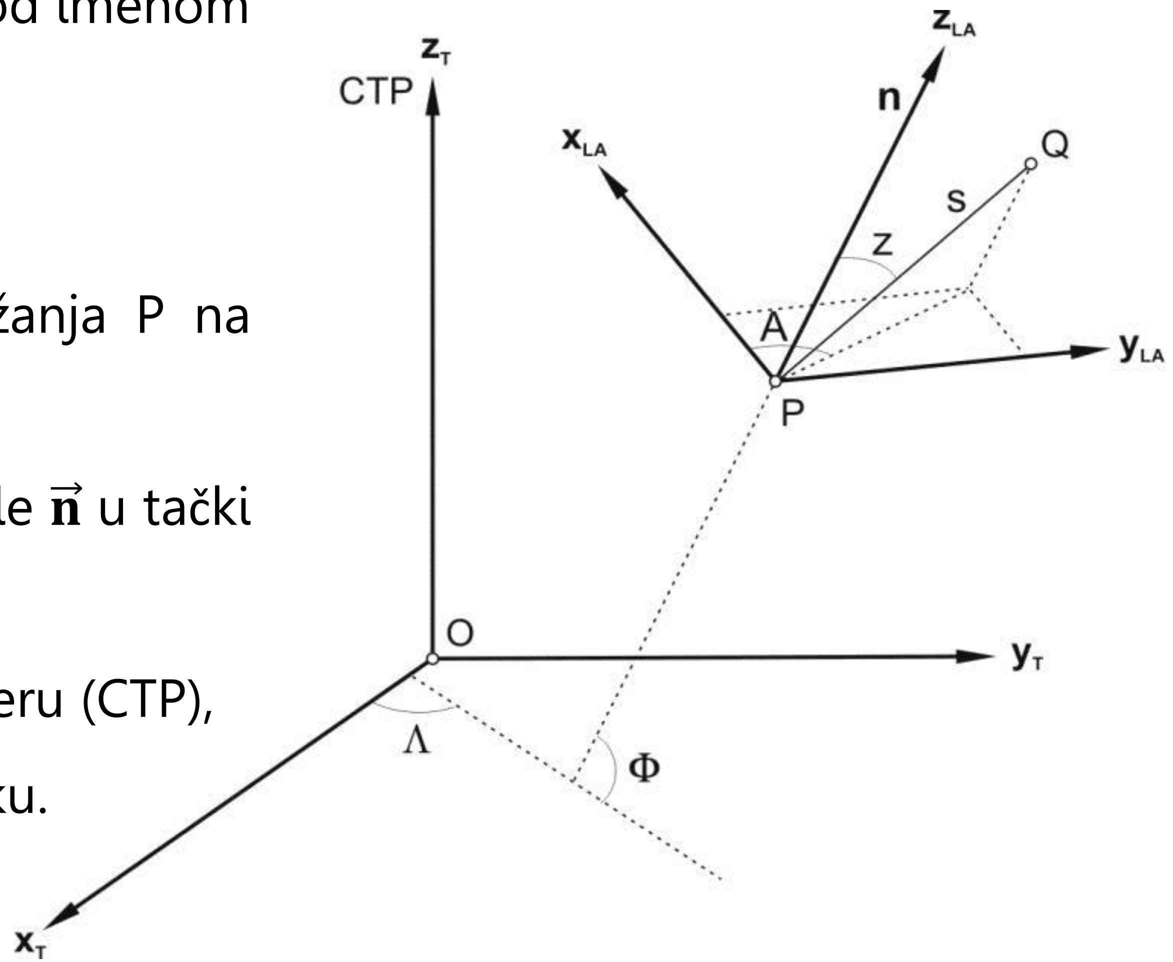
$$p = \sqrt{X^2 + Y^2}, \qquad \theta = \arctan\frac{Za}{pb}$$

Lokalni referentni sistemi

Gotovo sva terestrička geodetska merenja suštinski zavise od geometrije Zemljinog gravitacionog polja. Referentni sistem koji je najpogodniji za njihovo matematičko modeliranje oslanja se na pravac lokalne vertikale u tački opažanja, i poznat je pod imenom **lokalni astronomski referentni sistem**.

<u>Definicija sistema</u>:

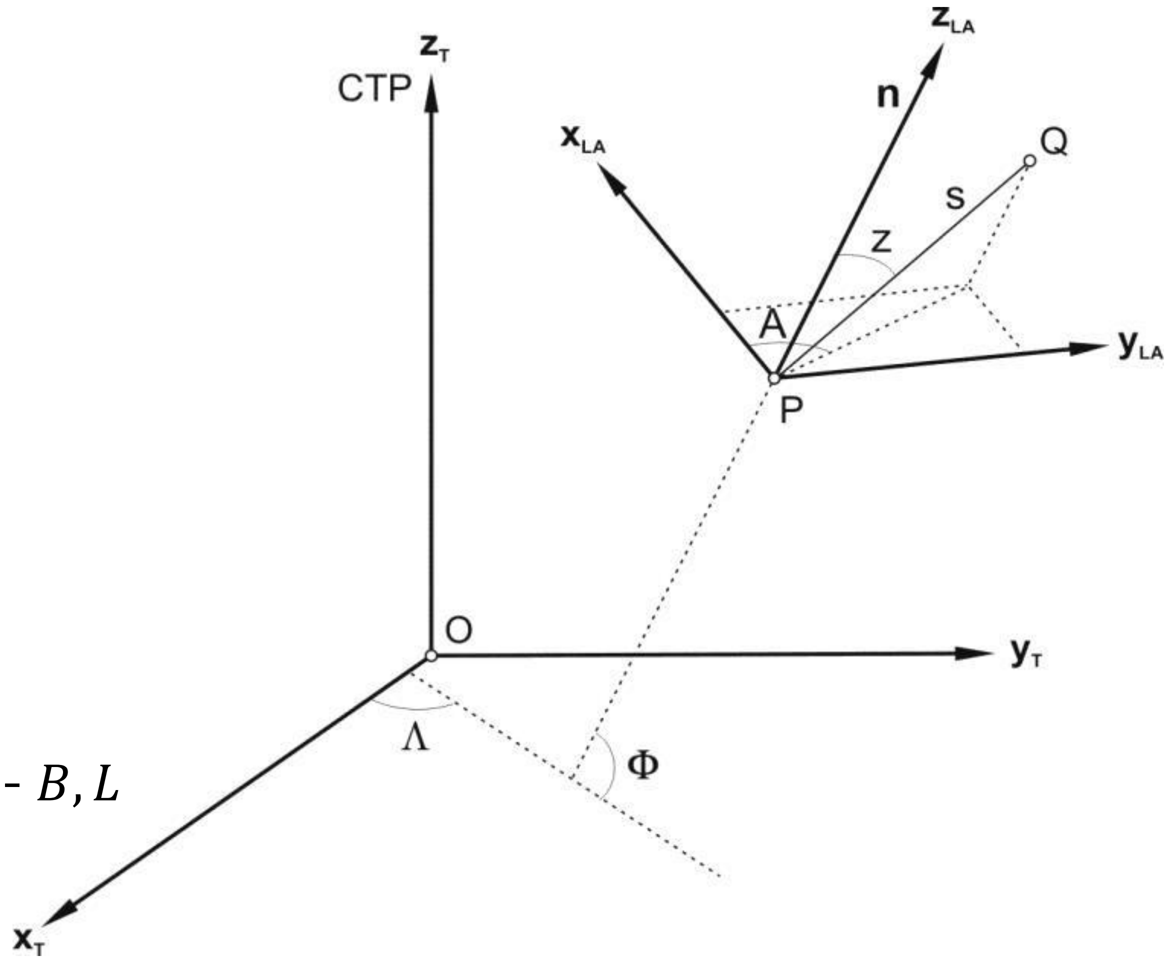
- koordinatni početak smešten je u tački opažanja P na površi Zemlje,
- osa z_{LA} zauzima pravac vektora lokalne vertikale $\vec{\mathbf{n}}$ u tački opažanja P,
- osa x_{LA} usmerena je prema astronomskom severu (CTP),
- osa y_{LA} usmerena je prema astronomskom istoku.



Lokalni referentni sistemi

Položaj proizvoljne tačke Q u istom koordinatnom sistemu može se definisati pravouglim ili polarnim koordinatama:

- pravougle koordinate - x_{LA}, y_{LA}, z_{LA},
- polarne koordinate - A, Z, S,
  - A – azimut,
  - Z – zenitno odstojanje,
  - S – prostorno rastojanje.



Napomene:

- prirodne (astronomske) koordinate - Φ, Λ
- geodetske (elipsoidne, geografske) koordinate - B, L

Lokalni referentni sistemi

Veze između polarnih i pravouglih koordinata definisane su sledećim relacijama:

$$x_{LA} = S\sin(Z)\cos(A)$$

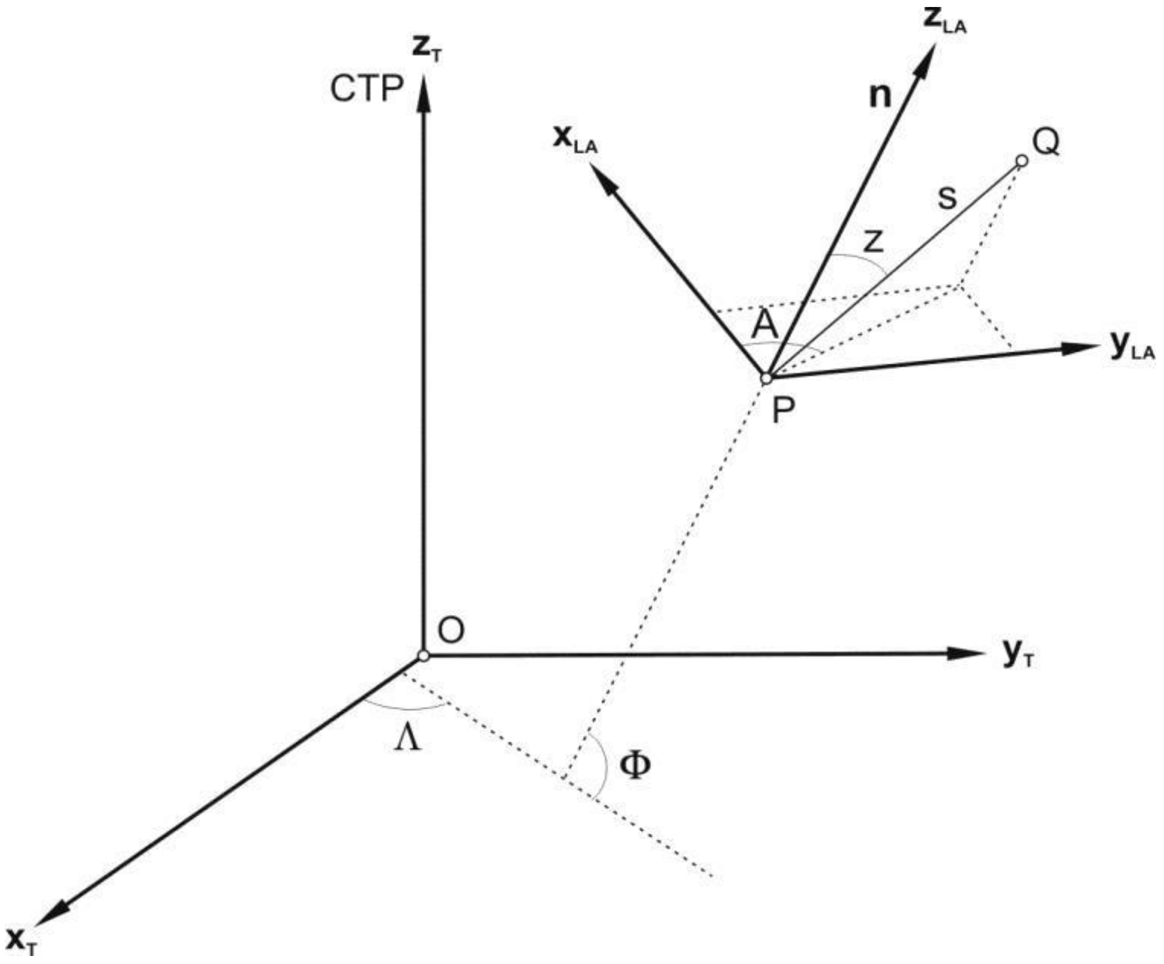
$$y_{LA} = S\sin(Z)\sin(A)$$

$$z_{LA} = \mathrm{Scos(Z)}$$

$$S = \sqrt{x_{LA}^2 + y_{LA}^2 + y_{LA}^2}$$

$$A = \arctan\frac{y_{LA}}{x_{LA}}$$

$$Z = \mathrm{arcctg}\frac{z_{LA}}{\sqrt{x_{LA}^2 + y_{LA}^2}}$$

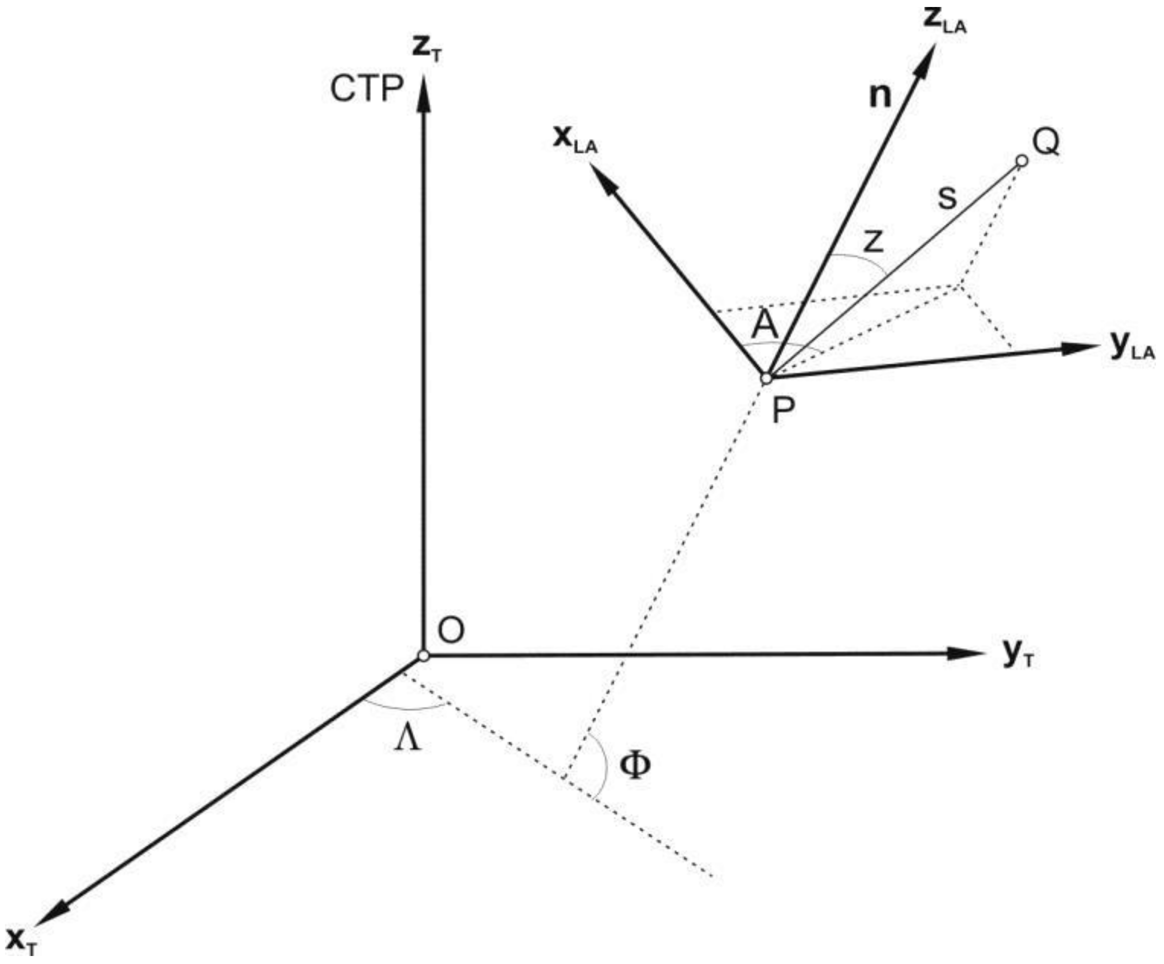


Lokalni referentni sistemi

Transformacija između lokalnog astronomskog sistema i terestričkog referentnog sistema:

- translacija sistema - $\vec{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{P,T}}$,
- rotacija sistema - $\mathbf{R}_3\mathbf{R}_2$,
- polarnost sistema - $\mathbf{S}_2$.

$$\vec{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{Q,T}} = \vec{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{P,T}} + \mathbf{R}_3(180° - \Lambda)\mathbf{R}_2(90° - \Phi)\mathbf{S}_2\vec{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{Q,LA}}$$



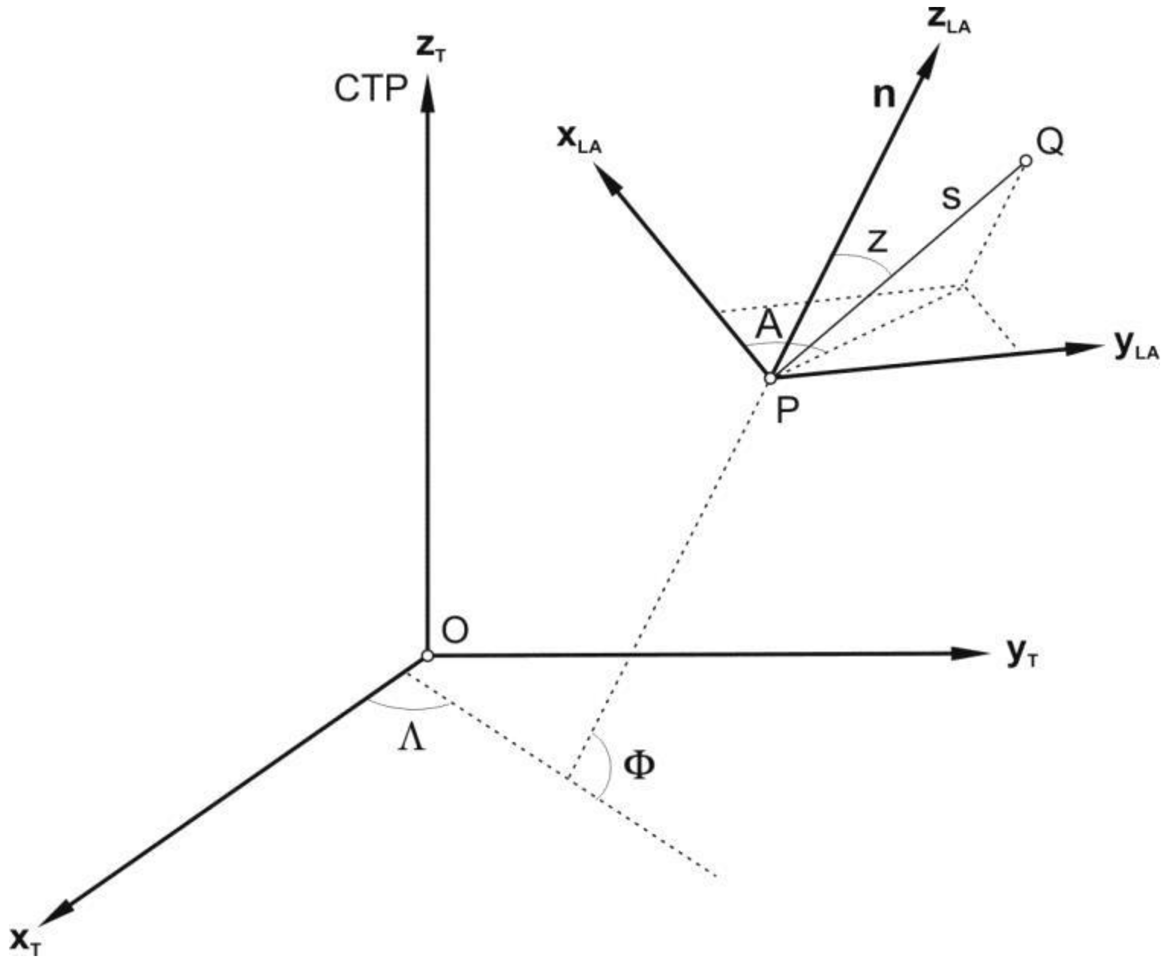
Lokalni referentni sistemi

Transformacija između lokalnog astronomskog sistema i terestričkog referentnog sistema:

- translacija sistema - $\vec{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{P,T}}$,
- rotacija sistema - $\mathbf{R}_3\mathbf{R}_2$,
- polarnost sistema - $\mathbf{S}_2$.

$$\vec{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{Q,T}} = \vec{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{P,T}} + \mathbf{A}\vec{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{Q,LA}}$$

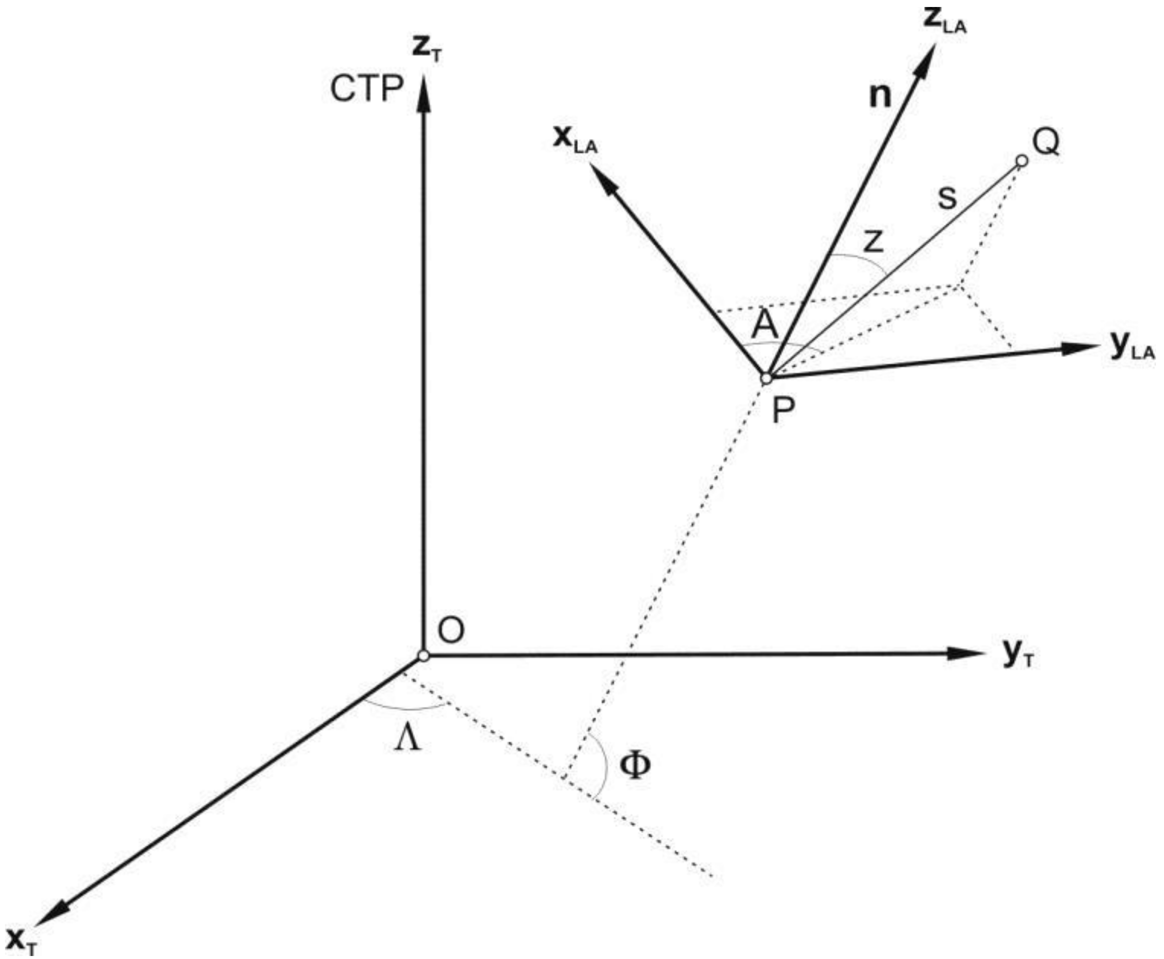
$$\mathbf{A} = \mathbf{R}_3(180° - \Lambda)\mathbf{R}_2(90° - \Phi)\mathbf{S}_2$$



Lokalni referentni sistemi

Transformacija između lokalnog astronomskog sistema i terestričkog referentnog sistema:

- translacija sistema - $\vec{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{P,T}}$,
- rotacija sistema - $\mathbf{R}_3\mathbf{R}_2$,
- polarnost sistema - $\mathbf{S}_2$.



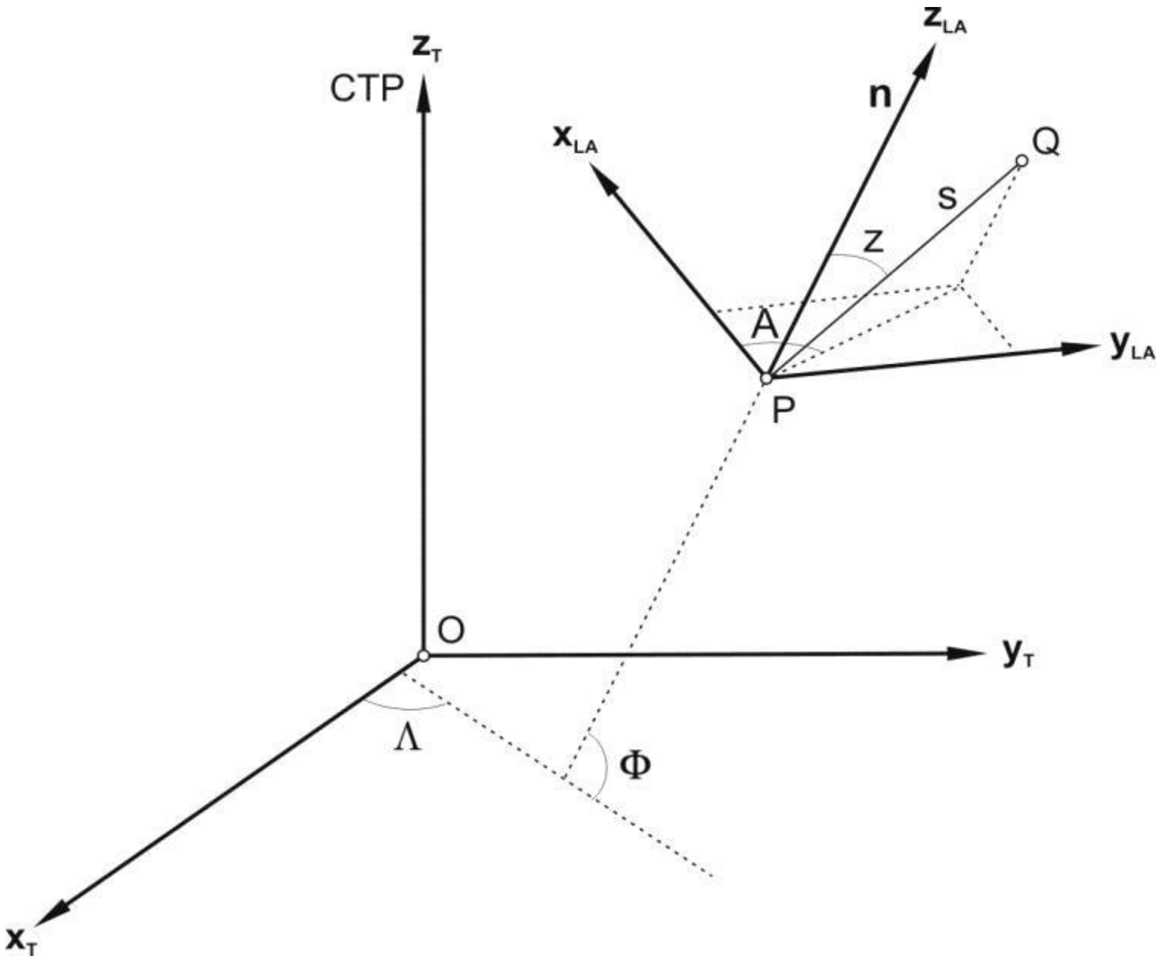
$$\vec{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{Q,LA}} = \mathbf{A}^{-1}\left(\vec{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{Q,T}} - \vec{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{P,T}}\right) = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left(\vec{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{Q,T}} - \vec{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{P,T}}\right)$$

Lokalni referentni sistemi

Transformacija između lokalnog astronomskog sistema i terestričkog referentnog sistema:

- translacija sistema - $\vec{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{P,T}}$,
- rotacija sistema - $\mathbf{R}_3\mathbf{R}_2$,
- polarnost sistema - $\mathbf{S}_2$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\sin(\Phi)\cos(\Lambda) & -\sin(\Lambda) & \cos(\Phi)\cos(\Lambda) \\ -\sin(\Phi)\sin(\Lambda) & \cos(\Lambda) & \cos(\Phi)\sin(\Lambda) \\ \cos(\Phi) & 0 & \sin(\Phi) \end{bmatrix}$$

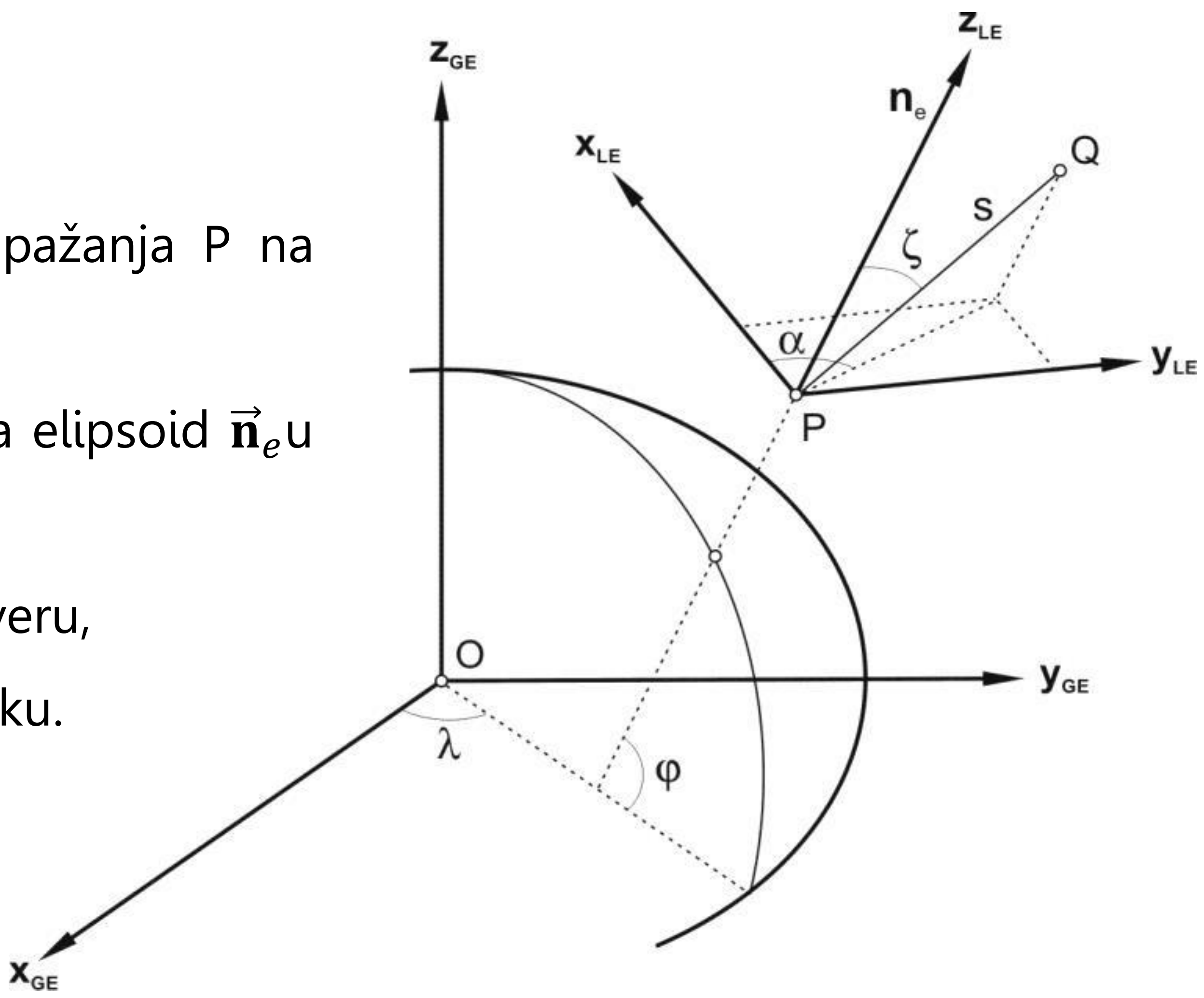


Lokalni referentni sistemi

Za razliku od prethodnog, sistem koji se svojom z osom oslanja na normalu na elipsoid $\vec{\mathbf{n}}_e$ naziva se **lokalni elipsoidni referentni sistem**.

Definicija sistema:

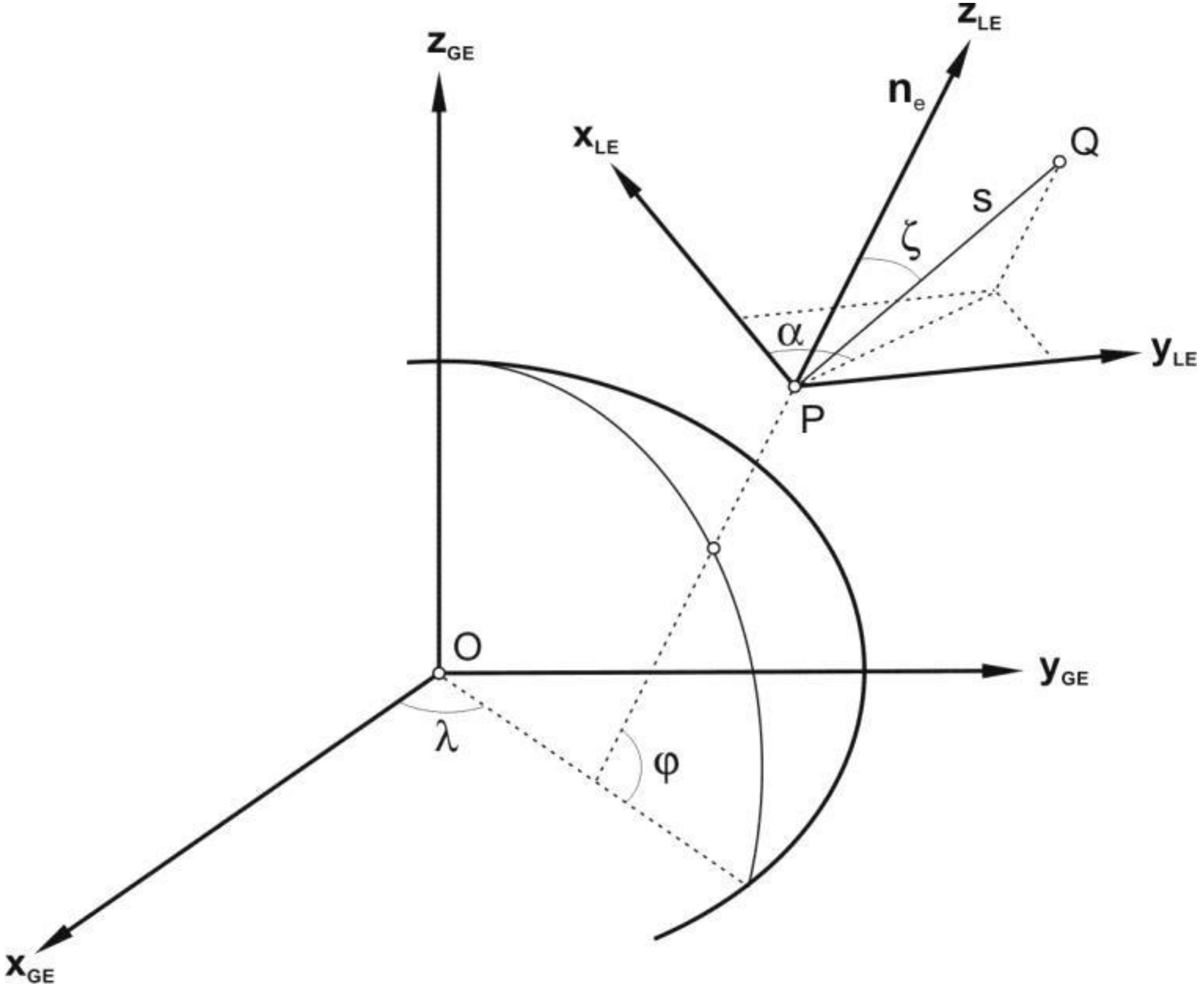
- koordinatni početak smešten je u tački opažanja P na površi Zemlje,
- osa z_{LE} zauzima pravac vektora normale na elipsoid $\vec{\mathbf{n}}_e$u tački opažanja P,
- osa x_{LE} usmerena je prema elipsoidnom severu,
- osa y_{LE} usmerena je prema elipsoidnom istoku.



Lokalni referentni sistemi

Za razliku od prethodnog, sistem koji se svojom z osom oslanja na normalu na elipsoid $\vec{\mathbf{n}}_e$ naziva se **lokalni elipsoidni referentni sistem**.

- pravougle koordinate - x_{LE}, y_{LE}, z_{LE},
- polarne koordinate - α, ζ, S,
  - α – elipsoidni azimut,
  - ζ – zenitno odstojanje,
  - S – prostorno rastojanje.



<u>Napomene</u>:

- geodetske koordinate - B, L ili φ, λ

Lokalni referentni sistemi

Veze između polarnih i pravouglih koordinata definisane su sledećim relacijama:

$$x_{LE} = S\sin(\zeta)\cos(\alpha)$$

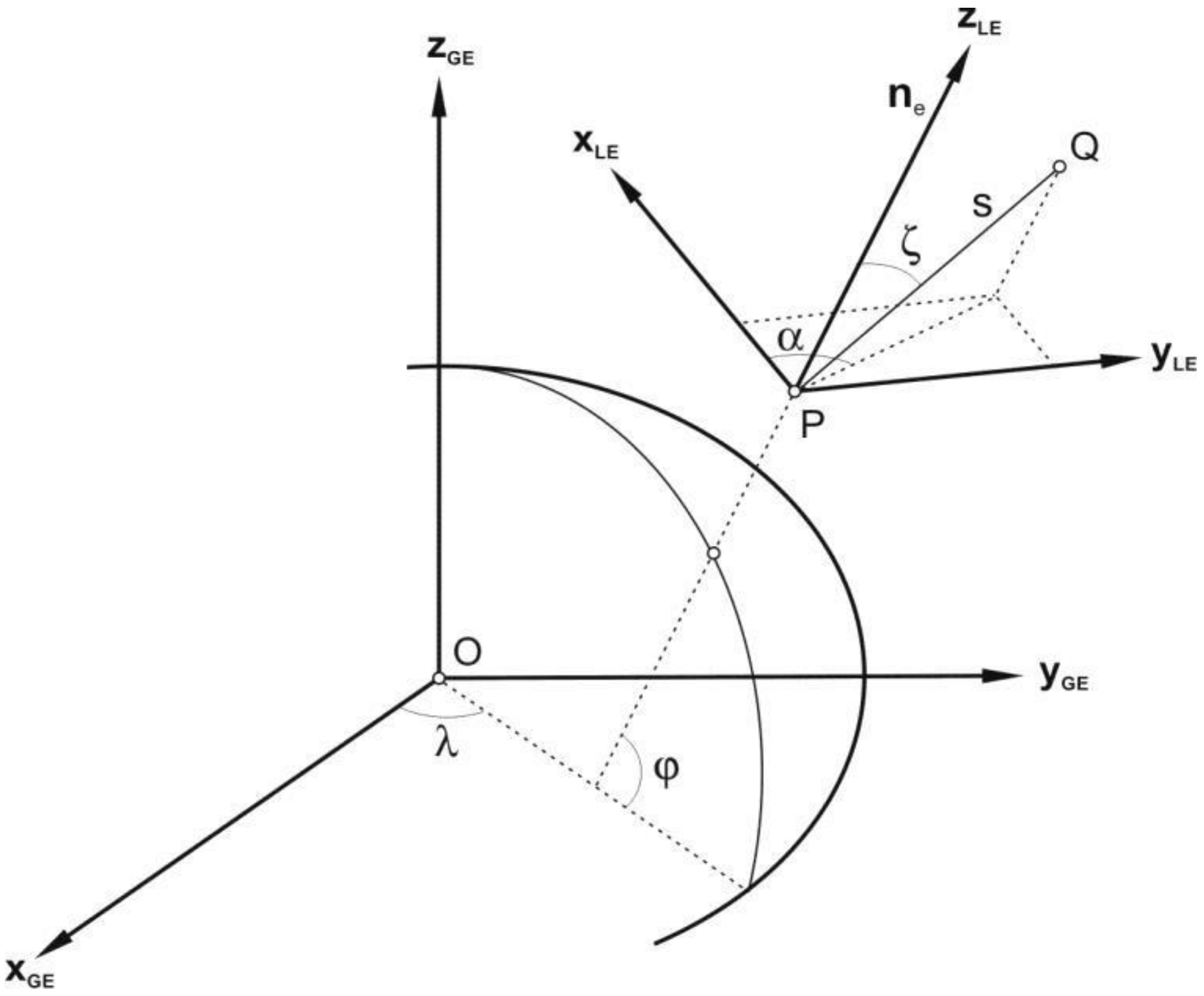
$$y_{LE} = S\sin(\zeta)\sin(\alpha)$$

$$z_{LE} = \mathrm{S}\cos(\zeta)$$

$$S = \sqrt{x_{LE}^2 + y_{LE}^2 + y_{LE}^2}$$

$$\alpha = \mathrm{arctan}\frac{y_{LE}}{x_{LE}}$$

$$\zeta = \mathrm{arcctg}\frac{z_{LE}}{\sqrt{x_{LE}^2 + y_{LE}^2}}$$



Lokalni referentni sistemi

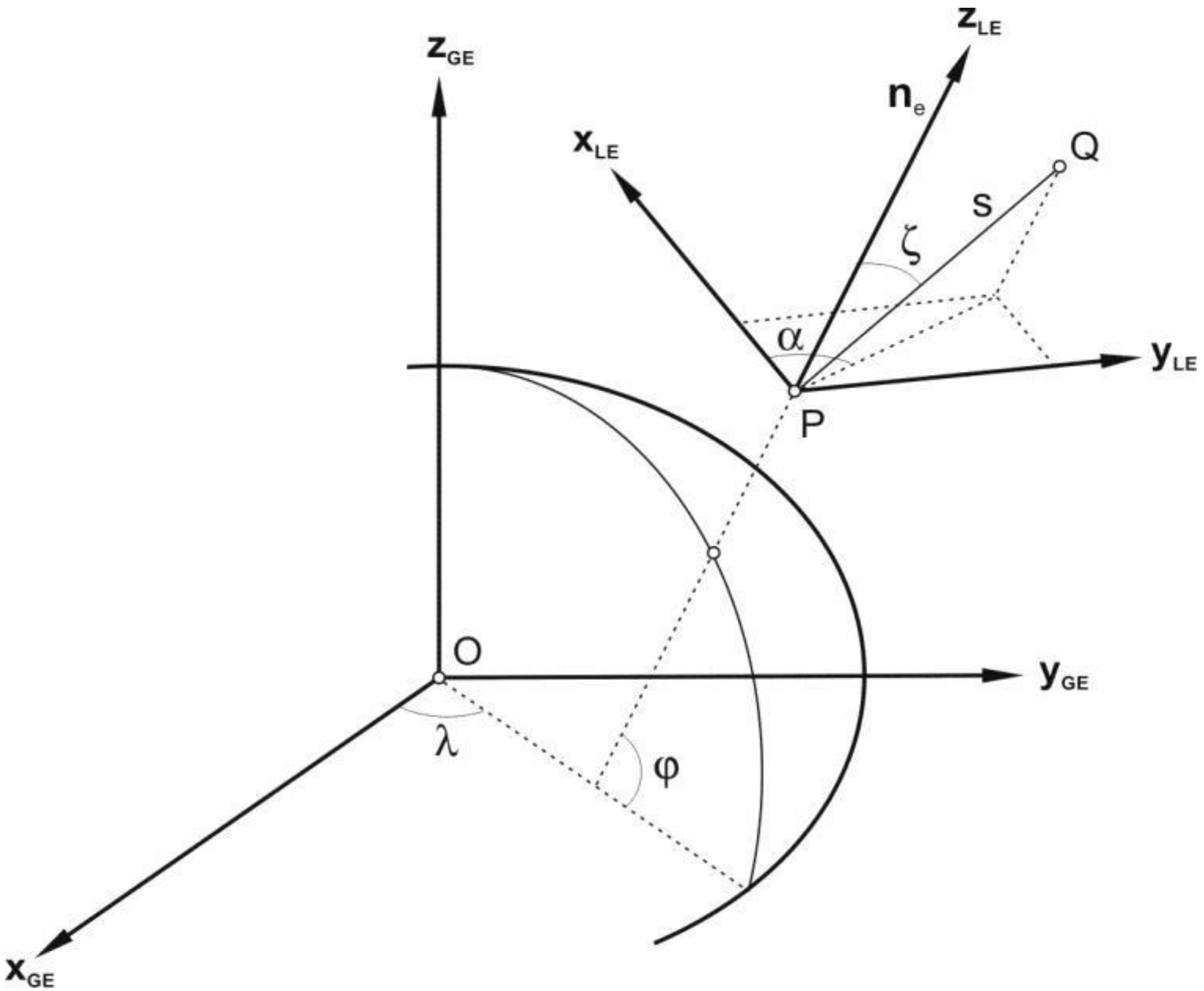
Transformacija između lokalnog elipsoidnog sistema i terestričkog referentnog sistema:

- translacija sistema - $\vec{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{P,T}}$,
- rotacija sistema - $\mathbf{R}_3\mathbf{R}_2$,
- polarnost sistema - $\mathbf{S}_2$.

$$\vec{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{Q,T}} = \vec{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{P,T}} + \mathbf{A}\vec{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{Q,LE}}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}_3(180° - \mathrm{L})\mathbf{R}_2(90° - \mathrm{B})\mathbf{S}_2$$

$$\vec{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{Q,LE}} = \mathbf{A}^{-1}\left(\vec{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{Q,T}} - \vec{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{P,T}}\right) = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left(\vec{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{Q,T}} - \vec{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{P,T}}\right)$$

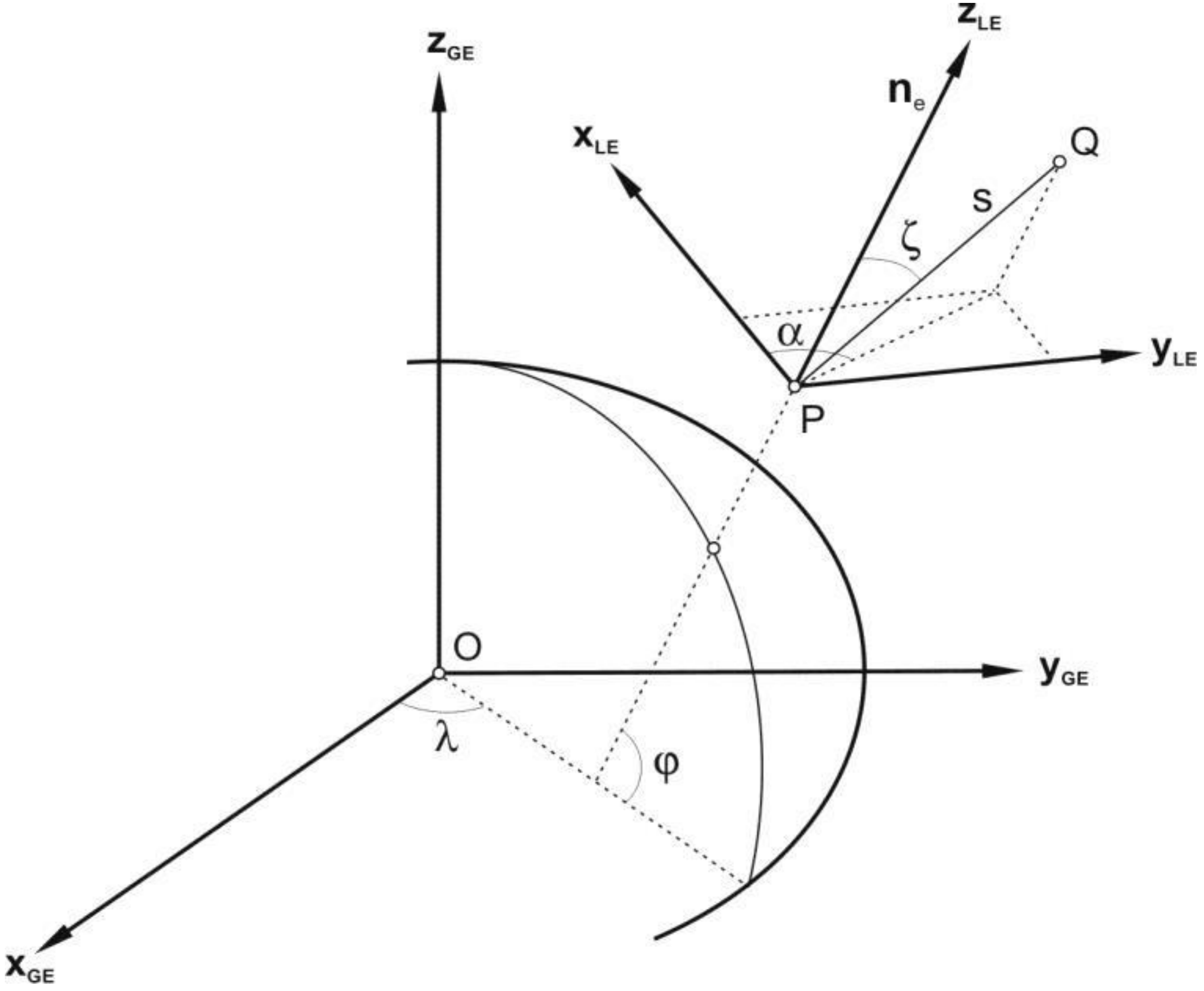


Lokalni referentni sistemi

Transformacija između lokalnog elipsoidnog sistema i terestričkog referentnog sistema:

- translacija sistema - $\vec{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{P,T}}$,
- rotacija sistema - $\mathbf{R}_3\mathbf{R}_2$,
- polarnost sistema - $\mathbf{S}_2$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\sin(\mathrm{B})\cos(\mathrm{L}) & -\sin(\mathrm{L}) & \cos(\mathrm{B})\cos(\mathrm{L}) \\ -\sin(\mathrm{B})\sin(\mathrm{L}) & \cos(\mathrm{L}) & \cos(\mathrm{B})\sin(\mathrm{L}) \\ \cos(\mathrm{B}) & 0 & \sin(\mathrm{B}) \end{bmatrix}$$



Referentni sistemi vremena

Metode satelitske geodezije suštinski zavise od sposobnosti mernog sistema da generiše precizno sinhronizovane signale i meri njihovo **vreme** puta.

Definisanje i održavanje precizne vremenske skale ima prema tome fundamentalni značaj za funkcionisanje satelitskih sistema.

- Astronomske vremenske skale:
  - Zvezdano vreme,
  - Solarno vreme,
  - Efemeridsko vreme.

- Atomske vremenske skale:
  - Atomsko vreme,
  - Koordinirano univerzalno vreme,
  - GPS vreme.

Zvezdano vreme

Zemlja načini jedan pun obrt oko svoje ose u odnosu na udaljene zvezde za period koji se zove **zvezdani dan**.

Definicija: Zvezdani dan se definiše kao interval vremena između dva uzastopna prolaza neke udaljene zvezde, ili ekvivalentno γ tačke, kroz meridijan opažača.

Ako se posmatra prolaz γ tačke kroz Grinički meridijan, ova vremenska skala naziva se **prividnim Griničkim zvezdanim vremenom** (Greenwich Apparent Sidereal Time - GAST).

Prividni zvezdani dan nije konstantne dužine zbog efekta precesije i nutacije.

Obračunavanjem efekta nutacije dobija se vremenska skala koja se zove **srednje Griničko zvezdano vreme** (Greenwich Mean Sidereal Time - GMST).

Solarno vreme

Zvezdano vreme nije pogodno kao praktična vremenska skala jer je celokupna ljudska aktivnost vezana za ritam smenjivanja dana i noći. Druga skala vremena koja je zasnovana na Zemljinoj rotaciji naziva se **solarnim vremenom**.

Definicija: Solarni dan se definiše kao interval vremena između dva uzastopna prolaza središta Sunca kroz Grinički meridijan.

Solarni dan nije konstantne dužine zbog toga što Zemlja obilazi oko Sunca promenljivom brzinom i zbog toga što osa rotacije Zemlje nije upravna na ravan ekliptike.

Uniformnija vremenska skala, pod nazivom **srednje solarno vreme** ili **univerzalno vreme** (UT), definiše se pomoću hipotetičke Zemlje čija je osa rotacije upravna na ravan ekliptike, i koja ima kružnu orbitu oko Sunca sa periodom obilaska kao realna Zemlja.

Univerzalno vreme popravljeno za efekat kretanja pola označava se kao **UT1**.

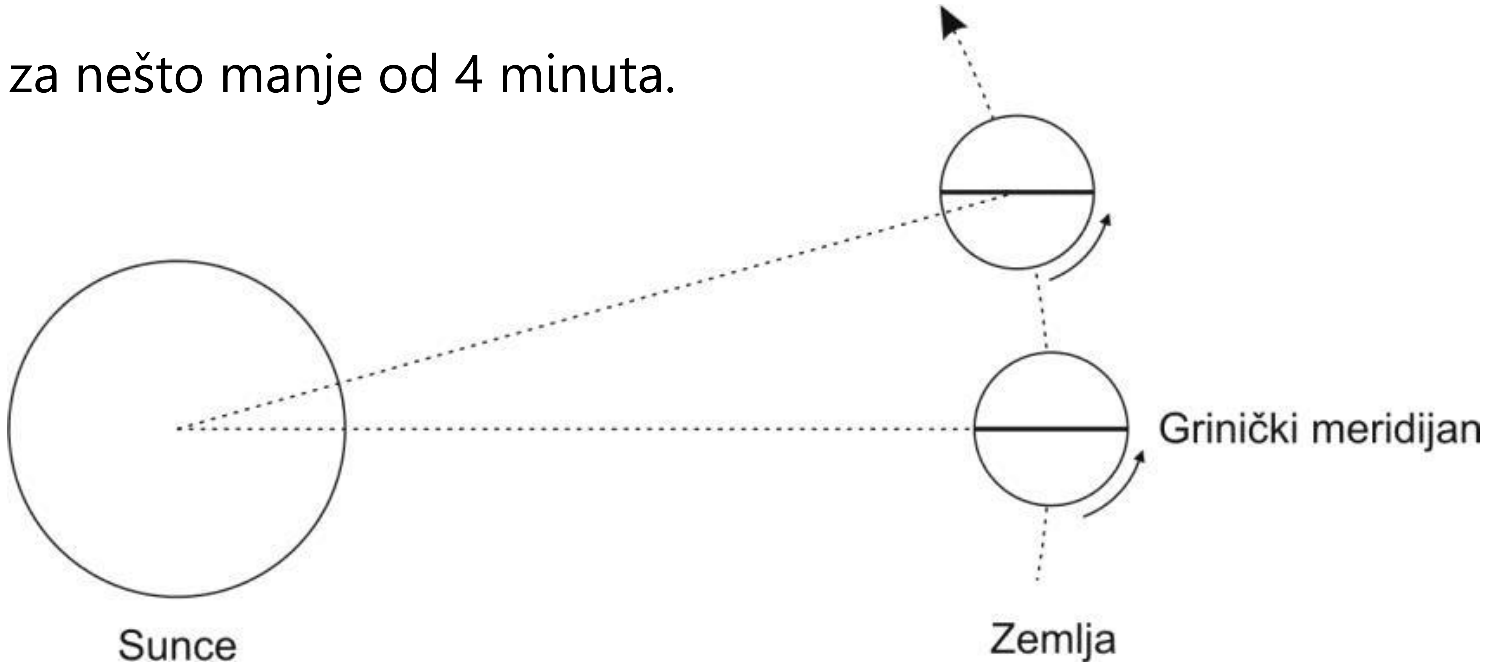
Solarno vreme

Solarno i zvezdano vreme nemaju jednaku **razmeru**.

Za vreme dok načini pun obrt u odnosu na inercijalni prostor, Zemlja istovremeno pređe deo puta na svojoj orbiti oko Sunca.

Da bi Sunce ponovo prošlo kroz Grinički meridijan, neophodno je da se Zemlja dodatno obrne za ugao koji je približno jednak 1/365.25 od punog ugla.

Srednji solarni dan je duži od zvezdanog za nešto manje od 4 minuta.



Efemeridsko vreme

Sekunda je sve do 1960. godine bila definisana kao 1/86 400 deo srednjeg solarnog dana.

Problem: Fluktuacije u brzini Zemljine rotacije.

Rešenje: **Efemeridsko vreme**.

Ova vremenska skala bazirala se na periodu obilaska Zemlje oko Sunca, što znači da je bila oslobođena uticaja kretanja Zemljine ose i brzine njene rotacije.

Efemeridska sekunda definisana je kao 1/31 556 925.9747 deo 1900. godine.

Efemeridsko vreme predstavljalo je realizaciju teorijske skale pod nazivom **terestričko dinamičko vreme** (Terrestrial Dynamical Time - TDT).

Međutim, efemeridsko vreme je isuviše nepraktično.

Zamenilo ga je mnogo tačnije i pogodnije **atomsko vreme**.

Atomsko vreme

Savremena definicija osnovnog vremenskog intervala od jedne sekunde zasnovana je na rezonantnoj frekvenciji atoma cezijuma.

Međunarodnim sporazumom iz 1967. godine, **sekunda** je definisana kao vreme trajanja 9 192 631 770 perioda zračenja koje odgovara prelazu između dva hiperfina nivoa stanja atoma cezijuma Cs-133.

Broj perioda odabran je tako da je ukupno trajanje jednako jednoj efemeridskoj sekundi. Kontinualna vremenska skala bazirana na ovoj definiciji zove se **atomsko vreme** (International Atomic Time - TAI).

Atomsko vreme predstavlja **realizaciju** terestričkog dinamičkog vremena, ali se od njega po definiciji razlikuje za konstantni iznos od 32.184 s:

$$\mathrm{TAI} = \mathrm{TDT} - 32.184\ \mathrm{s}$$

Atomsko vreme

TAI je veoma precizna i uniformna skala vremena koja je potpuno nezavisna od Zemljine rotacije i njenog kretanja oko Sunca.

Opisana nezavisnost je istovremeno i nedostatak, jer se atomsko vreme sve više razilazi sa UT vremenom prema kome se upravlja sva ljudska aktivnost.

Procenjeno je, na primer, da bi kroz 4000 godina razlika između TAI i UT dostigla čitavih 12 časova, tako da bi časovnici atomskog vremena pokazivali ponoć u trenutku kada je Sunce visoko na nebu.

Kompromis: **Koordinirano univerzalno vreme** (Coordinated Universal Time - UTC).

UTC sekunda definisana je na potpuno isti način kao kod atomskog vremena, ali je zato UTC skala postavljena tako da se podudara sa skalom UT1 vremena za epohu 01. januara 1958. godine u 00 časova.

$$1\ \mathrm{s}\ (\mathrm{UTC}) = 1\ \mathrm{s}\ (\mathrm{TAI})$$

Atomsko vreme

Od 1972. godine, UTC se sinhronizuje sa UT1 pomoću takozvane **prestupne sekunde**.

Kad god apsolutna vrednost razlike između UTC i UT1 dostigne 0.9 s, UTC skala se popravlja za 1 s.

Prestupna sekunda može u principu biti pozitivna ili negativna. Do sada je u praksi uvek imala pozitivan znak, što znači da minut sa prestupnom sekundom traje 61 s.

UTC je prema tome atomska vremenska skala, ali nije uniformna jer se povremenim uvođenjem prestupne sekunde održava bliskom UT vremenu.

Veza između TAI i UTC skale:

$$\mathrm{TAI} = \mathrm{UTC} + n \cdot 1\ s$$

Atomsko vreme

Prestupna sekunda se po međunarodnom sporazumu primenjuje u junu ili decembru, a ako to nije moguće onda u martu ili septembru.

Opažanja iz poslednjih 100 godina sugerišu opšti trend usporavanja Zemljine rotacije u iznosu od 1 s godišnje, ali to ne znači da se prestupna sekunda uvodi svake godine!

UTC je rezultat međunarodne saradnje jer se naknadno generiše na osnovu vremena koje održava preko 250 cezijumskih časovnika i vodoničnih mazera u 65 laboratorija širom sveta. Prikupljanje podataka, njihovu obradu i generisanje TAI i UTC vremena vrši Međunarodni biro za tegove i mere (Fr.: Bureau International des Poids et Mesures - BIPM).

Za određivanje prestupne sekunde zadužena je služba IERS.

GPS vremenska skala

GPS vremenska skala (Global Positioning System Time - GPST) takođe predstavlja vreme zasnovano na atomskoj skali vremena kao i UTC.

Dve važne razlike:

1. UTC vreme se generiše naknadno, dok se kod GPS vremena obrada i ocenjivanje vrše u realnom vremenu.
2. GPST je uniformna vremenska skala koja ne sadrži prestupne sekunde.

GPS vreme je definisano na osnovu merenja skupa cezijumskih i rubidijumskih časovnika na stanicama za praćenje i u samim GPS satelitima.

GPS vremenska skala

Skala je izjednačena sa UTC vremenom u **standardnoj GPS epohi** koja predstavlja ponoć između 5. i 6. januara 1980. godine.

Broj prestupnih sekundi je u standardnoj epohi iznosio $n = 19$:

$$\mathrm{TAI} = \mathrm{GPST} + 19\ \mathrm{s}$$

Kontrolni GPS segment neprekidno održava GPS vreme u granicama od 1 μs u odnosu na UTC vremensku skalu:

$$\mathrm{GPST} = \mathrm{UTC} + n \cdot 1\ \mathrm{s} + \delta$$

gde δ označava kvalitet kojim se GPS vreme održava u okviru UTC (oko 10 ns).

Referentni sistemi vremena - rekapitulacija

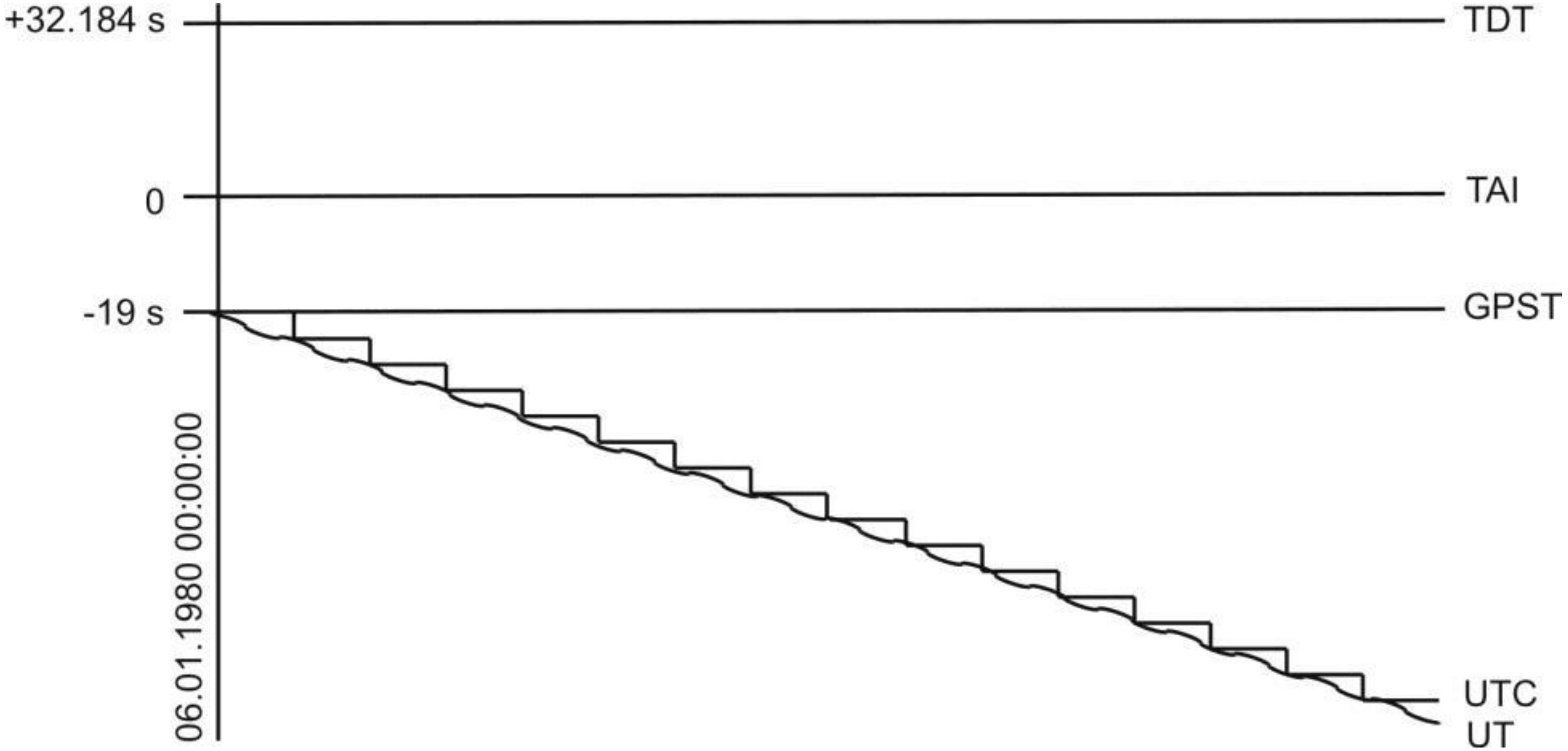
Astronomske vremenske skale:

- TDT - *Terrestrial Dynamical Time*,
- UT - *Universal Time*,
- UT1.

Atomske vremenske skale:

- TAI - *International Atomic Time*,
- UTC - *Coordinated Universal Time*,
- GPST - *Global Positioning System Time*.

Referentni sistemi vremena - rekapitulacija



Referentni sistemi vremena - rekapitulacija

Važne relacije:

- TAI - *International Atomic Time*

$$\mathrm{TAI} = \mathrm{TDT} - 32.184\ \mathrm{s}$$

- GPST - *Global Positioning System Time*

$$\mathrm{GPST} = \mathrm{TAI} - 19\ \mathrm{s}$$

$$\mathrm{GPST} = \mathrm{UTC} + n \cdot 1\ \mathrm{s} + \delta$$

- UTC - *Coordinated Universal Time*

$$1\ \mathrm{s}\ (\mathrm{UTC}) = 1\ \mathrm{s}\ (\mathrm{TAI})$$

$$\mathrm{TAI} = \mathrm{UTC} + n \cdot 1\ \mathrm{s}$$

Referentni sistemi vremena - rekapitulacija

Podaci za 2023. godinu:

- TAI - *International Atomic Time*

$$\mathrm{TAI} = \mathrm{UTC} + 37\ \mathrm{s}$$

- GPST - *Global Positioning System Time*

$$\mathrm{GPST} = \mathrm{UTC} + 18\ \mathrm{s}$$

Referentni sistemi vremena

Praktični primer

- Civilni datum: Y, M, D, UT
- GPS nedelja (GPS WEEK): broj proteklih nedelja od standardne GPS epohe – 06.01.1980. godine u 0 časova UT vremena
- Julijanski dan (JD): broj proteklih srednjih solarnih dana od podneva 01.01.4713. godine pre nove ere u 12 časova UT vremena
- Modifikovani julijanski dan (MJD): iz praktičnih razloga, početak je pomeren u ponoć 17.11.1858. godine u ponoć UT

$$\mathrm{MJD} = \mathrm{JD} - 2400000.5$$

Referentni sistemi vremena

Praktični primer

- **Civilni datum**:

  29.10.2024. 09.00 (2024 303, DOY=303)
- **GPS nedelja** (GPS WEEK):

  2338 2 (DOW = 2)
- **Julijanski dan** (JD):

  2460612.875
- **Modifikovani julijanski dan** (MJD):

  60612.375

Pojam geoida i koncept visina

Nivoske površi ili **ekvipotencijalne površi** su površi duž kojih nema promene potencijala (geometrijsko mesto tačaka sa istom vrednošću potencijala).

Vertikalne linije koje imaju osobinu da se pravac tangente u svakoj njihovoj tački poklapa sa pravcem vektora ubrzanja sile Zemljine teže nazivaju se **vertikale**.

Ekvipotencijalna površ koja u smislu najmanjih kvadrata najbolje definiše srednji nivo mora naziva se **geoid**.

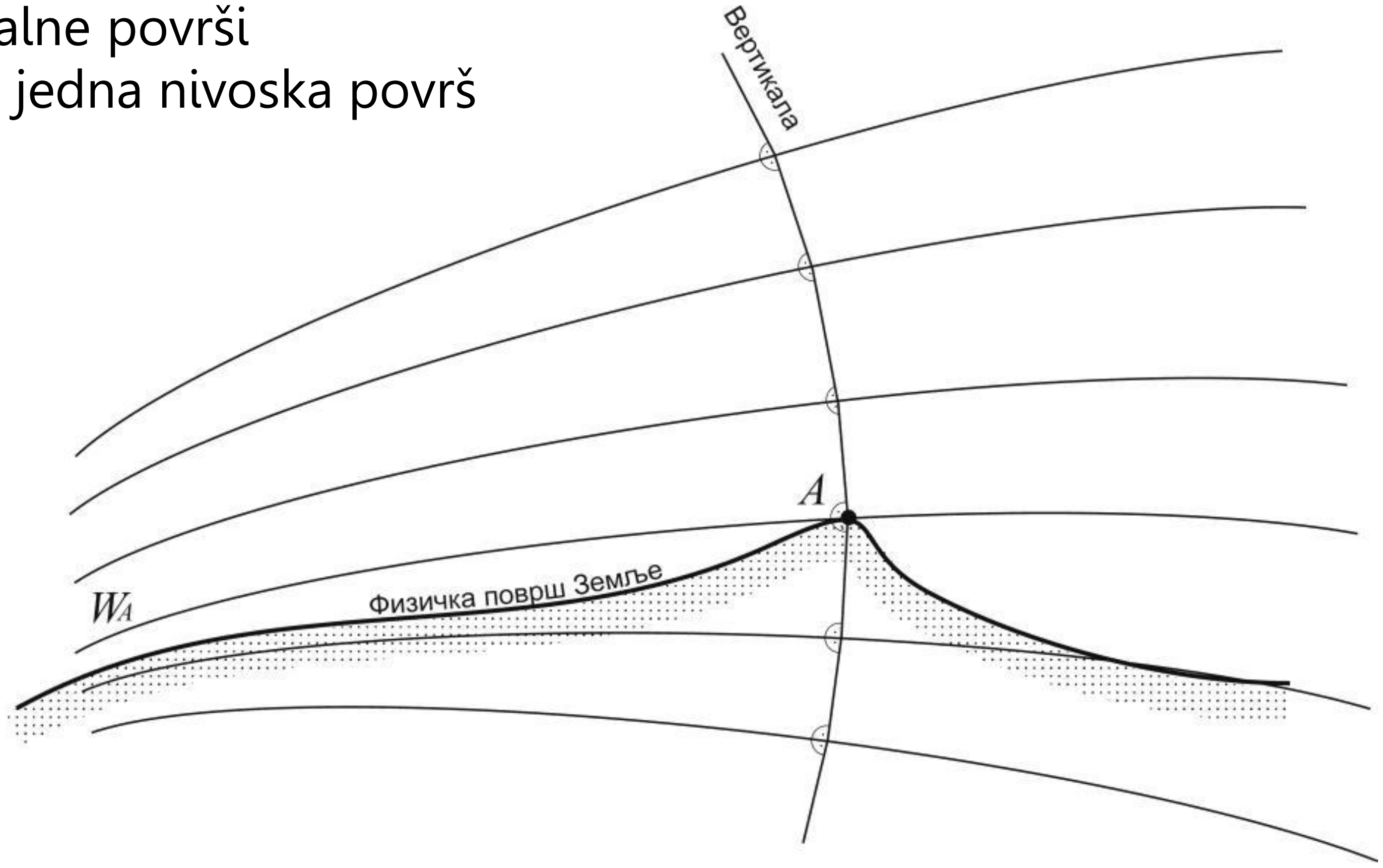
<u>Važno</u>:

1. Nivoske površi međusobno konvergiraju od ekvatora ka polovima
2. Nivoske površi se nikad ne presecaju niti dodiruju
3. Vertikale su upravne na ekvipotencijalne površi
4. Kroz svaku tačku vertikale prolazi po jedna nivoska površ
5. Vertikala je prostorna kriva

Pojam geoida i koncept visina

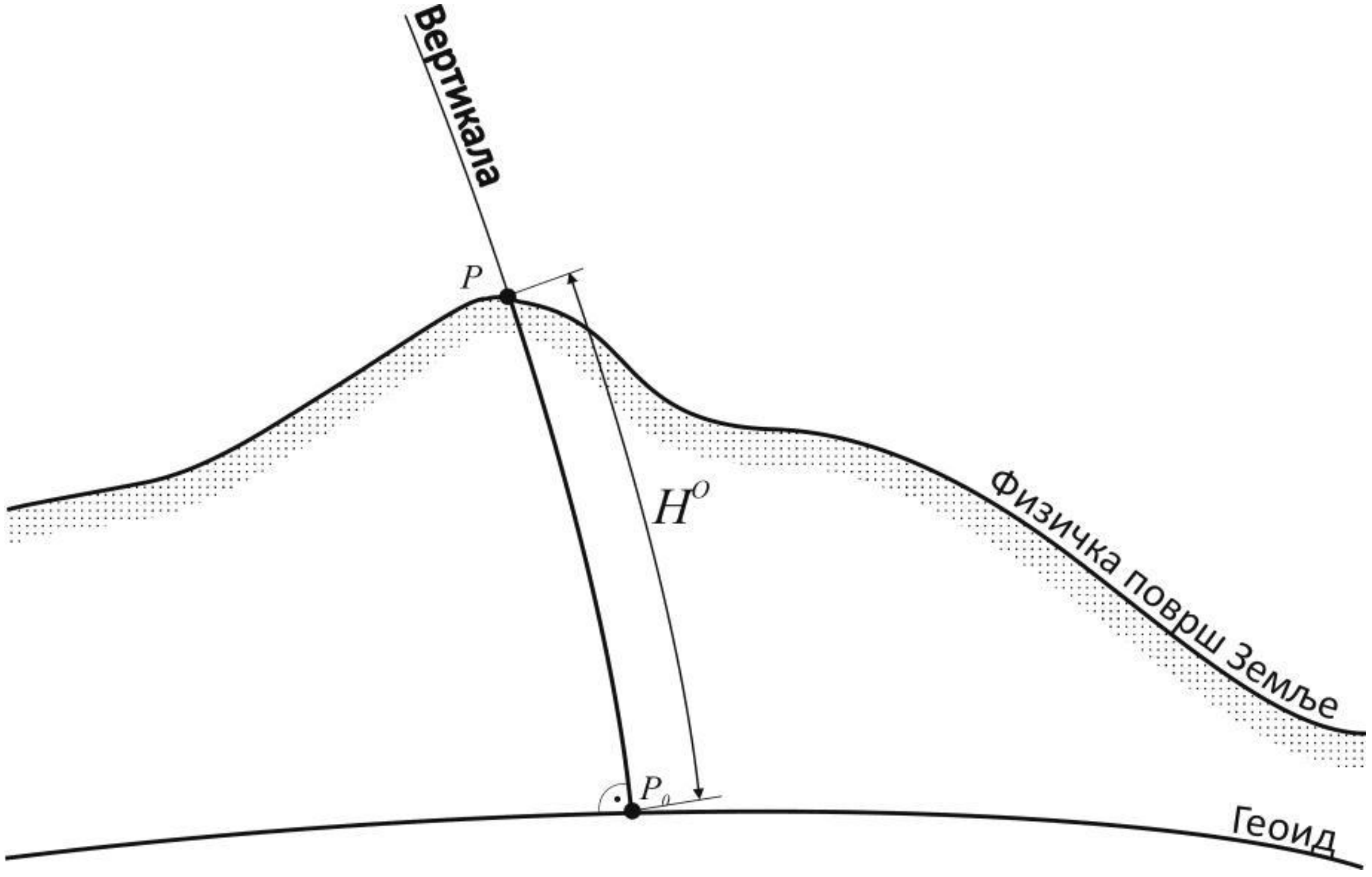
Važno:

1. Nivoske površi međusobno konvergiraju od ekvatora ka polovima
2. Nivoske površi se nikad ne presecaju niti dodiruju
3. Vertikale su upravne na ekvipotencijalne površi
4. Kroz svaku tačku vertikale prolazi po jedna nivoska površ
5. Vertikala je prostorna kriva



Pojam geoida i koncept visina

Rastojanje tačke na fizičkoj površi Zemlje do geoida mereno po vertikali naziva se **ortometrijska visina**.

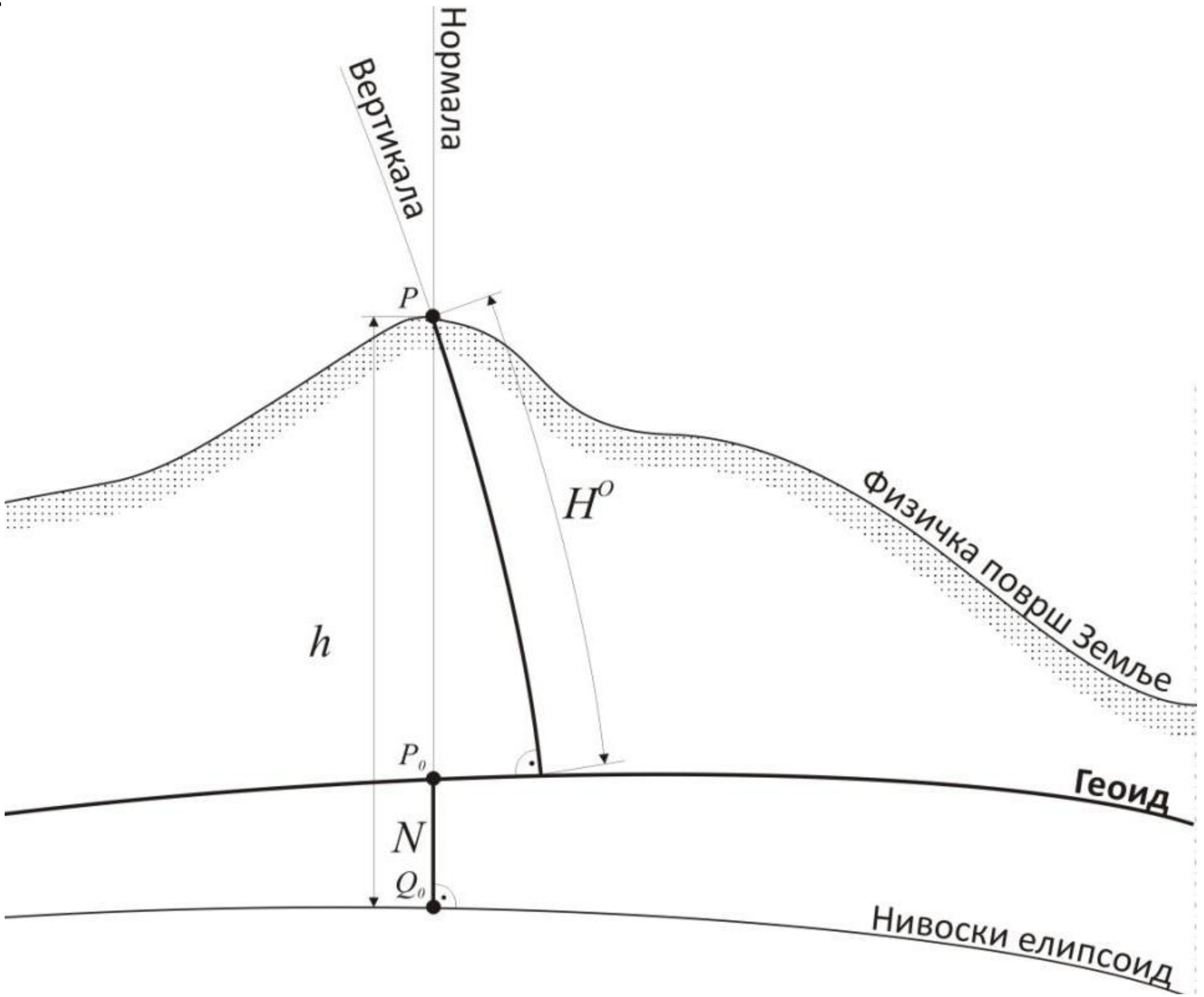


Pojam geoida i koncept visina

Elipsoidna visina tačke P_0 koja se nalazi na geoidu naziva se **undulacijom geoida** u tački P_0 ili visinom geoida u tački P_0.

$$N = h - H^O$$

Ugao koji međusobno grade normala i vertikala naziva se **uglom odstupanja vertikale**.



PREDAVANJE 3

Osnovna teorija satelitskih orbita

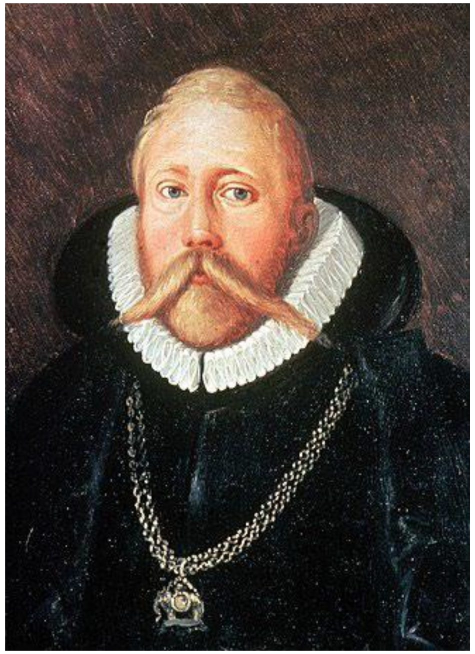
Osnovna teorija satelitskih orbita

1. Istorija
2. Keplerovi i Njutnovi zakoni
3. Jednačina normalnog kretanja satelita
3. Osobine normalnog kretanja satelita
4. Opšti oblik satelitskih orbita
5. Keplerovi orbitalni elementi
6. Ekscentrična i srednja anomalija
7. Računanje položaja satelita
8. Perturbacije satelitskog kretanja
9. Klasifikacija satelitskih orbita

Istorija

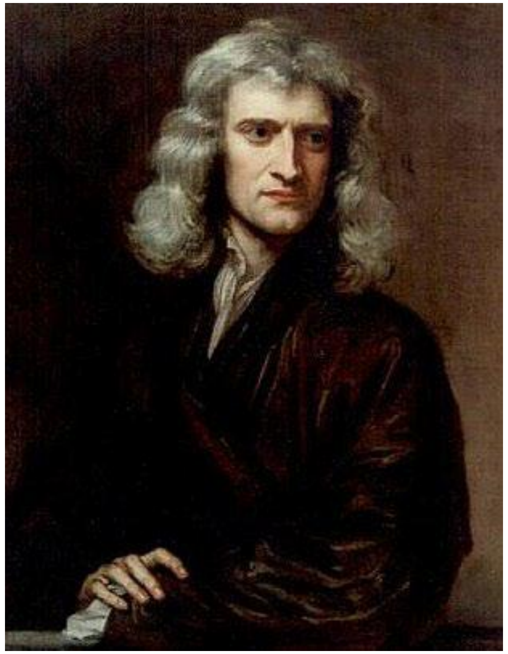
Temelj moderne mehanike

Tycho Brahe je tekom kraja 16. veka prikupio najpreciznije astronomske opservacije svog vremena, stvarajući osnovu za matematičko opisivanje planetarnih putanja. Na tim podacima Johannes Kepler formulisao je svoja tri zakona kretanja planeta, čime je prvi put precizno opisao eliptične orbite. Nekoliko decenija kasnije, Isaac Newton je ujedinio Keplerove zakonitosti i mehaniku u zakon gravitacije.



Tycho Brahe (1546-1601)

Johannes Kepler (1571-1630)

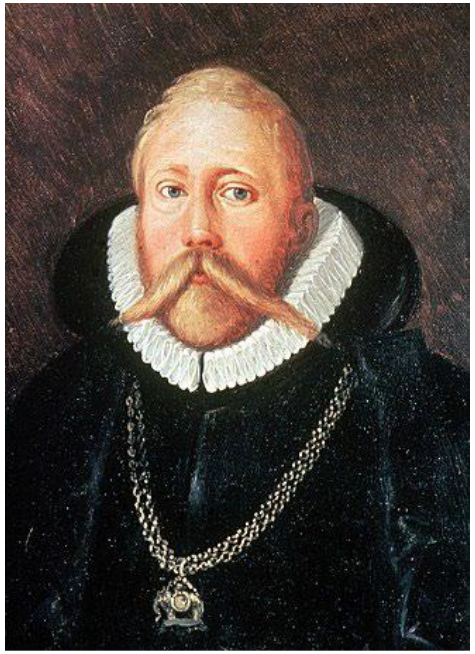


Isaac Newton (1642–1727)

Istorija

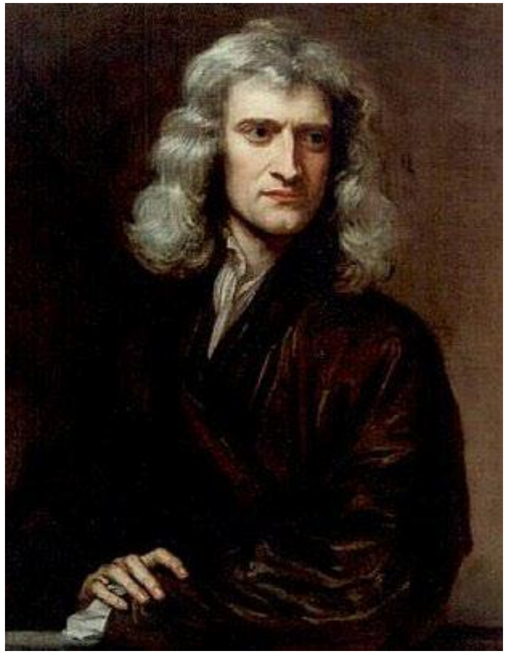
Johannes Kepler formulisao je tri zakona planetarnog kretanja na osnovu opažanja danskog astronoma Tycho Brahe-a.

Isaac Newton je 1687. godine u okviru svoje studije *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* formulisao zakone mehanike i zakon univerzalnog privlačenja.



Tycho Brahe (1546-1601)

Johannes Kepler (1571-1630)

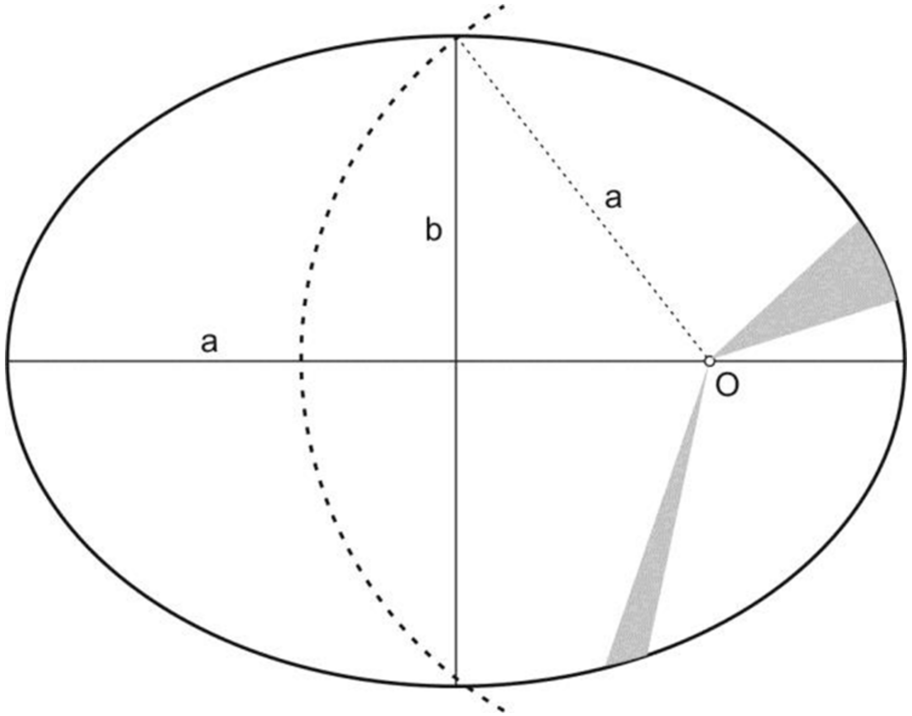


Isaac Newton (1642–1727)

Keplerovi i Njutnovi zakoni

Keplerovi zakoni:

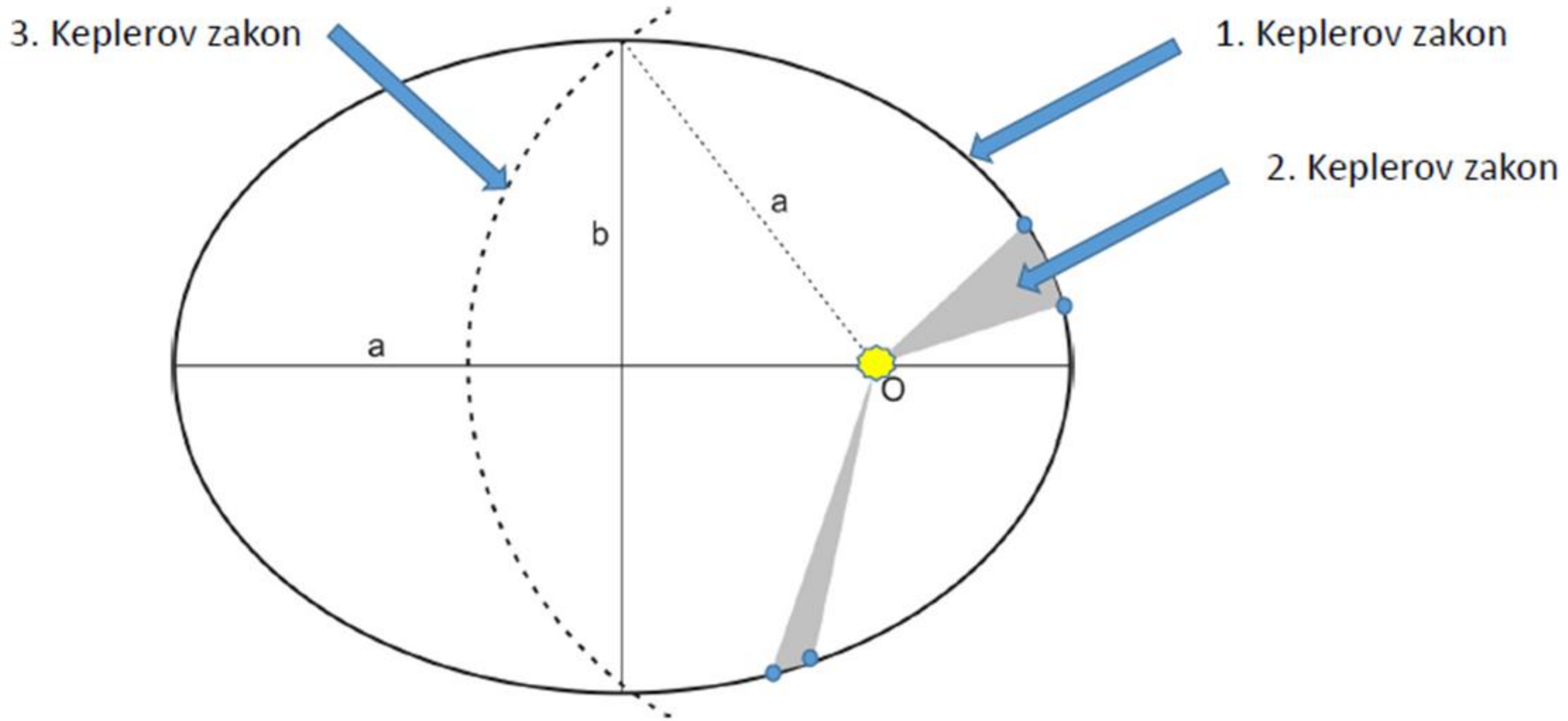
- Sve planete kreću se po orbitama koje su oblika elipse, pri čemu je Sunce u jednoj od žiža
- Linija koja spaja središta Sunca i planete opisuje jednake površine za isti vremenski interval
- Kvadrati perioda obilaska planeta proporcionalni su kubovima njihovih srednjih odstojanja od Sunca



Keplerovi i Njutnovi zakoni

<u>Keplerovi zakoni</u>:

- Sve planete kreću se po orbitama koje su oblika elipse, pri čemu je Sunce u jednoj od žiža
- Linija koja spaja središta Sunca i planete opisuje jednake površine za isti vremenski interval
- Kvadrati perioda obilaska planeta proporcionalni su kubovima njihovih srednjih odstojanja od Sunca



Keplerovi i Njutnovi zakoni

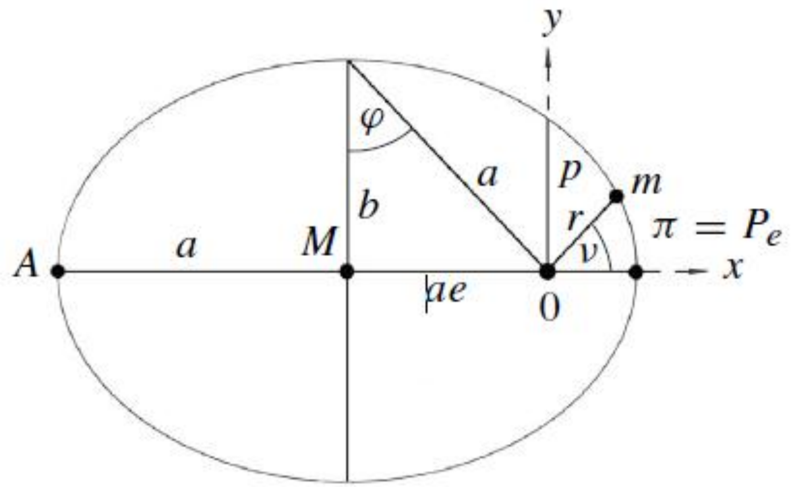
Keplerovi zakoni:

- Dakle, planeta Zemlja se kreće po elipsi velike poluose a i male poluose b sa Suncem u žiži O
- Shodno drugom Keplerovom zakonu, planeta se kreće oko Sunca promenljivom linearnom brzinom koja zavisi od njenog položaja na putanji. Što je planeta udaljenija od Sunca, to se sporije kreće. Međutim, površinska brzina planete ostaje konstantna
- Iz trećeg zakona sledi da dve planete imaju isti period obilaska bez obzira na oblik njihovih orbita, pod uslovom da im je isto srednje odstojanje od Sunca

Keplerovi i Njutnovi zakoni

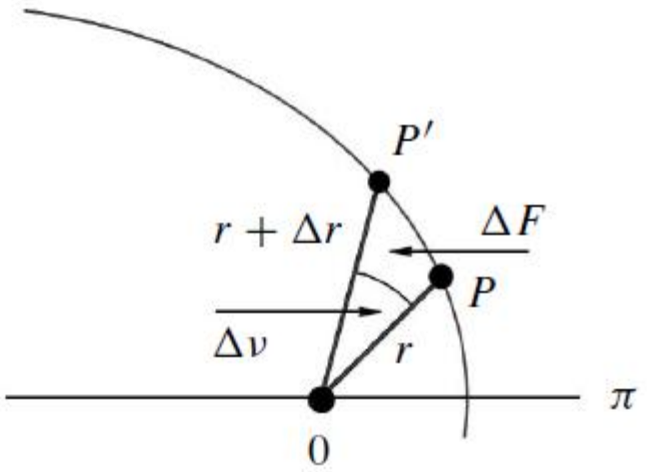
I Keplerov zakon:

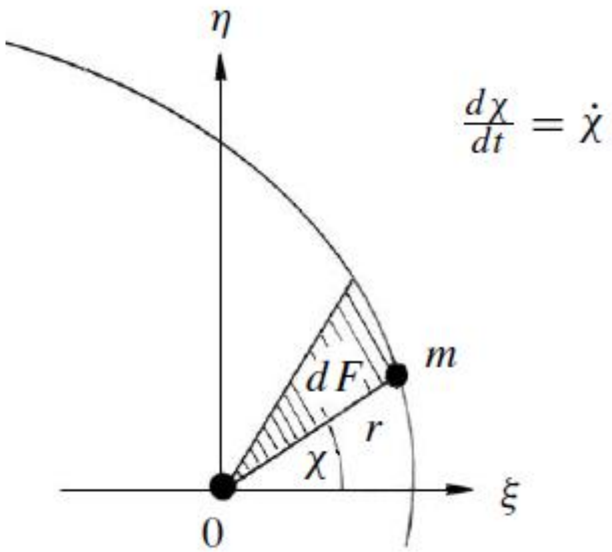
$$r = \frac{p}{1 + e\cos v}$$



II Keplerov zakon:

$$r^2\frac{dv}{dt} = c \quad \left(\text{ili } \frac{dA}{dt} = c\right)$$





III Keplerov zakon:

$$\frac{a_i^3}{T_i^2} = \frac{GM}{4\,\pi^2} \quad \rightarrow \quad n_i = 2\pi/T_i \quad \rightarrow \quad a_i^3 \cdot n_i^2 = GM$$

Keplerovi i Njutnovi zakoni

Njutnovi zakoni:

- Telo ostaje u stanju mirovanja ili uniformnog kretanja (ravnomernog pravolinijskog kretanja) osim ako na njega ne deluje neka sila
- Promena količine kretanja tela proporcionalna je sili koja na njega deluje
- Kada jedno telo deluje silom na drugo telo, drugo telo istovremeno deluje silom jednakog intenziteta ali suprotnog smera na prvo telo

Njutnov zakon univerzalnog privlačenja:

- Dva tela privlače se međusobno silom koja je direktno proporcionalna njihovim masama, a obrnuto proporcionalna kvadratu njihovog međusobnog rastojanja

Keplerovi i Njutnovi zakoni

I Njutnov zakon:

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{0}} \quad \rightarrow \quad \frac{d\vec{\mathbf{V}}}{dt} = \vec{\mathbf{0}}$$

II Njutnov zakon:

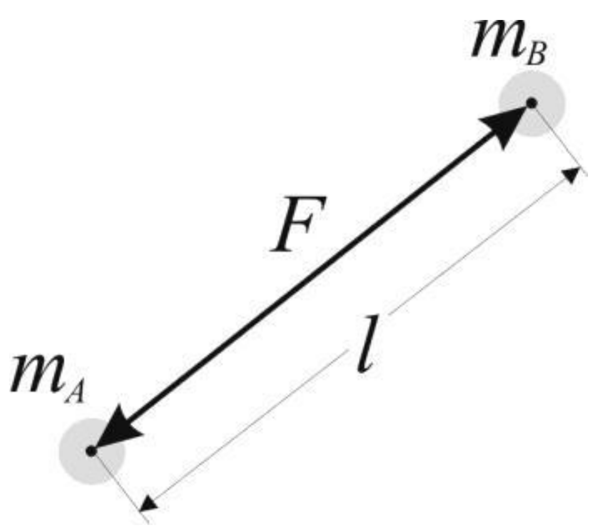
$$\vec{\mathbf{F}} = m\frac{d\vec{\mathbf{V}}}{dt} = m\vec{\mathbf{a}} = m\ddot{\vec{\mathbf{r}}}$$

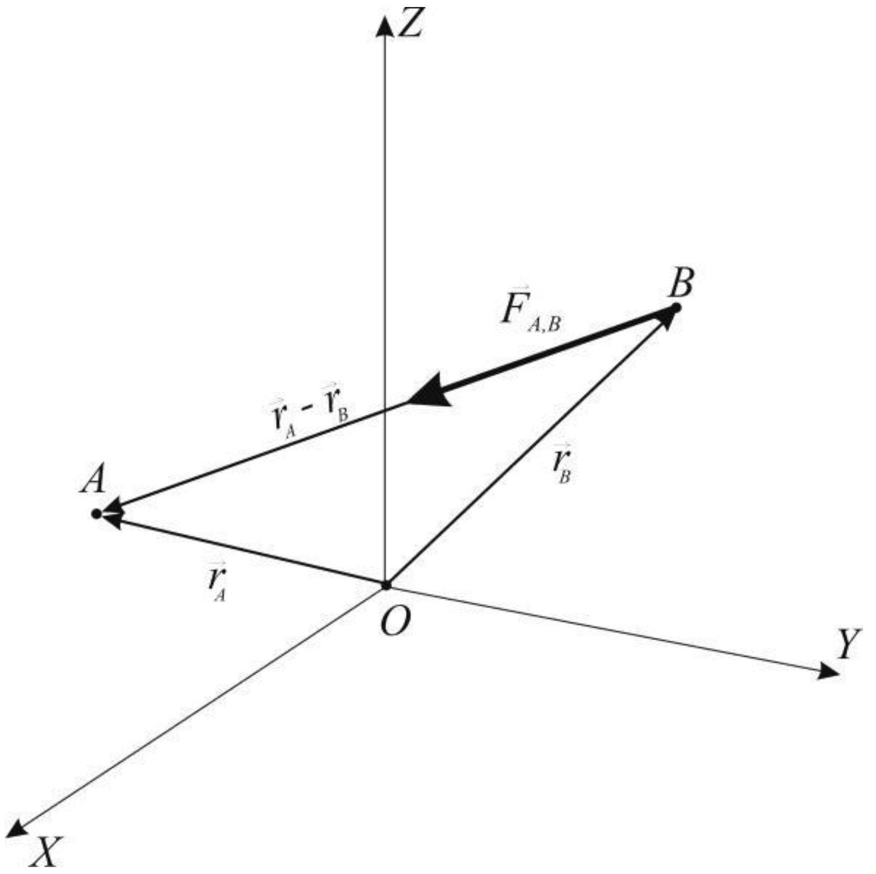
III Njutnov zakon:

$$\vec{\mathbf{F}}_1 = -\vec{\mathbf{F}}_2$$

Njutnov zakon univerzalnog privlačenja:

$$\vec{\mathbf{F}} = -G\frac{m_a m_b}{r^3}\vec{\mathbf{r}}$$





Jednačina normalnog kretanja satelita

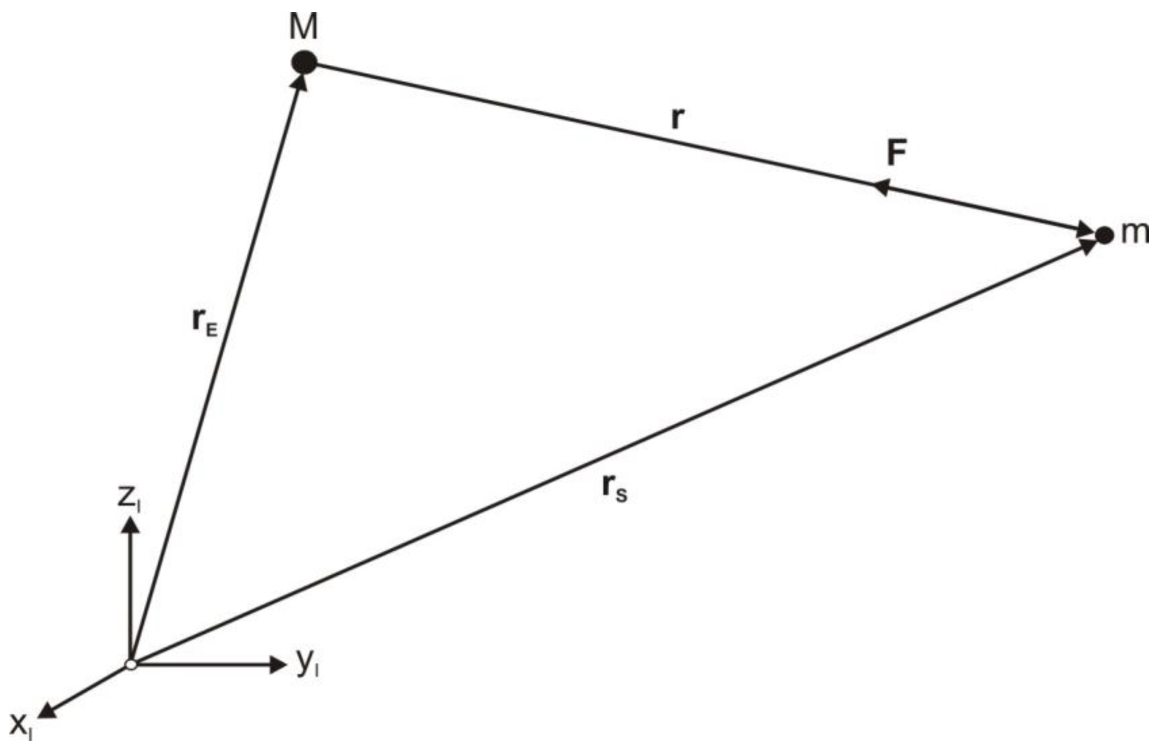
Problem dva tela:

Problem dva tela predstavlja osnovni i najjednostavniji model orbitalne mehanike, kojim se opisuje idealizovano kretanje satelita oko Zemlje pod pretpostavkom da na sistem deluje isključivo međusobna gravitacija, bez uticaja spoljašnjih sila.

- Masa Zemlje M
- Masa satelita m
- Vektor položaja satelita u odnosu na Zemlju:

  $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_S - \vec{\mathbf{r}}_E$
- Sila kojom Zemlja privlači satelit:

  $$\vec{\mathbf{F}} = -G\frac{Mm}{r^3}\vec{\mathbf{r}}$$



Jednačina normalnog kretanja satelita

Problem dva tela:

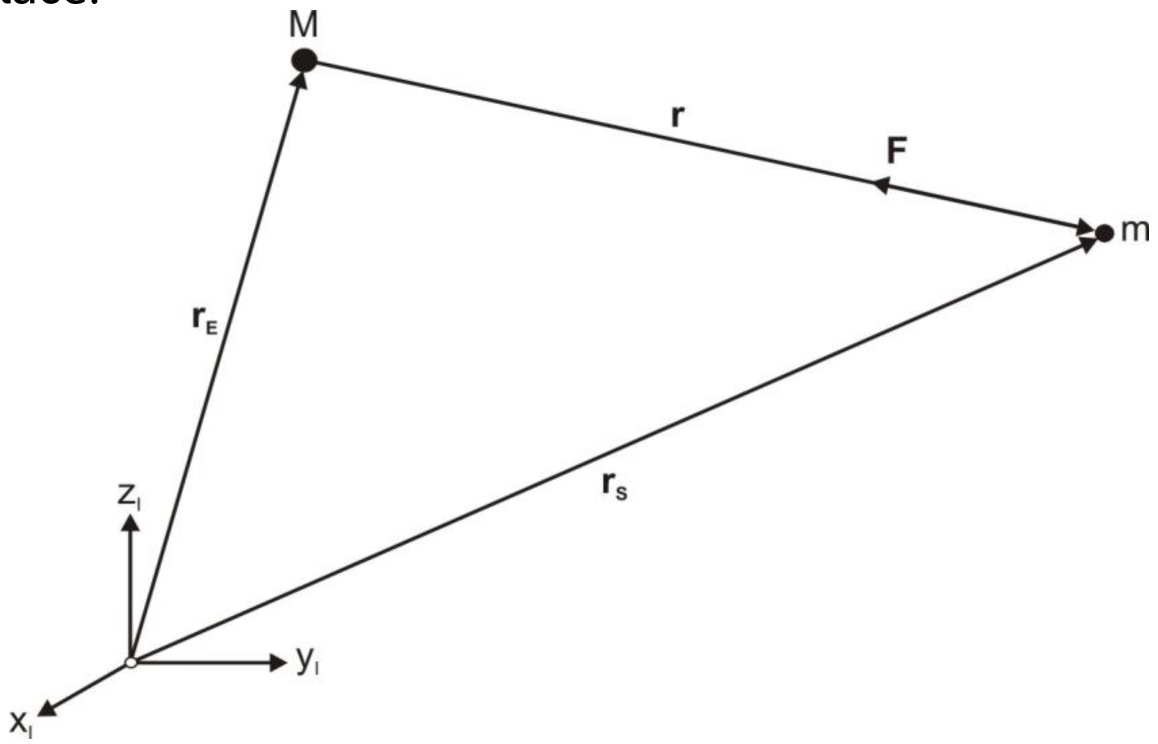
- Drugi Njutnov zakon:

$$\vec{\mathbf{F}} = m\ddot{\vec{\mathbf{r}}}$$

- Sile kojima se Zemlja i satelit međusobno privlače:

$$m\ddot{\vec{\mathbf{r}}}_S = -G\frac{Mm}{r^3}\vec{\mathbf{r}}, \qquad M\ddot{\vec{\mathbf{r}}}_E = G\frac{Mm}{r^3}\vec{\mathbf{r}}$$

$$\ddot{\vec{\mathbf{r}}}_S = -G\frac{M}{r^3}\vec{\mathbf{r}}, \qquad \ddot{\vec{\mathbf{r}}}_E = G\frac{m}{r^3}\vec{\mathbf{r}}$$



Jednačina normalnog kretanja satelita

Problem dva tela:

- Vektor ubranja satelita u odnosu na Zemlju:

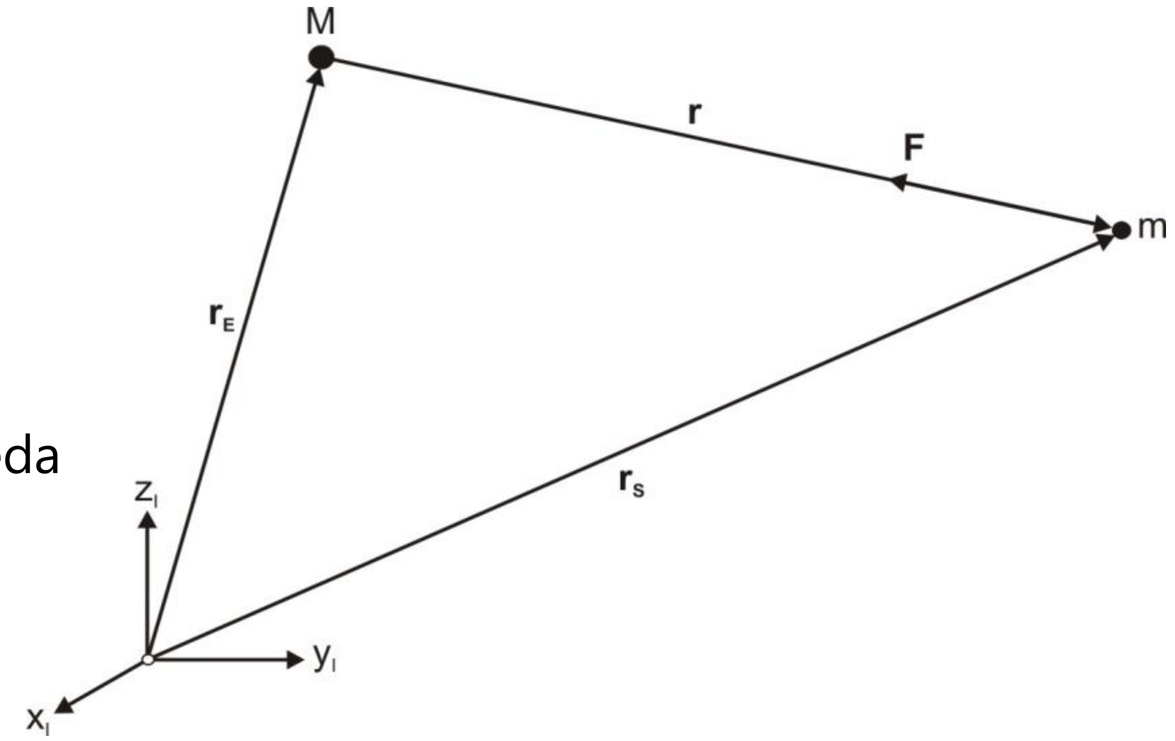
$$\ddot{\vec{\mathbf{r}}} = \ddot{\vec{\mathbf{r}}}_S - \ddot{\vec{\mathbf{r}}}_E = -G\frac{M+m}{r^3}\vec{\mathbf{r}}$$

- Za $M \gg m$ ($M \sim 10^{24}$ kg, $m \sim 10^3$ kg):

$$\ddot{\vec{\mathbf{r}}} = -\frac{GM}{r^3}\vec{\mathbf{r}}$$

Jednačina normalnog satelitskog kretanja

*vektorska diferencijalna jednačina drugog reda



Jednačina normalnog kretanja satelita

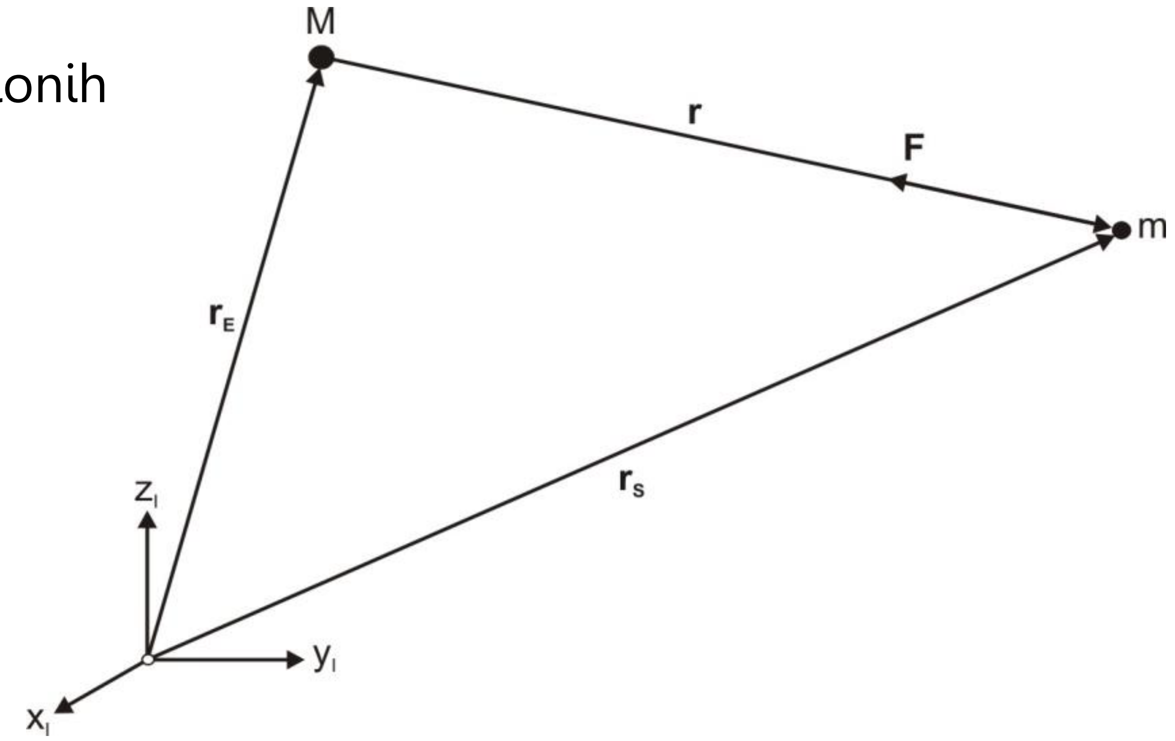
Problem dva tela:

- Jednačina normalnog satelitskog kretanja:

$$\ddot{\vec{\mathbf{r}}} = -\frac{GM}{r^3}\vec{\mathbf{r}}$$

- Integracija prethodne jednačine → 6 integracionih konstanti:

$$\vec{\mathbf{r}}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}, \qquad \dot{\vec{\mathbf{r}}}_0 = \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{bmatrix}$$



Osobine normalnog satelitskog kretanja

Jednačina normalnog satelitskog kretanja:

$$\ddot{\vec{\mathbf{r}}} = -\frac{GM}{r^3}\vec{\mathbf{r}}$$

- skalarni proizvod vektorom brzine $\dot{\vec{\mathbf{r}}}$
- vektorski proizvod vektorom položaja $\vec{\mathbf{r}}$
- vektorski proizvod vektorom momenta $\vec{\mathbf{h}}$

<u>Važno</u>:

$$\dot{\vec{\mathbf{r}}} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}, \qquad \ddot{\vec{\mathbf{r}}} = \frac{d\dot{\vec{\mathbf{r}}}}{dt} = \frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}\right) = \frac{d\vec{\mathbf{a}}}{dt}\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}\frac{d\vec{\mathbf{b}}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\mathbf{a}}\,\mathrm{x}\,\vec{\mathbf{b}}\right) = \frac{d\vec{\mathbf{a}}}{dt}\,\mathrm{x}\,\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}\,\mathrm{x}\,\frac{d\vec{\mathbf{b}}}{dt}$$

$$\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}} = a\cdot b\cdot\cos(\measuredangle(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}}))$$

$$\vec{\mathbf{a}}\,\mathrm{x}\,\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{c}}, \qquad \vec{\mathbf{a}}\,\mathrm{x}\,\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{0}}$$

$$\left|\vec{\mathbf{a}}\,\mathrm{x}\,\vec{\mathbf{b}}\right| = a\cdot b\cdot\sin(\measuredangle(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}}))$$

$$\vec{\mathbf{a}}\,\mathrm{x}\,\left(\vec{\mathbf{b}}\,\mathrm{x}\,\vec{\mathbf{c}}\right) = \vec{\mathbf{b}}\cdot(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{c}}) - \vec{\mathbf{c}}\cdot(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}})$$

Osobine normalnog satelitskog kretanja

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}) = \frac{d\vec{\mathbf{a}}}{dt}\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}\frac{d\vec{\mathbf{b}}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{a}}\,\mathrm{x}\,\vec{\mathbf{b}}) = \frac{d\vec{\mathbf{a}}}{dt}\,\mathrm{x}\,\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}\,\mathrm{x}\,\frac{d\vec{\mathbf{b}}}{dt}$$

Skalarni proizvod vektorom brzine $\dot{\vec{\mathbf{r}}}$:

$$\dot{\vec{\mathbf{r}}}\cdot\ddot{\vec{\mathbf{r}}} = -\frac{GM}{r^3}\vec{\mathbf{r}}\cdot\dot{\vec{\mathbf{r}}}$$

- polazimo od izraza:

$$\frac{d}{dt}(\dot{\vec{\mathbf{r}}}\cdot\dot{\vec{\mathbf{r}}}) = \frac{d\dot{\vec{\mathbf{r}}}}{dt}\dot{\vec{\mathbf{r}}} + \frac{d\dot{\vec{\mathbf{r}}}}{dt}\dot{\vec{\mathbf{r}}} = \dot{\vec{\mathbf{r}}}\cdot\ddot{\vec{\mathbf{r}}} + \dot{\vec{\mathbf{r}}}\cdot\ddot{\vec{\mathbf{r}}} = 2(\dot{\vec{\mathbf{r}}}\cdot\ddot{\vec{\mathbf{r}}}) \;\rightarrow\; \dot{\vec{\mathbf{r}}}\cdot\ddot{\vec{\mathbf{r}}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\vec{\mathbf{r}}}\cdot\dot{\vec{\mathbf{r}}}}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{r}\cdot\dot{r}}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

- slično prethodnom:

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{r}}\cdot\vec{\mathbf{r}}) = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}\vec{\mathbf{r}} + \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}\vec{\mathbf{r}} = 2(\vec{\mathbf{r}}\cdot\dot{\vec{\mathbf{r}}}) \rightarrow \vec{\mathbf{r}}\cdot\dot{\vec{\mathbf{r}}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{\mathbf{r}}\cdot\vec{\mathbf{r}}}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{r\cdot r}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{r^2}{2}\right) = \frac{1}{2}2r\cdot\dot{r} = r\cdot\dot{r}$$

Osobine normalnog satelitskog kretanja

Skalarni proizvod vektorom brzine $\dot{\vec{\mathbf{r}}}$:

$$\dot{\vec{\mathbf{r}}} \cdot \ddot{\vec{\mathbf{r}}} = -\frac{GM}{r^3}\vec{\mathbf{r}} \cdot \dot{\vec{\mathbf{r}}}$$

- polazimo od izraza:

$$\frac{d}{dt}(\dot{\vec{\mathbf{r}}} \cdot \dot{\vec{\mathbf{r}}}) = \frac{d\dot{\vec{\mathbf{r}}}}{dt}\dot{\vec{\mathbf{r}}} + \frac{d\dot{\vec{\mathbf{r}}}}{dt}\dot{\vec{\mathbf{r}}} = \dot{\vec{\mathbf{r}}} \cdot \ddot{\vec{\mathbf{r}}} + \dot{\vec{\mathbf{r}}} \cdot \ddot{\vec{\mathbf{r}}} = 2(\dot{\vec{\mathbf{r}}} \cdot \ddot{\vec{\mathbf{r}}}) \rightarrow \boxed{\dot{\vec{\mathbf{r}}} \cdot \ddot{\vec{\mathbf{r}}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\vec{\mathbf{r}}} \cdot \dot{\vec{\mathbf{r}}}}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{r} \cdot \dot{r}}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right)}$$

- slično prethodnom:

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{r}}) = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}\vec{\mathbf{r}} + \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}\vec{\mathbf{r}} = 2(\vec{\mathbf{r}} \cdot \dot{\vec{\mathbf{r}}}) \rightarrow \boxed{\vec{\mathbf{r}} \cdot \dot{\vec{\mathbf{r}}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{r}}}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{r \cdot r}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{r^2}{2}\right) = \frac{1}{2}2r \cdot \dot{r} = r \cdot \dot{r}}$$

Osobine normalnog satelitskog kretanja

Skalarni proizvod vektorom brzine $\dot{\vec{\mathbf{r}}}$:

$$\dot{\vec{\mathbf{r}}} \cdot \ddot{\vec{\mathbf{r}}} = -\frac{GM}{r^3}\vec{\mathbf{r}} \cdot \dot{\vec{\mathbf{r}}} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\frac{GM}{r^3} r \cdot \dot{r} = -\frac{GM}{r^2} \cdot \dot{r}$$

- koristimo vezu:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{GM}{r}\right) = GM \cdot (-1) r^{-2} \cdot \dot{r} = -\frac{GM}{r^2} \cdot \dot{r}$$

- sledi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{GM}{r}\right) \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r}\right) = 0 \rightarrow \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r} = E_k = const$$

Osobine normalnog satelitskog kretanja

Skalarni proizvod vektorom brzine $\dot{\vec{\mathbf{r}}}$:

$$\dot{\vec{\mathbf{r}}} \cdot \ddot{\vec{\mathbf{r}}} = -\frac{GM}{r^3}\vec{\mathbf{r}} \cdot \dot{\vec{\mathbf{r}}} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\frac{GM}{r^3} r \cdot \dot{r} = -\frac{GM}{r^2} \cdot \dot{r}$$

- koristimo vezu:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{GM}{r}\right) = GM \cdot (-1) r^{-2} \cdot \dot{r} = -\frac{GM}{r^2} \cdot \dot{r}$$

- sledi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{GM}{r}\right) \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r}\right) = 0 \rightarrow \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r} = E_k = const$$

Osobine normalnog satelitskog kretanja

Skalarni proizvod vektorom brzine $\dot{\vec{\mathbf{r}}}$:

$$\dot{\vec{\mathbf{r}}} \cdot \ddot{\vec{\mathbf{r}}} = -\frac{GM}{r^3}\vec{\mathbf{r}} \cdot \dot{\vec{\mathbf{r}}} \quad \rightarrow \boxed{\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r} = E_k = const}$$

Članovi na levoj strani predstavljaju respektivno kinetičku $\left(\frac{v^2}{2}\right)$ i potencijalnu energiju $\left(\frac{GM}{r}\right)$ tela jedinične mase. Njihov zbir je ukupna mehanička energija kretanja $(E_k = const)$ koja je konstantna.

Normalno satelitsko kretanje je takvo da je očuvana njegova ukupna mehanička energija.

Osobine normalnog satelitskog kretanja

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}) = \frac{d\vec{\mathbf{a}}}{dt}\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}\frac{d\vec{\mathbf{b}}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}) = \frac{d\vec{\mathbf{a}}}{dt} \times \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}} \times \frac{d\vec{\mathbf{b}}}{dt}$$

Vektorski proizvod vektorom položaja $\vec{\mathbf{r}}$:

$$\vec{\mathbf{r}} \times \ddot{\vec{\mathbf{r}}} = -\frac{GM}{r^3}\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{r}}$$

- krećemo od izraza:

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{r}} \times \dot{\vec{\mathbf{r}}}) = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \times \dot{\vec{\mathbf{r}}} + \vec{\mathbf{r}} \times \frac{d\dot{\vec{\mathbf{r}}}}{dt} = \dot{\vec{\mathbf{r}}} \times \dot{\vec{\mathbf{r}}} + \vec{\mathbf{r}} \times \ddot{\vec{\mathbf{r}}} = \vec{\mathbf{r}} \times \ddot{\vec{\mathbf{r}}}$$

- imajući u vidu da je $\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{0}}$ sledi:

$$\vec{\mathbf{r}} \times \ddot{\vec{\mathbf{r}}} = \frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{r}} \times \dot{\vec{\mathbf{r}}}) = \vec{\mathbf{0}} \;\rightarrow\; \vec{\mathbf{r}} \times \dot{\vec{\mathbf{r}}} = \vec{\mathbf{h}} = const$$

Osobine normalnog satelitskog kretanja

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}) = \frac{d\vec{\mathbf{a}}}{dt}\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}\frac{d\vec{\mathbf{b}}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}) = \frac{d\vec{\mathbf{a}}}{dt} \times \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}} \times \frac{d\vec{\mathbf{b}}}{dt}$$

Vektorski proizvod vektorom položaja $\vec{\mathbf{r}}$:

$$\vec{\mathbf{r}} \times \ddot{\vec{\mathbf{r}}} = -\frac{GM}{r^3}\cancel{\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{r}}}$$

- krećemo od izraza:

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{r}} \times \dot{\vec{\mathbf{r}}}) = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \times \dot{\vec{\mathbf{r}}} + \vec{\mathbf{r}} \times \frac{d\dot{\vec{\mathbf{r}}}}{dt} = \cancel{\dot{\vec{\mathbf{r}}} \times \dot{\vec{\mathbf{r}}}} + \vec{\mathbf{r}} \times \ddot{\vec{\mathbf{r}}} = \vec{\mathbf{r}} \times \ddot{\vec{\mathbf{r}}}$$

- imajući u vidu da je $\dot{\vec{\mathbf{r}}} \times \dot{\vec{\mathbf{r}}} = \vec{\mathbf{0}}$ sledi:

$$\vec{\mathbf{r}} \times \ddot{\vec{\mathbf{r}}} = \frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{r}} \times \dot{\vec{\mathbf{r}}}) = \vec{\mathbf{0}} \;\; \rightarrow \;\; \vec{\mathbf{r}} \times \dot{\vec{\mathbf{r}}} = \vec{\mathbf{h}} = const$$

Osobine normalnog satelitskog kretanja

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}) = \frac{d\vec{\mathbf{a}}}{dt}\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}\frac{d\vec{\mathbf{b}}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}) = \frac{d\vec{\mathbf{a}}}{dt}\times\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}\times\frac{d\vec{\mathbf{b}}}{dt}$$

Vektorski proizvod vektorom položaja $\vec{\mathbf{r}}$:

$$\vec{\mathbf{r}}\times\ddot{\vec{\mathbf{r}}} = -\frac{GM}{r^3}\cancel{\vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{r}}}$$

- kretćemo od izraza:

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{r}}\times\dot{\vec{\mathbf{r}}})} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}\times\dot{\vec{\mathbf{r}}} + \vec{\mathbf{r}}\times\frac{d\dot{\vec{\mathbf{r}}}}{dt} = \cancel{\dot{\vec{\mathbf{r}}}\times\dot{\vec{\mathbf{r}}}} + \vec{\mathbf{r}}\times\ddot{\vec{\mathbf{r}}} = \boxed{\vec{\mathbf{r}}\times\ddot{\vec{\mathbf{r}}}}$$

- imajući u vidu da je $\vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{0}}$ sledi:

$$\boxed{\vec{\mathbf{r}}\times\ddot{\vec{\mathbf{r}}} = \frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{r}}\times\dot{\vec{\mathbf{r}}})} = \vec{\mathbf{0}} \rightarrow \vec{\mathbf{r}}\times\dot{\vec{\mathbf{r}}} = \vec{\mathbf{h}} = const$$

Osobine normalnog satelitskog kretanja

Vektorski proizvod vektorom položaja $\vec{\mathbf{r}}$:

$$\vec{\mathbf{r}} \times \ddot{\vec{\mathbf{r}}} = -\frac{GM}{r^3}\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{r}} \quad \rightarrow \boxed{\vec{\mathbf{r}} \times \dot{\vec{\mathbf{r}}} = \vec{\mathbf{h}} = const}$$

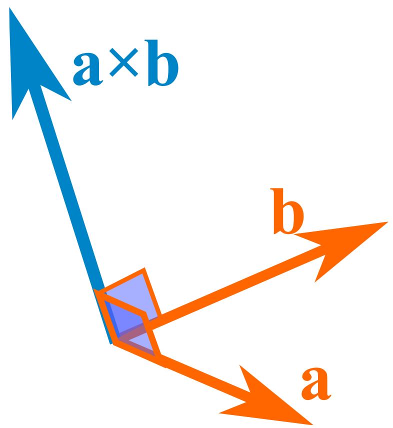
Vektorski proizvod vektora položaja i vektora brzine predstavlja vektor momenta količine kretanja tela jedinične mase $\vec{\mathbf{h}}$, koji je po gornjem izrazu vremenski konstantan.

Vektori položaja i brzine definišu orbitalnu ravan u kojoj se satelit kreće. Pošto je po definiciji vektorskog proizvoda vektor $\vec{\mathbf{h}}$ upravan na orbitalnu ravan, njegova vremenska konstantnost istovremeno znači da je orbitalna ravan fiksirana i da tokom vremena ne menja svoju orijentaciju u inercijalnom prostoru.

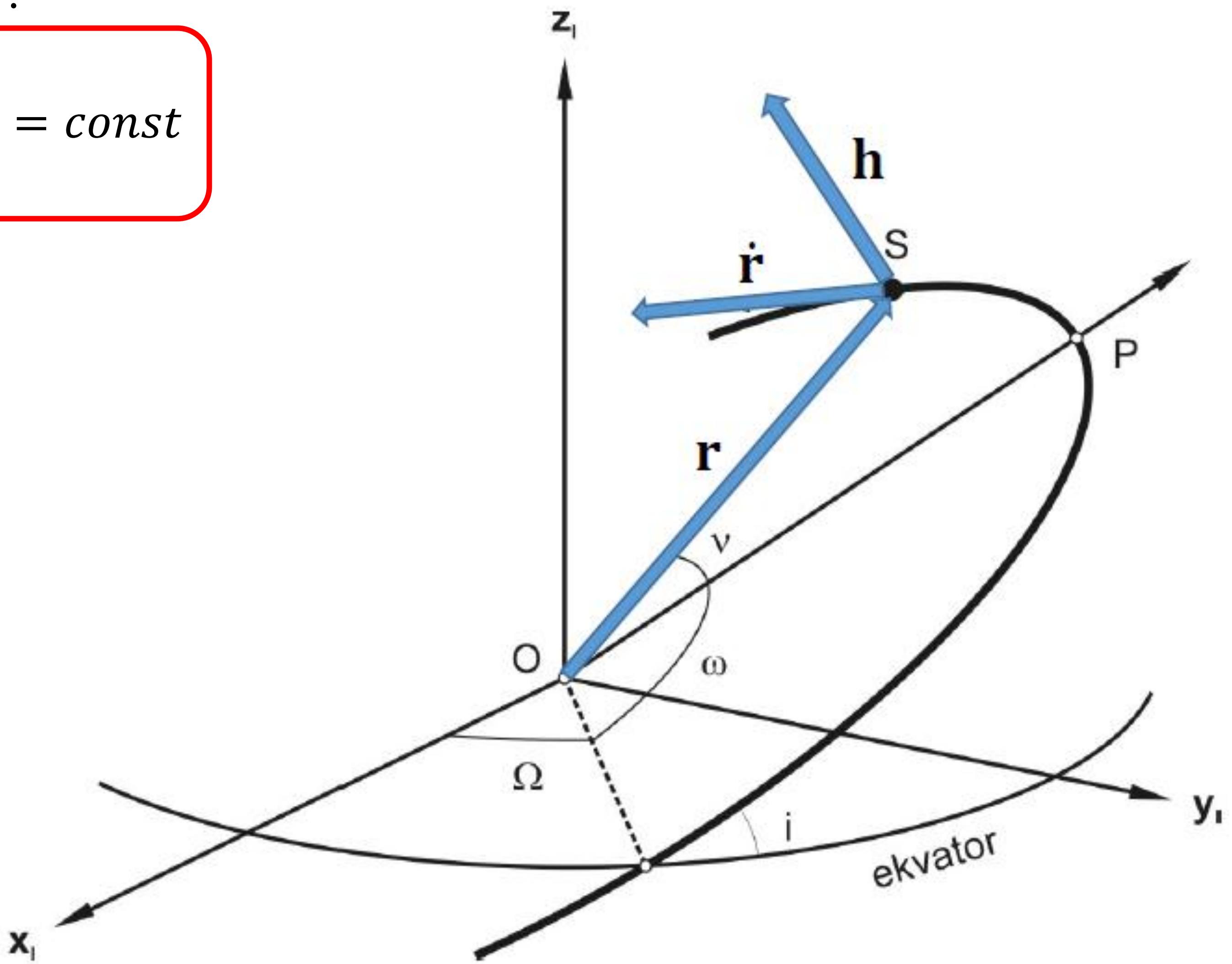
Osobine normalnog satelitskog kretanja

Vektorski proizvod vektorom položaja $\vec{\mathbf{r}}$:

$$\vec{\mathbf{r}} \times \ddot{\vec{\mathbf{r}}} = -\frac{GM}{r^3}\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{r}} \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec{\mathbf{r}} \times \dot{\vec{\mathbf{r}}} = \vec{\mathbf{h}} = const}$$



$\rightarrow$



Osobine normalnog satelitskog kretanja

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}) = \frac{d\vec{\mathbf{a}}}{dt}\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}\frac{d\vec{\mathbf{b}}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{a}}\,\mathrm{x}\,\vec{\mathbf{b}}) = \frac{d\vec{\mathbf{a}}}{dt}\,\mathrm{x}\,\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}\,\mathrm{x}\,\frac{d\vec{\mathbf{b}}}{dt}$$

Vektorski proizvod vektorom momenta $\vec{\mathbf{h}}$:

$$\ddot{\vec{\mathbf{r}}}\,\mathrm{x}\,\vec{\mathbf{h}} = -\frac{GM}{r^3}\vec{\mathbf{r}}\,\mathrm{x}\,\vec{\mathbf{h}}$$

- krećemo od izraza:

$$\frac{d}{dt}(\dot{\vec{\mathbf{r}}}\,\mathrm{x}\,\vec{\mathbf{h}}) = \frac{d\dot{\vec{\mathbf{r}}}}{dt}\,\mathrm{x}\,\vec{\mathbf{h}} + \dot{\vec{\mathbf{r}}}\,\mathrm{x}\,\frac{d\vec{\mathbf{h}}}{dt} = \ddot{\vec{\mathbf{r}}}\,\mathrm{x}\,(\vec{\mathbf{r}}\,\mathrm{x}\,\dot{\vec{\mathbf{r}}}) + \dot{\vec{\mathbf{r}}}\,\mathrm{x}\,\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{r}}\,\mathrm{x}\,\dot{\vec{\mathbf{r}}}) = \ddot{\vec{\mathbf{r}}}\,\mathrm{x}\,(\vec{\mathbf{r}}\,\mathrm{x}\,\dot{\vec{\mathbf{r}}}) = \ddot{\vec{\mathbf{r}}}\,\mathrm{x}\,\vec{\mathbf{h}}$$

- sledi:

$$\ddot{\vec{\mathbf{r}}}\,\mathrm{x}\,\vec{\mathbf{h}} = \frac{d}{dt}(\dot{\vec{\mathbf{r}}}\,\mathrm{x}\,\vec{\mathbf{h}})$$

Osobine normalnog satelitskog kretanja

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}) = \frac{d\vec{\mathbf{a}}}{dt}\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}\frac{d\vec{\mathbf{b}}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{a}}\,\mathrm{x}\,\vec{\mathbf{b}}) = \frac{d\vec{\mathbf{a}}}{dt}\,\mathrm{x}\,\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}\,\mathrm{x}\,\frac{d\vec{\mathbf{b}}}{dt}$$

Vektorski proizvod vektorom momenta $\vec{\mathbf{h}}$:

$$\ddot{\vec{\mathbf{r}}}\,\mathrm{x}\,\vec{\mathbf{h}} = -\frac{GM}{r^3}\vec{\mathbf{r}}\,\mathrm{x}\,\vec{\mathbf{h}}$$

$$\boxed{\vec{\mathbf{r}}\,\mathrm{x}\,\ddot{\vec{\mathbf{r}}} = \frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{r}}\,\mathrm{x}\,\dot{\vec{\mathbf{r}}}) = \vec{\mathbf{0}}}$$

- kraćemo od izraza:

$$\frac{d}{dt}(\dot{\vec{\mathbf{r}}}\,\mathrm{x}\,\vec{\mathbf{h}}) = \frac{d\dot{\vec{\mathbf{r}}}}{dt}\,\mathrm{x}\,\vec{\mathbf{h}} + \dot{\vec{\mathbf{r}}}\,\mathrm{x}\,\frac{d\vec{\mathbf{h}}}{dt} = \ddot{\vec{\mathbf{r}}}\,\mathrm{x}\,(\vec{\mathbf{r}}\,\mathrm{x}\,\dot{\vec{\mathbf{r}}}) + \dot{\vec{\mathbf{r}}}\,\mathrm{x}\,\cancel{\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{r}}\,\mathrm{x}\,\dot{\vec{\mathbf{r}}})} = \ddot{\vec{\mathbf{r}}}\,\mathrm{x}\,(\vec{\mathbf{r}}\,\mathrm{x}\,\dot{\vec{\mathbf{r}}}) = \ddot{\vec{\mathbf{r}}}\,\mathrm{x}\,\vec{\mathbf{h}}$$

$$\boxed{\vec{\mathbf{r}}\,\mathrm{x}\,\dot{\vec{\mathbf{r}}} = \vec{\mathbf{h}}}$$

- sledi:

$$\ddot{\vec{\mathbf{r}}}\,\mathrm{x}\,\vec{\mathbf{h}} = \frac{d}{dt}(\dot{\vec{\mathbf{r}}}\,\mathrm{x}\,\vec{\mathbf{h}})$$

Osobine normalnog satelitskog kretanja

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}) = \frac{d\vec{\mathbf{a}}}{dt}\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}\frac{d\vec{\mathbf{b}}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}) = \frac{d\vec{\mathbf{a}}}{dt}\times\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}\times\frac{d\vec{\mathbf{b}}}{dt}$$

Vektorski proizvod vektorom momenta $\vec{\mathbf{h}}$:

$$\ddot{\vec{\mathbf{r}}}\times\vec{\mathbf{h}} = -\frac{GM}{r^3}\vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{h}}$$

- krećemo od izraza:

$$\boxed{\dot{\vec{\mathbf{r}}}\times\ddot{\vec{\mathbf{r}}} = \frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{r}}\times\dot{\vec{\mathbf{r}}}) = \vec{\mathbf{0}}}$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{\vec{\mathbf{r}}}\times\vec{\mathbf{h}}) = \frac{d\dot{\vec{\mathbf{r}}}}{dt}\times\vec{\mathbf{h}} + \dot{\vec{\mathbf{r}}}\times\frac{d\vec{\mathbf{h}}}{dt} = \ddot{\vec{\mathbf{r}}}\times(\vec{\mathbf{r}}\times\dot{\vec{\mathbf{r}}}) + \dot{\vec{\mathbf{r}}}\times\cancel{\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{r}}\times\dot{\vec{\mathbf{r}}})} = \ddot{\vec{\mathbf{r}}}\times(\vec{\mathbf{r}}\times\dot{\vec{\mathbf{r}}}) = \ddot{\vec{\mathbf{r}}}\times\vec{\mathbf{h}}$$

- sledi:

$$\boxed{\vec{\mathbf{r}}\times\dot{\vec{\mathbf{r}}} = \vec{\mathbf{h}}}$$

$$\boxed{\ddot{\vec{\mathbf{r}}}\times\vec{\mathbf{h}} = \frac{d}{dt}(\dot{\vec{\mathbf{r}}}\times\vec{\mathbf{h}})}$$

Osobine normalnog satelitskog kretanja

$$\vec{\mathbf{a}} \times (\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}}) = \vec{\mathbf{b}} \cdot (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{c}}) - \vec{\mathbf{c}} \cdot (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}})$$

Vektorski proizvod vektorom momenta $\vec{\mathbf{h}}$:

$$\ddot{\vec{\mathbf{r}}} \times \vec{\mathbf{h}} = -\frac{GM}{r^3} \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{h}}$$

- izraz sa desne strane:

$$\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{h}} = \vec{\mathbf{r}} \times (\vec{\mathbf{r}} \times \dot{\vec{\mathbf{r}}}) = \vec{\mathbf{r}} \cdot (\vec{\mathbf{r}} \cdot \dot{\vec{\mathbf{r}}}) - \dot{\vec{\mathbf{r}}} \cdot (\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{r}})$$

- izraz $(\vec{\mathbf{r}} \cdot \dot{\vec{\mathbf{r}}})$ je već definisan:

$$\vec{\mathbf{r}} \cdot \dot{\vec{\mathbf{r}}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{r}}}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{r \cdot r}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{r^2}{2}\right) = r \cdot \dot{r}$$

- izraz $(\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{r}})$:

$$(\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{r}}) = r \cdot r \cdot \cos 0 = r \cdot r = r^2$$

Osobine normalnog satelitskog kretanja

$$\vec{\mathbf{a}} \times (\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}}) = \vec{\mathbf{b}} \cdot (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{c}}) - \vec{\mathbf{c}} \cdot (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}})$$

Vektorski proizvod vektorom momenta $\vec{\mathbf{h}}$:

$$\ddot{\vec{\mathbf{r}}} \times \vec{\mathbf{h}} = -\frac{GM}{r^3} \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{h}}$$

- izraz sa desne strane:

$$\boxed{\vec{\mathbf{r}} \times \dot{\vec{\mathbf{r}}} = \vec{\mathbf{h}}}$$

$$\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{h}} = \vec{\mathbf{r}} \times (\vec{\mathbf{r}} \times \dot{\vec{\mathbf{r}}}) = \vec{\mathbf{r}} \cdot (\vec{\mathbf{r}} \cdot \dot{\vec{\mathbf{r}}}) - \dot{\vec{\mathbf{r}}} \cdot (\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{r}})$$

- izraz $(\vec{\mathbf{r}} \cdot \dot{\vec{\mathbf{r}}})$ je već definisan:

$$\vec{\mathbf{r}} \cdot \dot{\vec{\mathbf{r}}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{r}}}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{r \cdot r}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{r^2}{2}\right) = r \cdot \dot{r}$$

- izraz $(\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{r}})$:

$$(\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{r}}) = r \cdot r \cdot \cos 0 = r \cdot r = r^2$$

Osobine normalnog satelitskog kretanja

$$\boxed{\vec{\mathbf{a}} \times (\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}}) = \vec{\mathbf{b}} \cdot (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{c}}) - \vec{\mathbf{c}} \cdot (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}})}$$

Vektorski proizvod vektorom momenta $\vec{\mathbf{h}}$:

$$\ddot{\vec{\mathbf{r}}} \times \vec{\mathbf{h}} = -\frac{GM}{r^3} \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{h}}$$

- izraz sa desne strane:

$$\boxed{\vec{\mathbf{r}} \times \dot{\vec{\mathbf{r}}} = \vec{\mathbf{h}}} \quad \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{h}} = \vec{\mathbf{r}} \times (\vec{\mathbf{r}} \times \dot{\vec{\mathbf{r}}}) = \vec{\mathbf{r}} \cdot \boxed{(\vec{\mathbf{r}} \cdot \dot{\vec{\mathbf{r}}})} - \dot{\vec{\mathbf{r}}} \cdot \boxed{(\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{r}})}$$

- izraz $(\vec{\mathbf{r}} \cdot \dot{\vec{\mathbf{r}}})$ je već definisan:

$$\vec{\mathbf{r}} \cdot \dot{\vec{\mathbf{r}}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{r}}}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{r \cdot r}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{r^2}{2}\right) = \boxed{r \cdot \dot{r}}$$

- izraz $(\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{r}})$:

$$(\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{r}}) = r \cdot r \cdot \cos 0 = r \cdot r = \boxed{r^2}$$

Osobine normalnog satelitskog kretanja

Vektorski proizvod vektorom momenta $\vec{\mathbf{h}}$:

$$\ddot{\vec{\mathbf{r}}} \text{ x } \vec{\mathbf{h}} = -\frac{GM}{r^3}\vec{\mathbf{r}} \text{ x } \vec{\mathbf{h}} \;\; \rightarrow \;\; \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{\mathbf{r}}} \text{ x } \vec{\mathbf{h}}\right) = -\frac{GM}{r^3}(\vec{\mathbf{r}} \cdot r \cdot \dot{r} - \dot{\vec{\mathbf{r}}} \cdot r^2)$$

- nakon sređivanja:

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{\mathbf{r}}} \text{ x } \vec{\mathbf{h}}\right) = \frac{GM}{r^2}(\dot{\vec{\mathbf{r}}} \cdot r - \vec{\mathbf{r}} \cdot \dot{r})$$

- za desnu stranu jednakosti možemo pisati:

$$\frac{d}{dt}\left(GM\frac{\vec{\mathbf{r}}}{r}\right) = GM \cdot (-1)r^{-2}\,\dot{r}\,\vec{\mathbf{r}} + \frac{GM}{r}\dot{\vec{\mathbf{r}}} = \frac{GM}{r^2}r\dot{\vec{\mathbf{r}}} - \frac{GM}{r^2}\dot{r}\,\vec{\mathbf{r}} = \frac{GM}{r^2}(\dot{\vec{\mathbf{r}}} \cdot r - \vec{\mathbf{r}} \cdot \dot{r})$$

Osobine normalnog satelitskog kretanja

Vektorski proizvod vektorom momenta $\vec{\mathbf{h}}$:

$$\ddot{\vec{\mathbf{r}}} \times \vec{\mathbf{h}} = -\frac{GM}{r^3}\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{h}} \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{\mathbf{r}}} \times \vec{\mathbf{h}}\right) = -\frac{GM}{r^3}\left(\vec{\mathbf{r}} \cdot r \cdot \dot{r} - \dot{\vec{\mathbf{r}}} \cdot r^2\right)$$

- nakon sređivanja:

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{\mathbf{r}}} \times \vec{\mathbf{h}}\right) = \frac{GM}{r^2}\left(\dot{\vec{\mathbf{r}}} \cdot r - \vec{\mathbf{r}} \cdot \dot{r}\right)$$

- za desnu stranu jednakosti možemo pisati:

$$\frac{d}{dt}\left(GM\frac{\vec{\mathbf{r}}}{r}\right) = GM \cdot (-1)r^{-2}\,\dot{r}\,\vec{\mathbf{r}} + \frac{GM}{r}\dot{\vec{\mathbf{r}}} = \frac{GM}{r^2}r\dot{\vec{\mathbf{r}}} - \frac{GM}{r^2}\dot{r}\,\vec{\mathbf{r}} = \frac{GM}{r^2}\left(\dot{\vec{\mathbf{r}}} \cdot r - \vec{\mathbf{r}} \cdot \dot{r}\right)$$

Osobine normalnog satelitskog kretanja

Vektorski proizvod vektorom momenta $\vec{\mathbf{h}}$:

$$\ddot{\vec{\mathbf{r}}} \times \vec{\mathbf{h}} = -\frac{GM}{r^3}\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{h}} \;\rightarrow\; \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{\mathbf{r}}} \times \vec{\mathbf{h}}\right) = \frac{d}{dt}\left(GM\frac{\vec{\mathbf{r}}}{r}\right) \;\rightarrow\; \boxed{\dot{\vec{\mathbf{r}}} \times \vec{\mathbf{h}} - GM\frac{\vec{\mathbf{r}}}{r} = \vec{\mathbf{q}} = const}$$

Konstantni vektor $\vec{\mathbf{q}}$ naziva se Hamiltonovim vektorom.

Hamiltonov vektor leži u orbitalnoj ravni jer se dobija kao linearna kombinacija vektora položaja i vektora brzine koji takođe leže u orbitalnoj ravni.

Osobine normalnog satelitskog kretanja

Na osnovu integrala energije, momenta količine kretanja i Hamiltonovog integrala može se zaključiti:

- Položaj i brzina kretanja satelita oko Zemlje su takvi da mu je u svakom trenutku vremena očuvana ukupna mehanička energija
- Orbitalna ravan u kojoj se odvija kretanje satelita prolazi kroz centar mase Zemlje i ima konstantnu orijentaciju u odnosu na inercijalni prostor
- Satelitska orbita leži u orbitalnoj ravni i u okviru nje ima konstantnu orijentaciju

Opšti oblik satelitskih orbita

Geometrijski oblik satelitskih orbita → matematičke manipulacije izraza za Hamiltonov vektor $\vec{\mathbf{q}}$.

Skalarni proizvod vektorom položaja $\vec{\mathbf{r}}$:

$$\vec{\mathbf{r}} \cdot (\dot{\vec{\mathbf{r}}} \times \vec{\mathbf{h}}) - GM\frac{\vec{\mathbf{r}}^2}{r} = \vec{\mathbf{q}} \cdot \vec{\mathbf{r}}$$

- koristimo sledeće izraze:

$$\vec{\mathbf{r}}^2 = \vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{r}} = r \cdot r = r^2, \qquad \vec{\mathbf{q}} \cdot \vec{\mathbf{r}} = q \cdot r \cdot \cos(\measuredangle(\vec{\mathbf{q}}, \vec{\mathbf{r}}))$$

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \left(\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}}\right) = \left(\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}\right) \cdot \vec{\mathbf{c}} \;\; \rightarrow \;\; \vec{\mathbf{r}} \cdot \left(\dot{\vec{\mathbf{r}}} \times \vec{\mathbf{h}}\right) = \left(\vec{\mathbf{r}} \times \dot{\vec{\mathbf{r}}}\right) \cdot \vec{\mathbf{h}}$$

- na osnovu izraza $\vec{\mathbf{r}} \times \dot{\vec{\mathbf{r}}} = \vec{\mathbf{h}}$ sledi:

$$\vec{\mathbf{r}} \cdot \left(\dot{\vec{\mathbf{r}}} \times \vec{\mathbf{h}}\right) = \left(\vec{\mathbf{r}} \times \dot{\vec{\mathbf{r}}}\right) \cdot \vec{\mathbf{h}} = \vec{\mathbf{h}} \cdot \vec{\mathbf{h}} = h^2$$

Opšti oblik satelitskih orbita

Geometrijski oblik satelitskih orbita → matematičke manipulacije izraza za Hamiltonov vektor $\vec{\mathbf{q}}$.

Skalarni proizvod vektorom položaja $\vec{\mathbf{r}}$:

$$\vec{\mathbf{r}} \cdot \left(\dot{\vec{\mathbf{r}}} \times \vec{\mathbf{h}}\right) - GM\frac{\vec{\mathbf{r}}^2}{r} = \vec{\mathbf{q}} \cdot \vec{\mathbf{r}} \quad \rightarrow \boxed{h^2 - GM\frac{r^2}{r} = q \cdot r \cdot \cos(\measuredangle(\vec{\mathbf{q}}, \vec{\mathbf{r}}))}$$

- ako važi $\cos\left(\measuredangle(\vec{\mathbf{q}}, \vec{\mathbf{r}})\right) = \cos v$, rešavanjem po r sledi:

$$h^2 - GM\frac{r^2}{r} = q \cdot r \cdot \cos v \quad \rightarrow \quad h^2 = GMr + q \cdot r \cdot \cos v \quad \rightarrow \quad r = \frac{h^2}{GM + q\cos v}$$

- podelimo razlomak sa GM:

$$r = \frac{h^2/GM}{1 + q\cos v/GM}$$

Opšti oblik satelitskih orbita

Geometrijski oblik satelitskih orbita → matematičke manipulacije izraza za Hamiltonov vektor $\vec{\mathbf{q}}$.

Skalarni proizvod vektorom položaja $\vec{\mathbf{r}}$:

$$\vec{\mathbf{r}} \cdot (\dot{\vec{\mathbf{r}}} \times \vec{\mathbf{h}}) - GM\frac{\vec{\mathbf{r}}^2}{r} = \vec{\mathbf{q}} \cdot \vec{\mathbf{r}} \quad \rightarrow \quad r = \frac{h^2/GM}{1 + q\cos v\,/GM}$$

- uvodimo oznake $p = h^2/GM$ i $e = q/GM$:

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + e\cos v}}$$

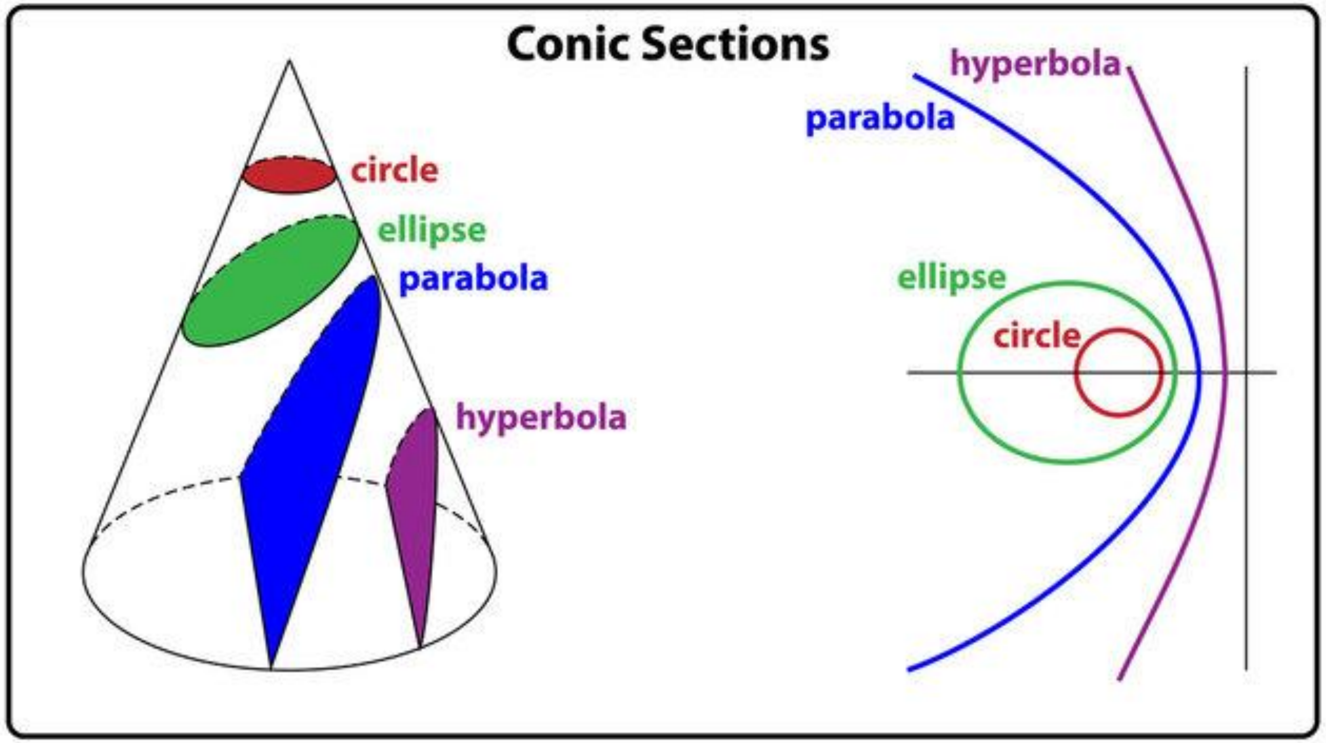
POLARNA JEDNAČINA KRIVE nastale konusnim presekom

Opšti oblik satelitskih orbita

POLARNA JEDNAČINA KRIVE nastale konusnim presekom

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v}$$

- parametar krive - p
- prvi numerički ekscentricitet - e
  - $e = 0$ – kružnica
  - $0 < e < 1$ – elipsa
  - $e = 1$ – parabola
  - $e > 1$ – hiperbola

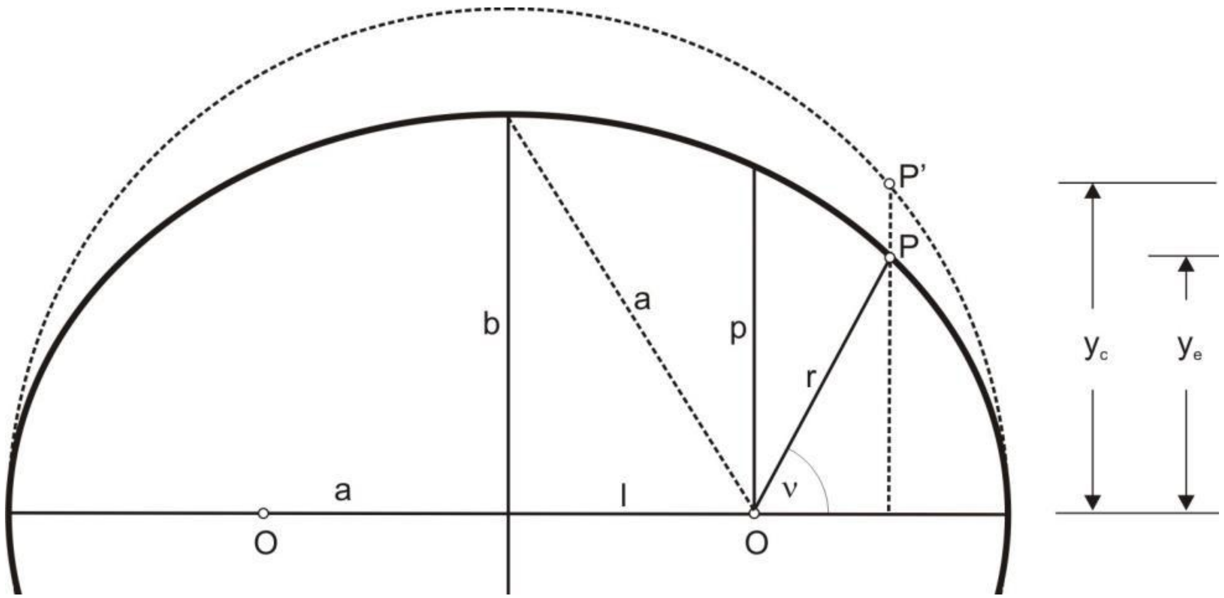


Opšti oblik satelitskih orbita

Opšti oblik satelitske putanje u problemu dva tela opisuje Keplerova elipsa čija je matematička formulacija data jednačinom:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v}$$

- parametar krive - p
- prvi numerički ekscentricitet - e
  - $e = 0$ – kružnica
  - $\mathbf{0 < e < 1}$ **– elipsa**
  - $e = 1$ – parabola
  - $e > 1$ – hiperbola



Opšti oblik satelitskih orbita

<u>Elipsa</u>: Geometrijsko mesto tačaka sa osobinom da je zbir njihovih rastojanja do jedne i druge žiže konstantan, i iznosi 2a.

Pored velike poluose a i male poluose b, elipsu karakterišu i druge veličine:

- spljoštenost

  $f = (a - b)/a$

- linearni ekscentricitet

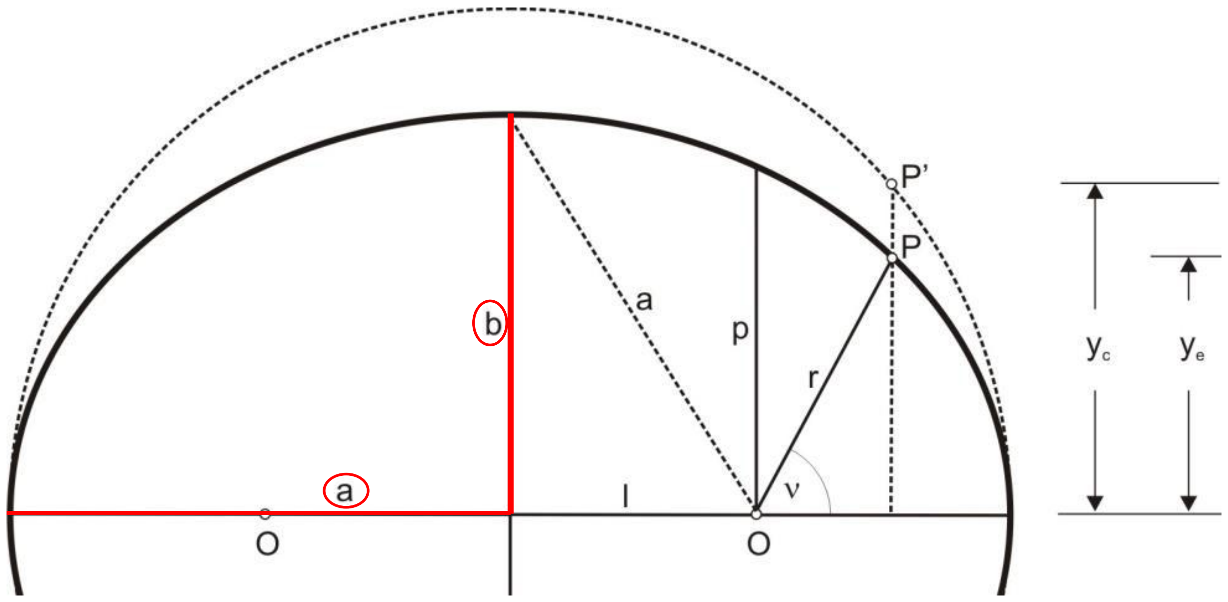
  $l = \sqrt{a^2 - b^2} = ae$

- parametar elipse

  $p = b^2/a = a(1 - e^2)$

- prvi numerički ekscentricitet

  $e^2 = (a^2 - b^2)/a^2$



Opšti oblik satelitskih orbita

<u>Elipsa</u>: Geometrijsko mesto tačaka sa osobinom da je zbir njihovih rastojanja do jedne i druge žiže konstantan, i iznosi 2a.

Pored velike poluose a i male poluose b, elipsu karakterišu i druge veličine:

- spljoštenost

  $f = (a - b)/a$

- linearni ekscentricitet

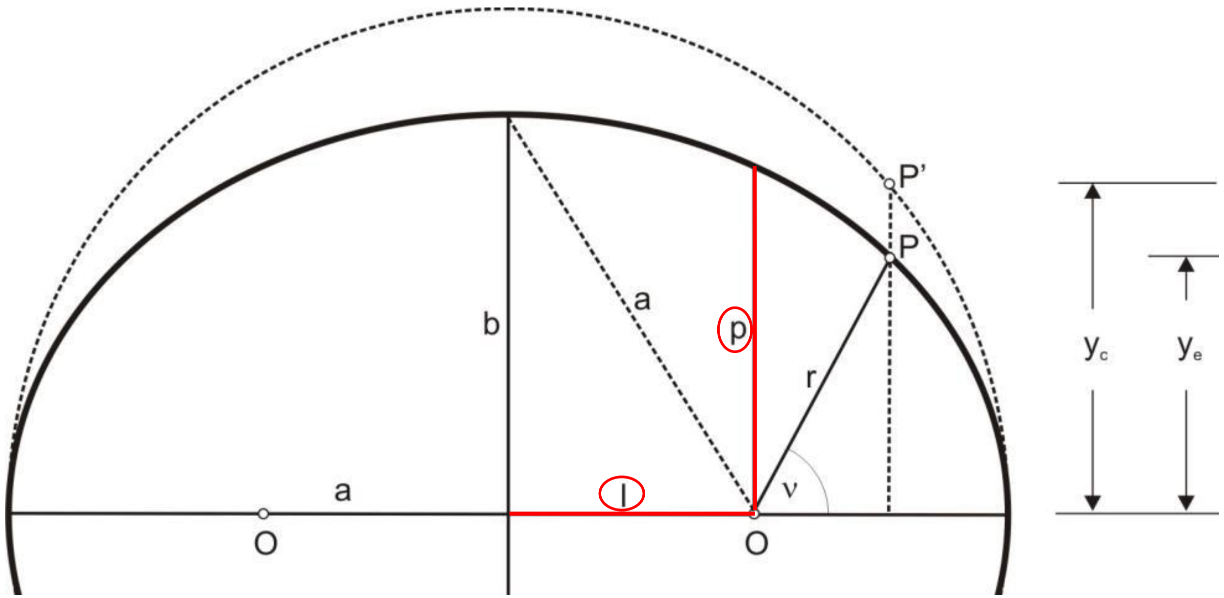
  $l = \sqrt{a^2 - b^2} = ae$

- parametar elipse

  $p = b^2/a = a(1 - e^2)$

- prvi numerički ekscentricitet

  $e^2 = (a^2 - b^2)/a^2$



Opšti oblik satelitskih orbita

Elipsa: Geometrijsko mesto tačaka sa osobinom da je zbir njihovih rastojanja do jedne i druge žiže konstantan, i iznosi 2a.

Pored velike poluose a i male poluose b, elipsu karakterišu i druge veličine:

- spljoštenost

  $f = (a-b)/a$

- linearni ekscentricitet

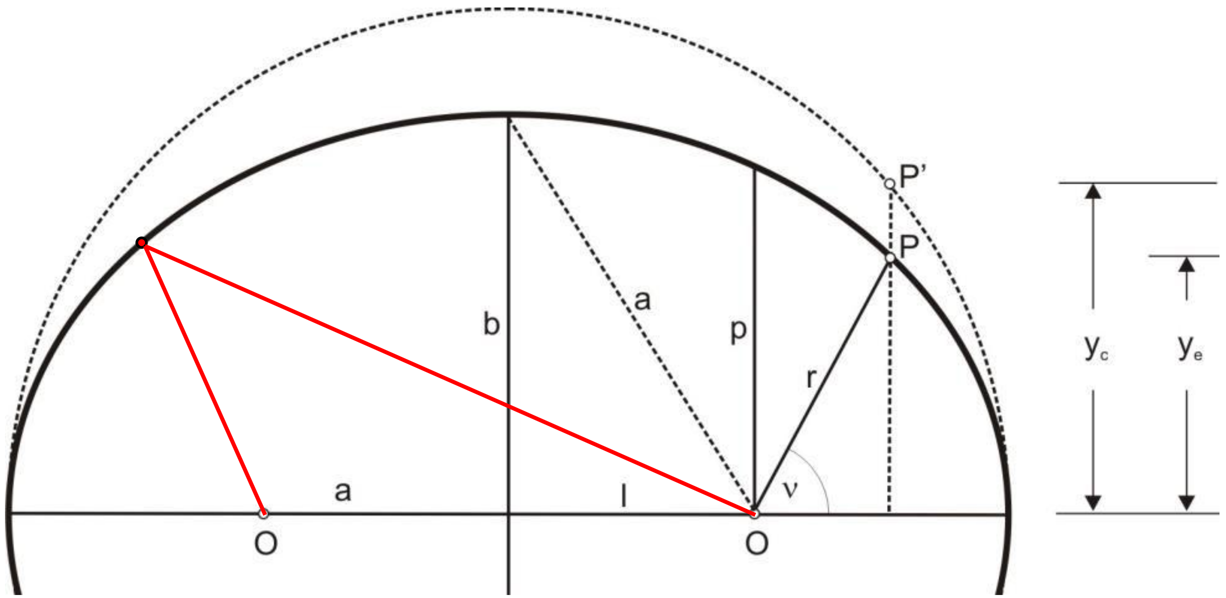
  $l = \sqrt{a^2 - b^2} = ae$

- parametar elipse

  $p = b^2/a = a(1-e^2)$

- prvi numerički ekscentricitet

  $e^2 = (a^2 - b^2)/a^2$



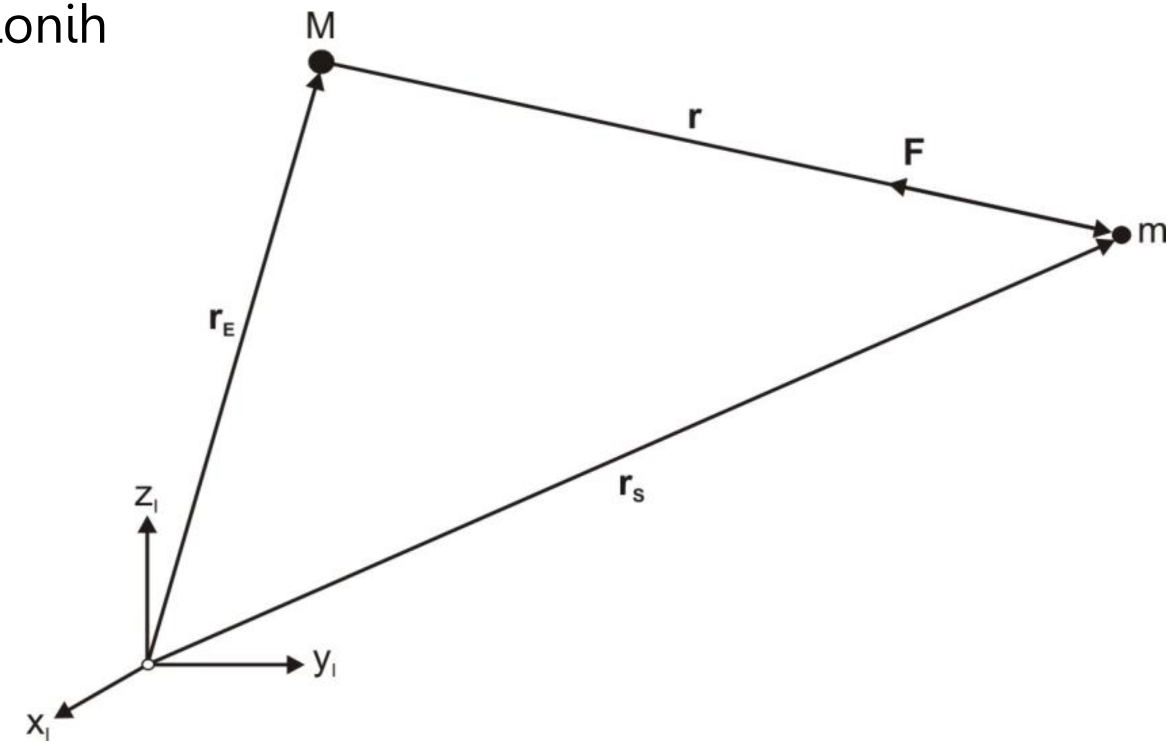
Keplerovi orbitalni elementi

- Jednačina normalnog satelitskog kretanja:

$$\ddot{\vec{\mathbf{r}}} = -\frac{GM}{r^3}\vec{\mathbf{r}}$$

- Integracija prethodne jednačine → 6 integracionih konstanti:

$$\vec{\mathbf{r}}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}, \qquad \dot{\vec{\mathbf{r}}}_0 = \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{bmatrix}$$



Keplerovi orbitalni elementi

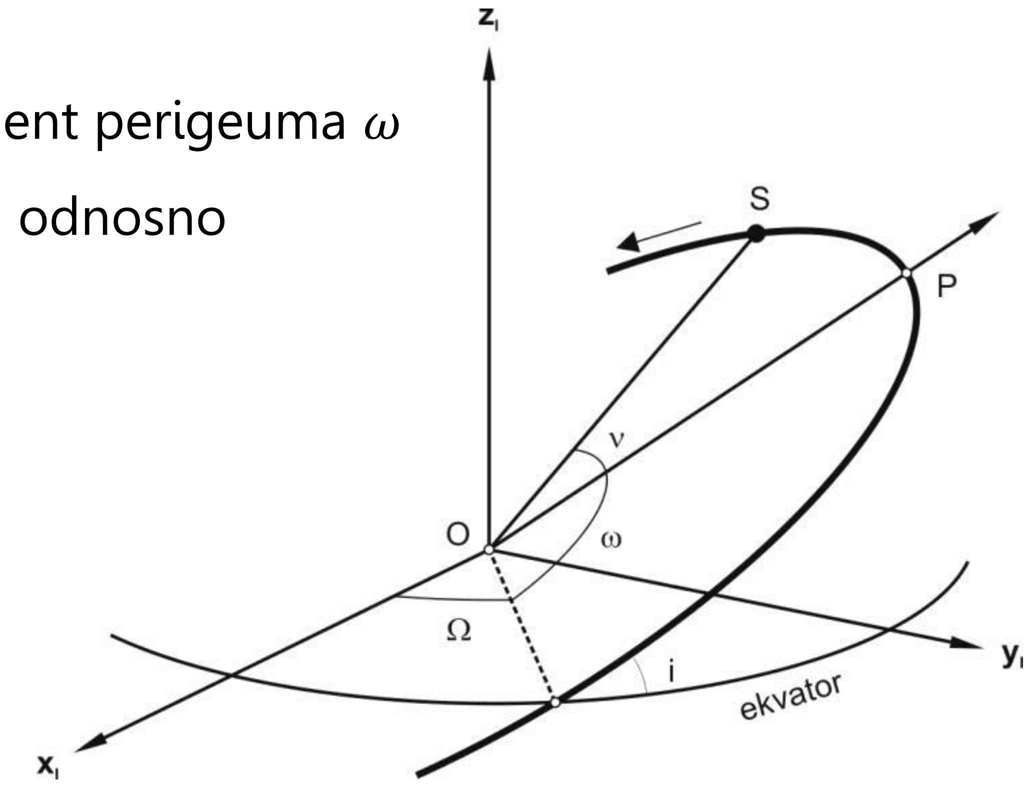
- Jedan skup integracionih konstanti može zameniti drugi pod uslovom da između ovih skupova postoji obostrano jednoznačna veza.
- Alternativni i geometrijski mnogo očigledniji skup integracionih konstanti predstavljaju Keplerovi elementi.
- Pet Keplerovih elemenata definiše veličinu, oblik i orijentaciju satelitske orbite, dok šesti određuje mesto satelita na putanji.
- Pomoću Keplerovih elemenata se mogu odrediti položaj i brzina satelita za bilo koji trenutak vremena.

Keplerovi orbitalni elementi

Orbita satelita S u inercijalnom referentnom sistemu sa početkom u centru mase Zemlje:

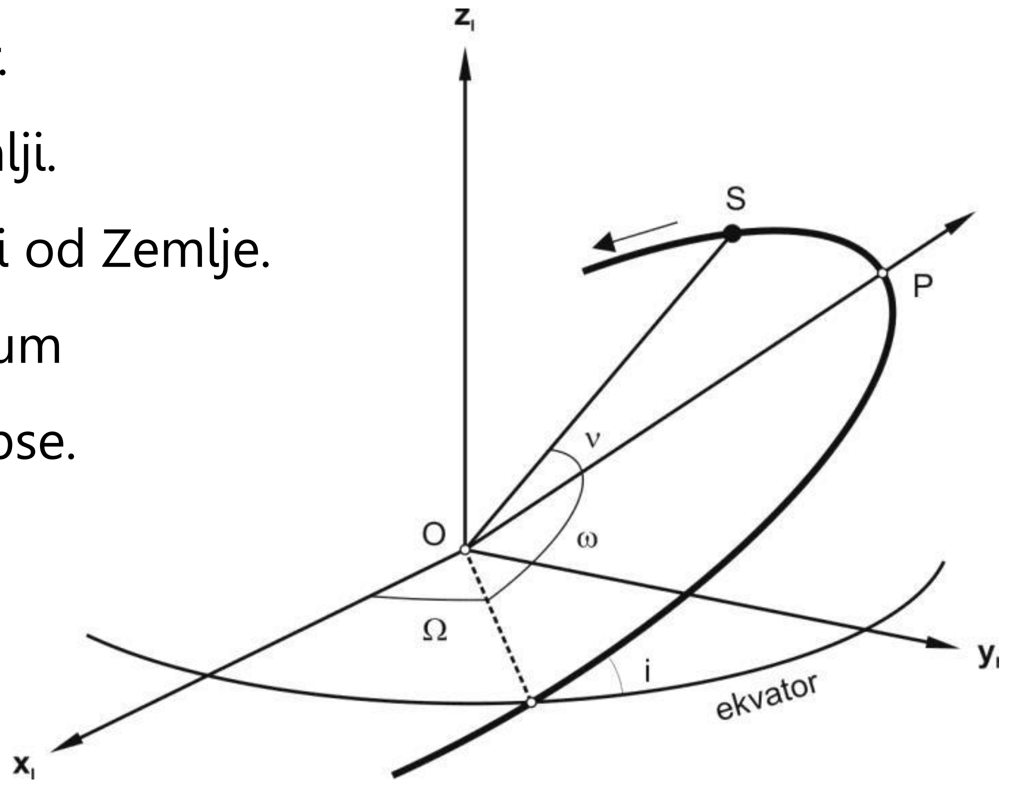
Šest Keplerovih elemenata:

- velika poluosa a i ekscentricitet e
  (oblik i veličina eliptične putanje)
- inklinacija i, rektascenzija uzlaznog čvora Ω i argument perigeuma ω
  (orijentacija orbitalne ravni u inercijalnom prostoru, odnosno orijentacija eliptične putanje u orbitalnoj ravni)
- prava (istinita) anomalija v
  (položaj satelita na eliptičnoj putanji)



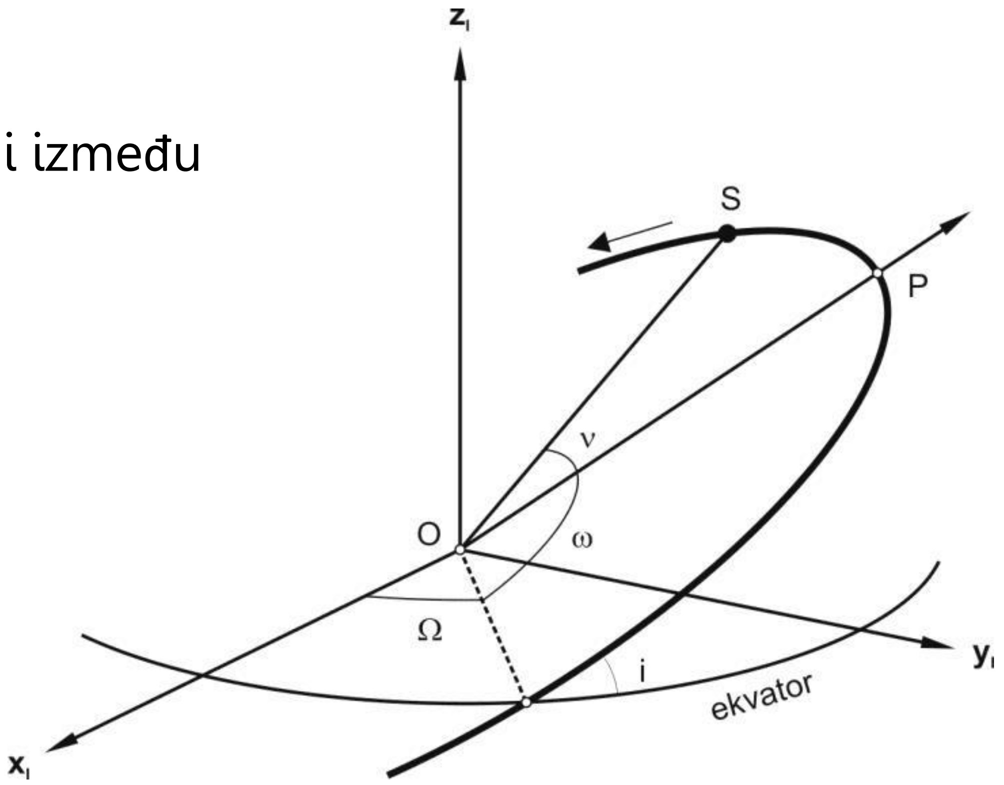
Keplerovi orbitalni elementi

- **Uzlazni čvor**: Tačka u kojoj satelit prolazi kroz ekvatorsku ravan pri svom kretanju iz južne prema severnoj hemisferi.
- **Silazni čvor**: Tačka u kojoj satelit prolazi kroz ekvatorsku ravan pri svom kretanju iz severne prema južnoj hemisferi.
- **Nodalna linija**: Linija koja spaja uzlazni i silazni čvor.
- **Perigeum**: Tačka orbite u kojoj je satelit najbliži Zemlji.
- **Apogeum**: Tačka orbite u kojoj je satelit najudaljeniji od Zemlje.
- **Apsidna linija**: Duž koju definišu perigeum i apogeum
  a koja prolazi kroz geometrijski centar Keplerove elipse.



Keplerovi orbitalni elementi

- **Inklinacija** i: Ugao pod kojim je orbitalna ravan nagnuta u odnosu na ravan ekvatora.
- **Rektascenzija uzlaznog čvora** Ω: Ugao u ravni ekvatora između pravca ka γ tački i pravca ka uzlaznom čvoru satelitske orbite.
- **Argument perigeuma** ω: Ugao u orbitalnoj ravni između pravca ka uzlaznom čvoru i pravca ka perigeumu P.
- **Prava (istinita) anomalija** ν: Ugao u orbitalnoj ravni između pravca ka perigeumu P i pravca ka satelitu S.



Ekscentrična i srednja anomalija

Prava anomalija ne menja se linearno sa vremenom jer se satelit kreće po elipsi promenljivom brzinom u skladu sa drugim Keplerovim zakonom.

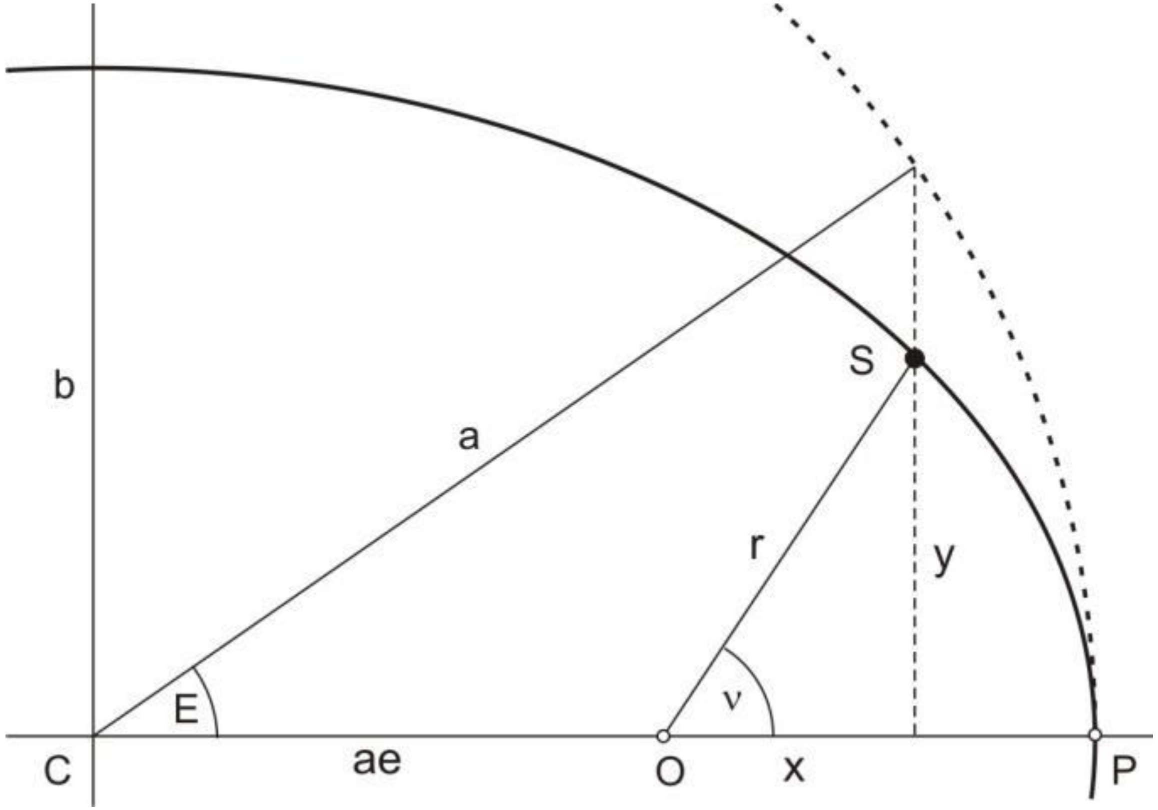
Alternativne veličine:

- **Ekscentrična anomalija** E: Ugao u ravni orbite koga grade pravci iz geometrijskog centra elipse C prema perigeumu P i prema projekciji položaja satelita S na kružnicu s centrom u C i poluprečnika jednakog velikoj poluosi elipse a.
- **Srednja anomalija** M: Negeometrijska veličina koja se definiše kao prava anomalija fiktivnog satelita koji se kreće konstantnom uglovnom brzinom n po kružnoj putanji čiji je centar u žiži elipse, i ima period obilaska T identičan realnom satelitu; srednja anomalija se menja linearno sa vremenom.

- **Ekscentrična anomalija** E: Ugao u ravni orbite koga grade pravci iz geometrijskog centra elipse C prema perigeumu P i prema projekciji položaja satelita S na kružnicu s centrom u C i poluprečnika jednakog velikoj poluosi elipse a.

$$\sin E = \frac{Y}{a}, \qquad \cos E = \frac{X}{a}$$

$$\sin v = \frac{y}{r}, \qquad \cos v = \frac{x}{r}$$



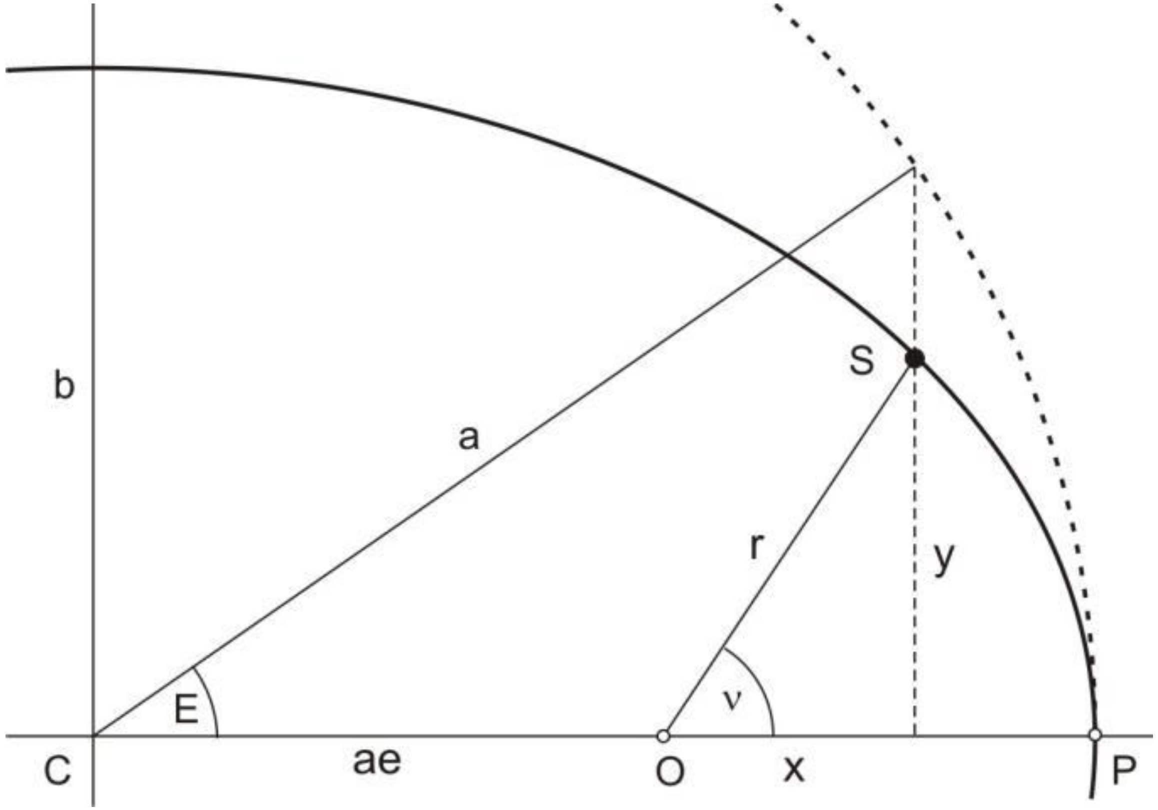
Ekscentrična i srednja anomalija

- **Ekscentrična anomalija** E: Ugao u ravni orbite koga grade pravci iz geometrijskog centra elipse C prema perigeumu P i prema projekciji položaja satelita S na kružnicu s centrom u C i polupréčnika jednakog velikoj poluosi elipse a.

jednačina kružnice:

$x^2 + y^2 = r^2 = a^2$

$y = \sqrt{a^2 - x^2} = Y$



Ekscentrična i srednja anomalija

➢ **Ekscentrična anomalija** E: Ugao u ravni orbite koga grade pravci iz geometrijskog centra elipse C prema perigeumu P i prema projekciji položaja satelita S na kružnicu s centrom u C i poluprečnika jednakog velikoj poluosi elipse a.

jednačina elipse:

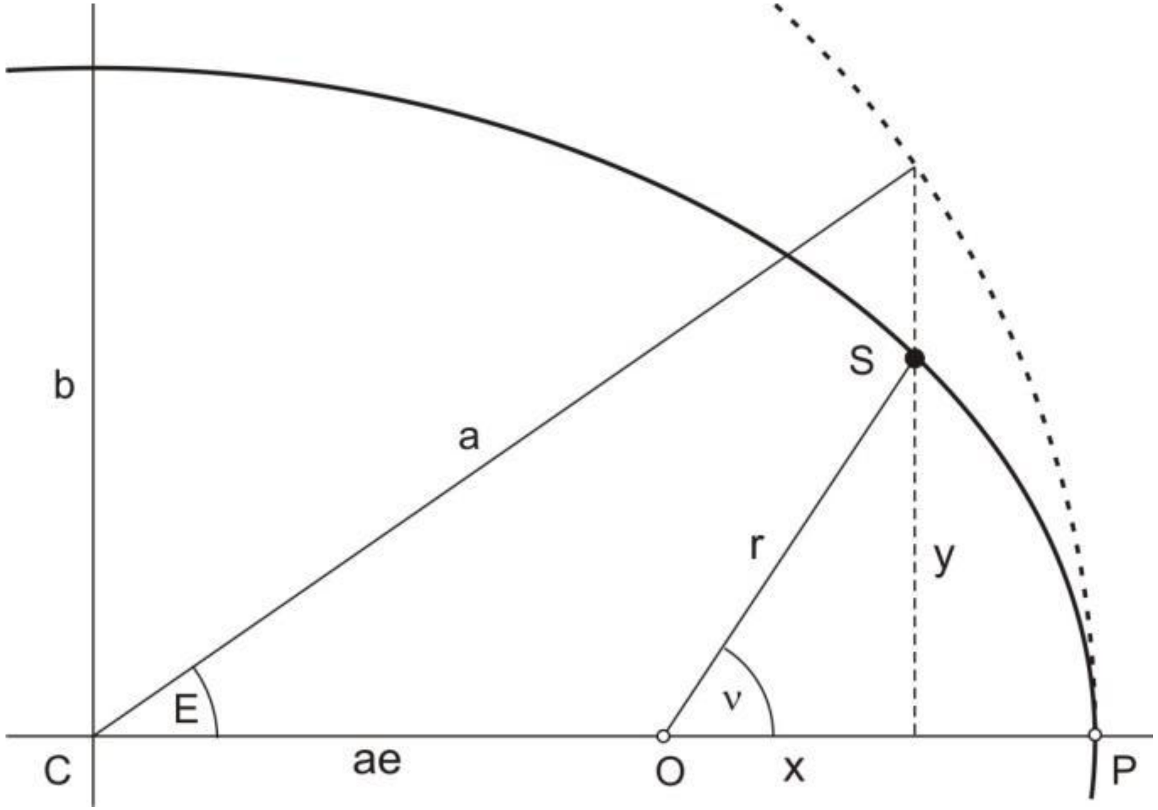
$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

$y^2/b^2 = 1 - x^2/a^2 = (a^2 - x^2)/a^2$

$y^2 = b^2\,(a^2 - x^2)/a^2$

$y = b/a\sqrt{a^2 - x^2}$

$y = (b/a)Y$



Ekscentrična i srednja anomalija

- **Ekscentrična anomalija** E: Ugao u ravni orbite koga grade pravci iz geometrijskog centra elipse C prema perigeumu P i prema projekciji položaja satelita S na kružnicu s centrom u C i poluprečnika jednakog velikoj poluosi elipse a.

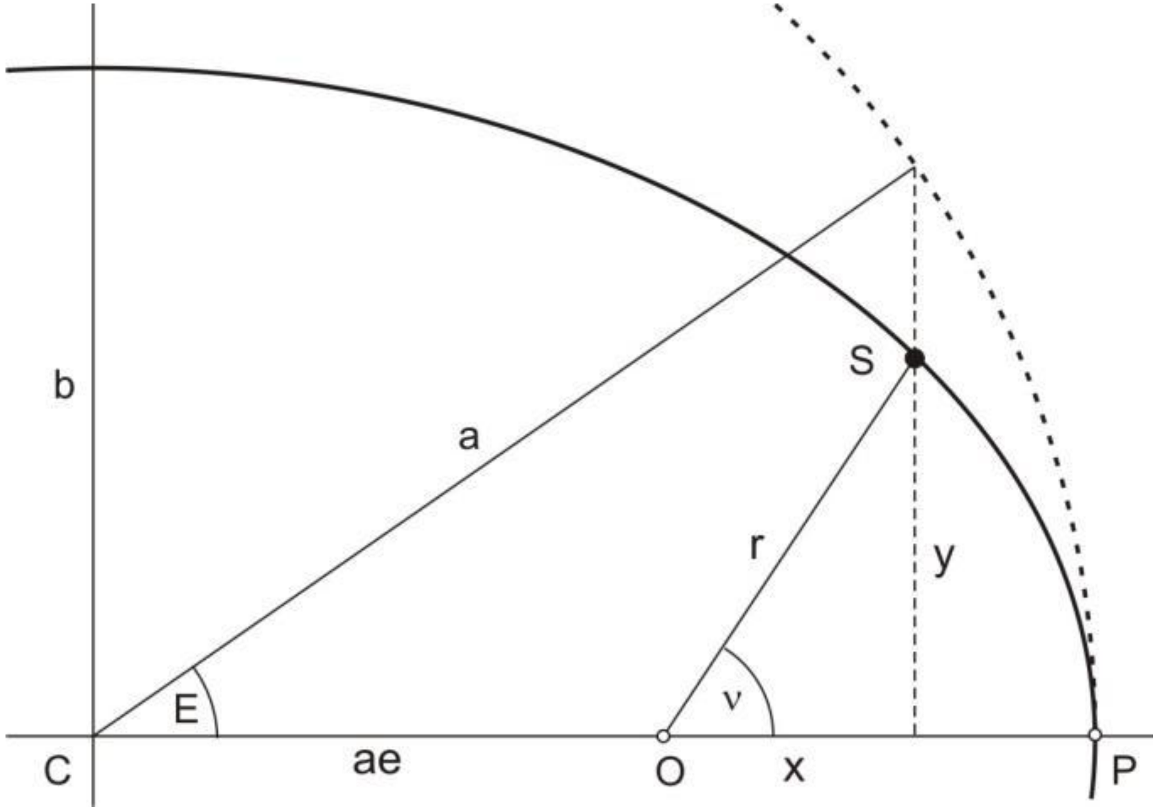
$Y = a \sin E\,, \qquad X = a \cos E$

$y = r \sin v\,, \qquad x = r \cos v$

Takođe važi:

$y = (b/a) a \sin E = b \sin E$

$x = X - ae = a \cos E - ae = a(\cos E - e)$



Ekscentrična i srednja anomalija

- **Ekscentrična anomalija** E: Ugao u ravni orbite koga grade pravci iz geometrijskog centra elipse C prema perigeumu P i prema projekciji položaja satelita S na kružnicu s centrom u C i poluprečnika jednakog velikoj poluosi elipse a.

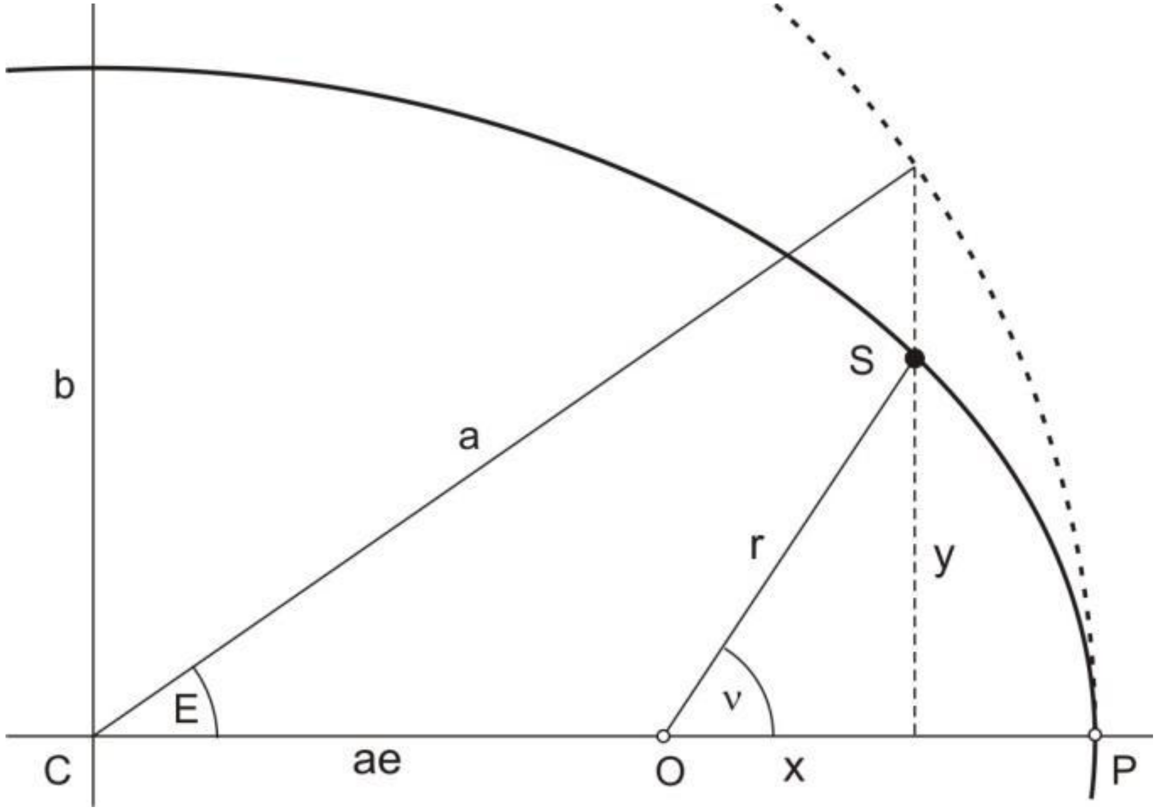
Finalno:

$y = r \sin v = b \sin E = a\sqrt{1 - e^2} \sin E$

$x = r \cos v = a(\cos E - e)$

* iz odnosa $y/x \rightarrow \tan v$

** iz zbira $x^2 + y^2 \rightarrow r$

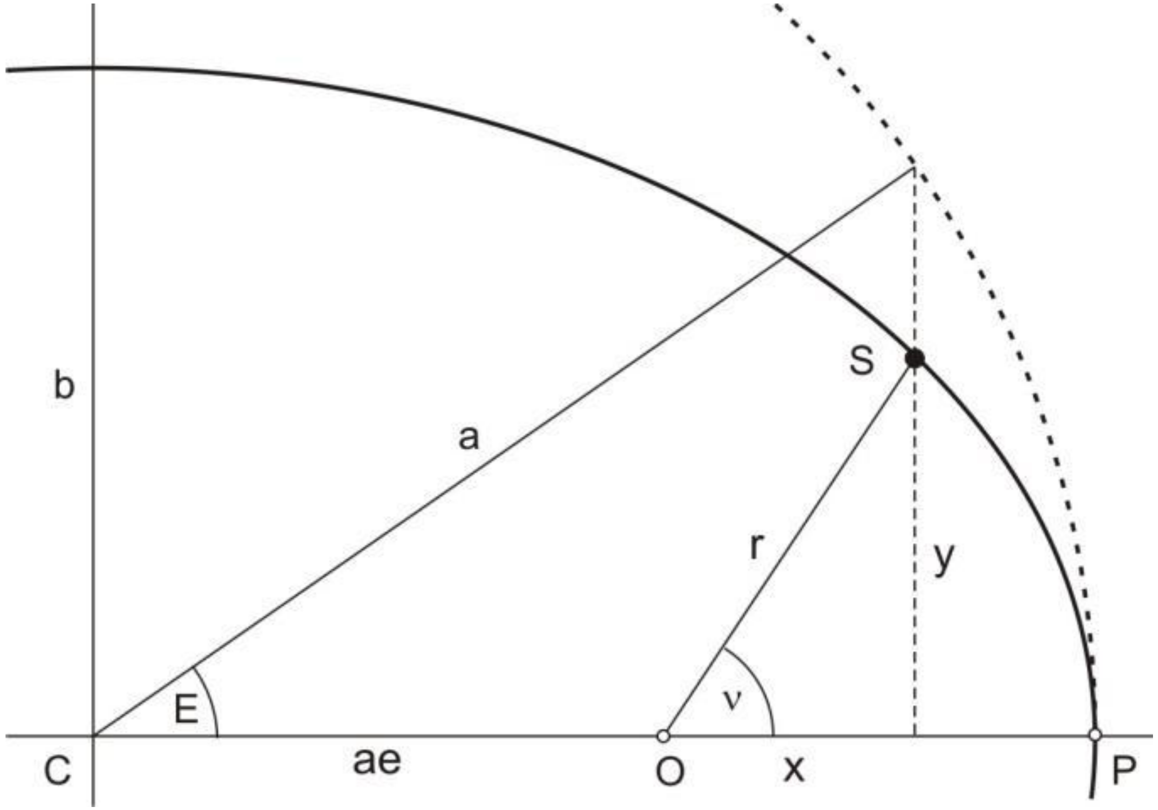


Ekscentrična i srednja anomalija

➢ **Ekscentrična anomalija** E: Ugao u ravni orbite koga grade pravci iz geometrijskog centra elipse C prema perigeumu P i prema projekciji položaja satelita S na kružnicu s centrom u C i poluprečnika jednakog velikoj poluosi elipse a.

$$\tan v = \frac{\sqrt{(1-e^2)}\sin E}{\cos E - e}$$

$$r = a(1 - e\cos E)$$



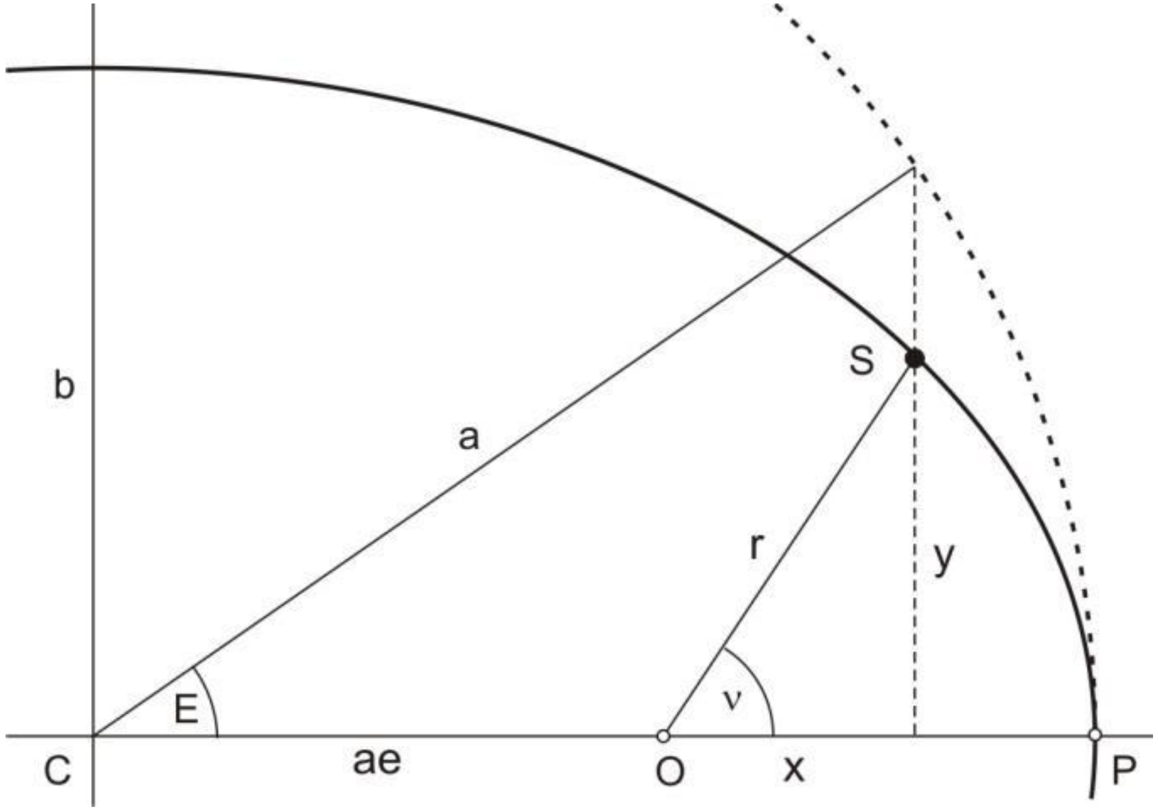
Ekscentrična i srednja anomalija

➢ **Ekscentrična anomalija** E: Ugao u ravni orbite koga grade pravci iz geometrijskog centra elipse C prema perigeumu P i prema projekciji položaja satelita S na kružnicu s centrom u C i poluprečnika jednakog velikoj poluosi elipse a.

Takođe važi:

$$\cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E}$$

$$\tan\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{E}{2}$$



Ekscentrična i srednja anomalija

- **Srednja anomalija** M: Negeometrijska veličina koja se definiše kao prava anomalija fiktivnog satelita koji se kreće konstantnom uglovnom brzinom n po kružnoj putanji čiji je centar u žiži elipse, i ima period obilaska T identičan realnom satelitu; srednja anomalija se menja linearno sa vremenom.

$$M = E - e\sin E$$

(Keplerova jednačina)

Rešenje: iterativno rešavanje ili razvoj u red

Računanje položaja satelita

Skup Keplerovih elemenata ekvivalentan je skupu šest komponenti vektora položaja i brzine:

- Keplerovi elementi:

  $(a, e, i, \Omega, \omega, M)_{t_0}$

- Komponente vektora položaja i brzine:

  $(\vec{\mathbf{r}}_0, \dot{\vec{\mathbf{r}}}_0)_{t_0}$

Veza između navedenih skupova postoji → moguće je određivanje položaja i brzina satelita na osnovu zadatih Keplerovih elemenata, kao i elemenata satelitskih putanja na osnovu poznatih položaja i brzina.

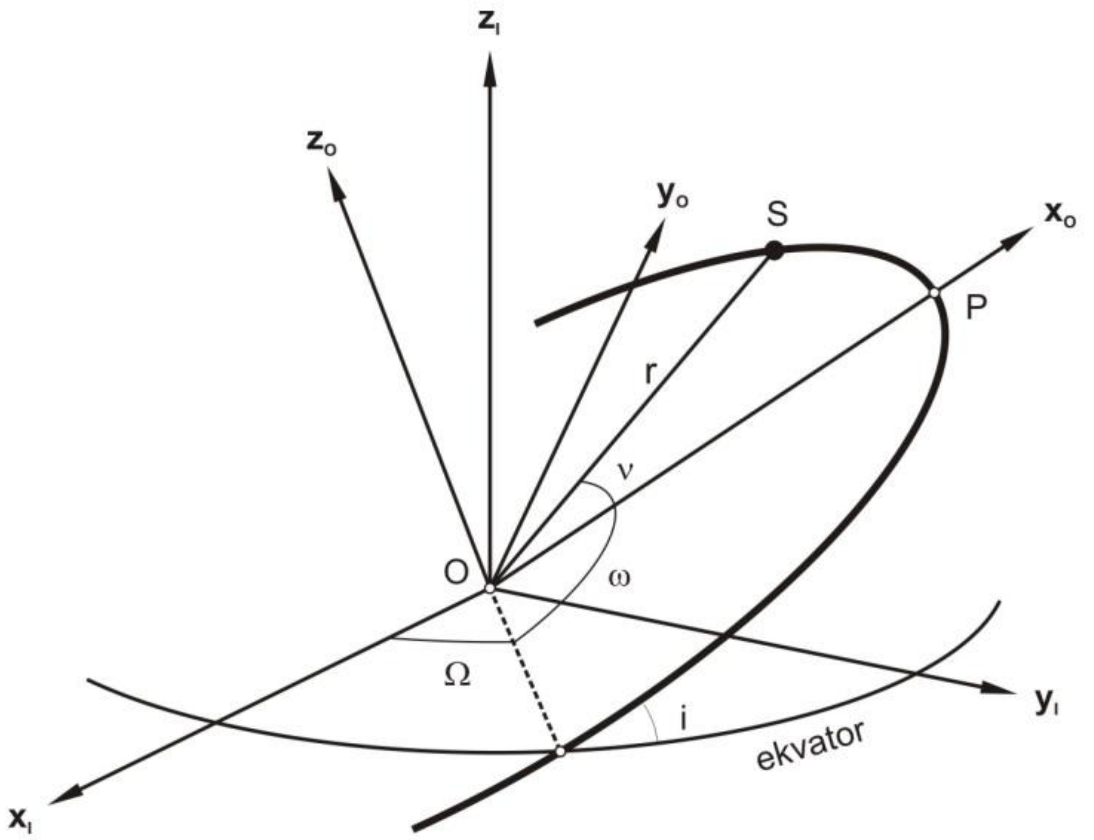
Računanje položaja satelita

Određivanje položaja satelita u inercijalnom koordinatnom sistemu na osnovu Keplerovih elemenata za trenutak vremena t_0:

- Inercijalni koordinatni sistem:

  $(x, y, z)_{\mathrm{I}}$
- Orbitalni koordinatni sistem:

  $(x, y, z)_{\mathrm{O}}$
- Satelit: S
- Zemlja: O



Računanje položaja satelita

Određivanje položaja satelita u inercijalnom koordinatnom sistemu na osnovu Keplerovih elemenata za trenutak vremena t_0:

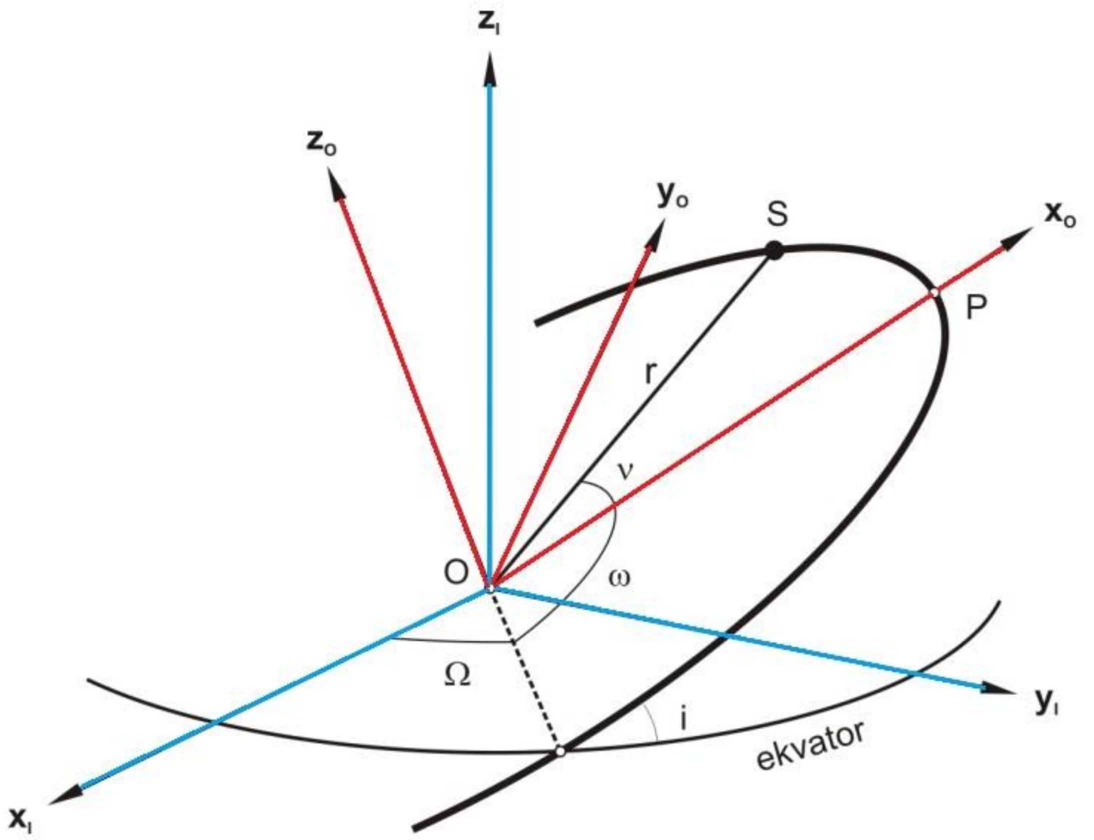
- Inercijalni koordinatni sistem:

  $(x, y, z)_\mathrm{I}$

- Orbitalni koordinatni sistem:

  $(x, y, z)_\mathrm{O}$

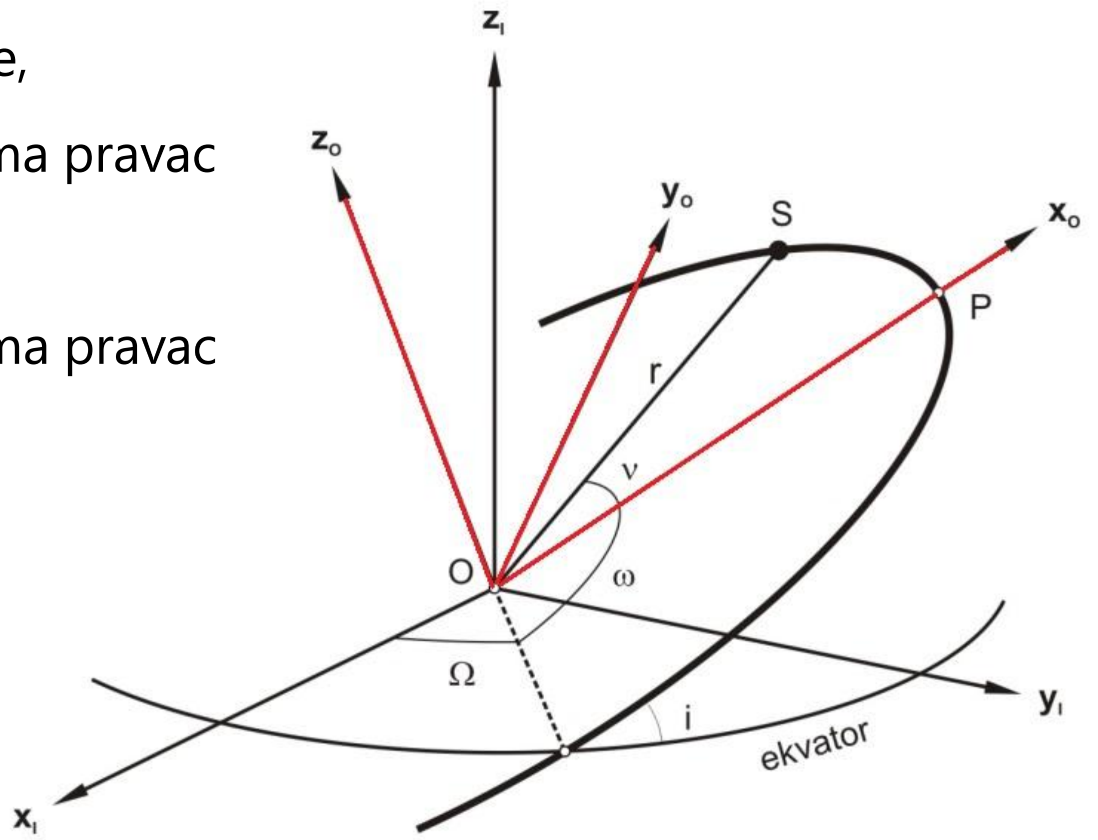
- Satelit: S
- Zemlja: O



Računanje položaja satelita

Određivanje položaja satelita u inercijalnom koordinatnom sistemu na osnovu Keplerovih elemenata za trenutak vremena t_0:

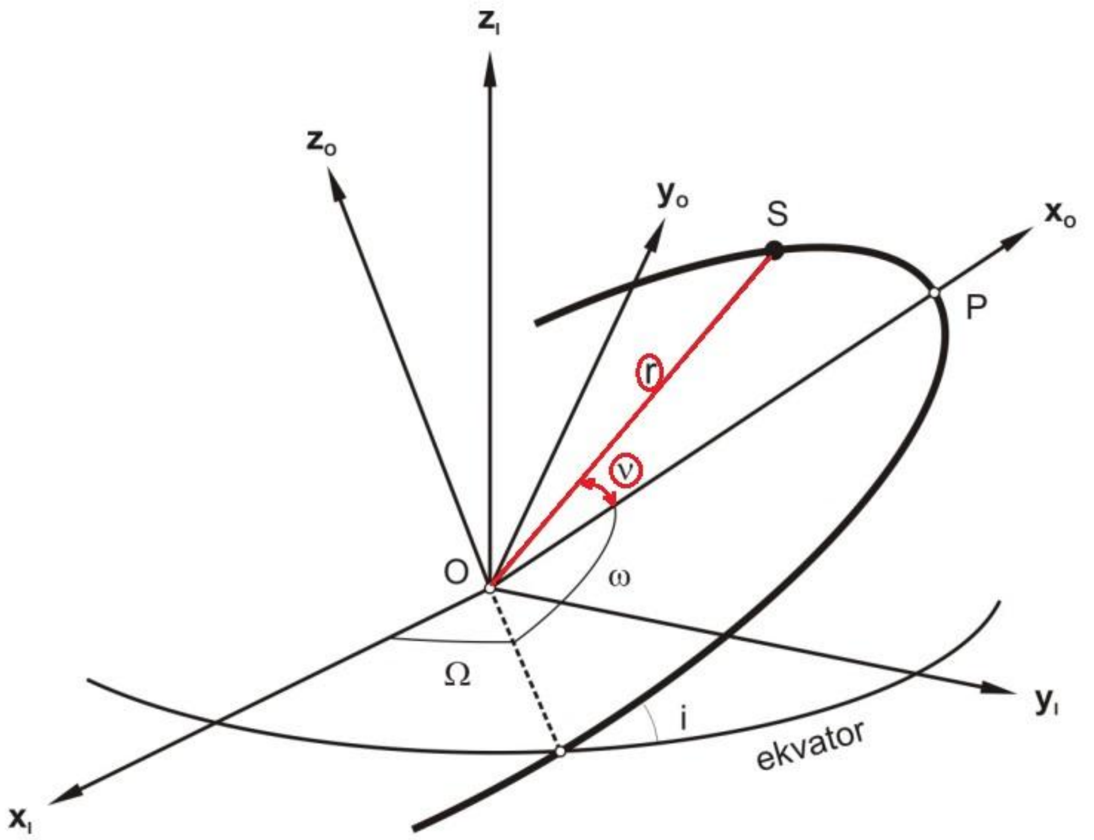
- Definicija orbitalnog koordinatnog sistema:
  - koordinatni početak u centru mase Zemlje,
  - osa x_0 se nalazi u orbitalnoj ravni i zauzima pravac ka perigeumu,
  - osa y_0 se nalazi u orbitalnoj ravni i zauzima pravac upravan na x_0 osu,
  - osa z_0 je upravna na orbitalnu ravan i sa osama x_0 i y_0 formira sistem desne orijentacije.



Računanje položaja satelita

Određivanje položaja satelita u inercijalnom koordinatnom sistemu na osnovu Keplerovih elemenata za trenutak vremena t_0:

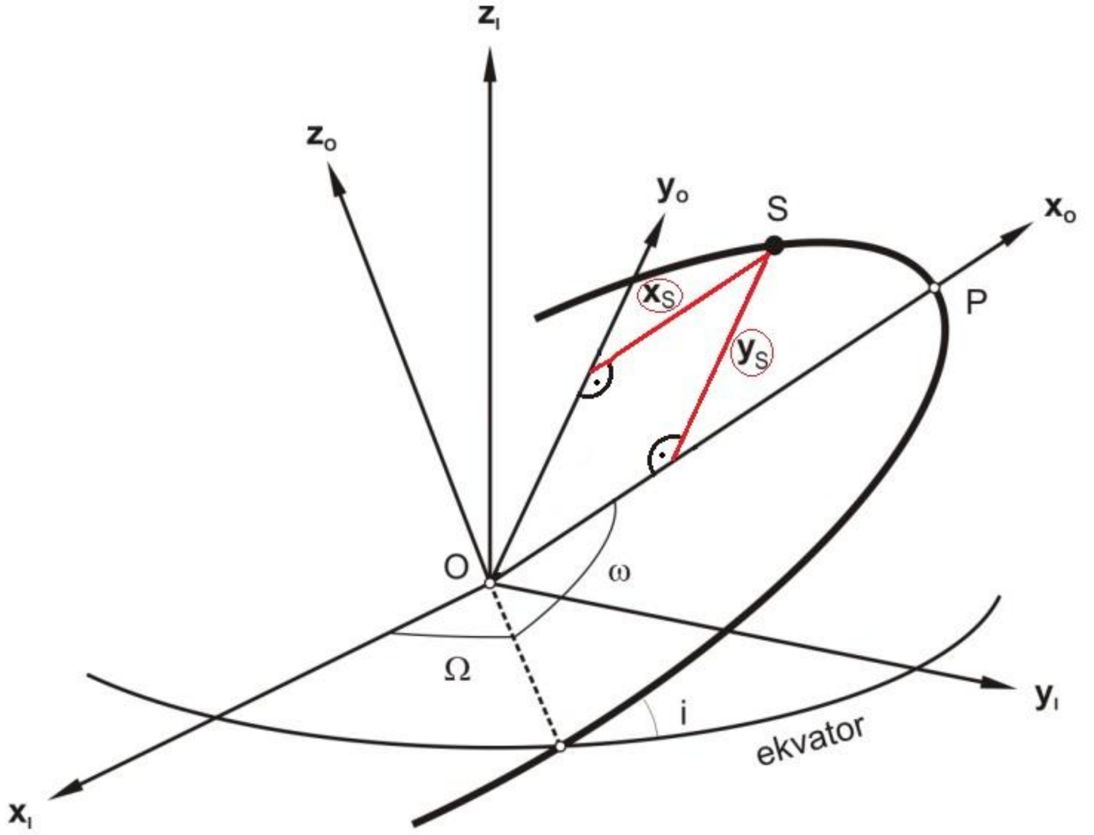
- Položaj satelita u orbitalnom koordinatnom sistemu:
  - polarne koordinate orbitalne ravni: r, v
  - pravougle koordinate: x, y



Računanje položaja satelita

Određivanje položaja satelita u inercijalnom koordinatnom sistemu na osnovu Keplerovih elemenata za trenutak vremena t_0:

- Položaj satelita u orbitalnom koordinatnom sistemu:
  - polarne koordinate orbitalne ravni: r, v
  - pravougle koordinate: x, y

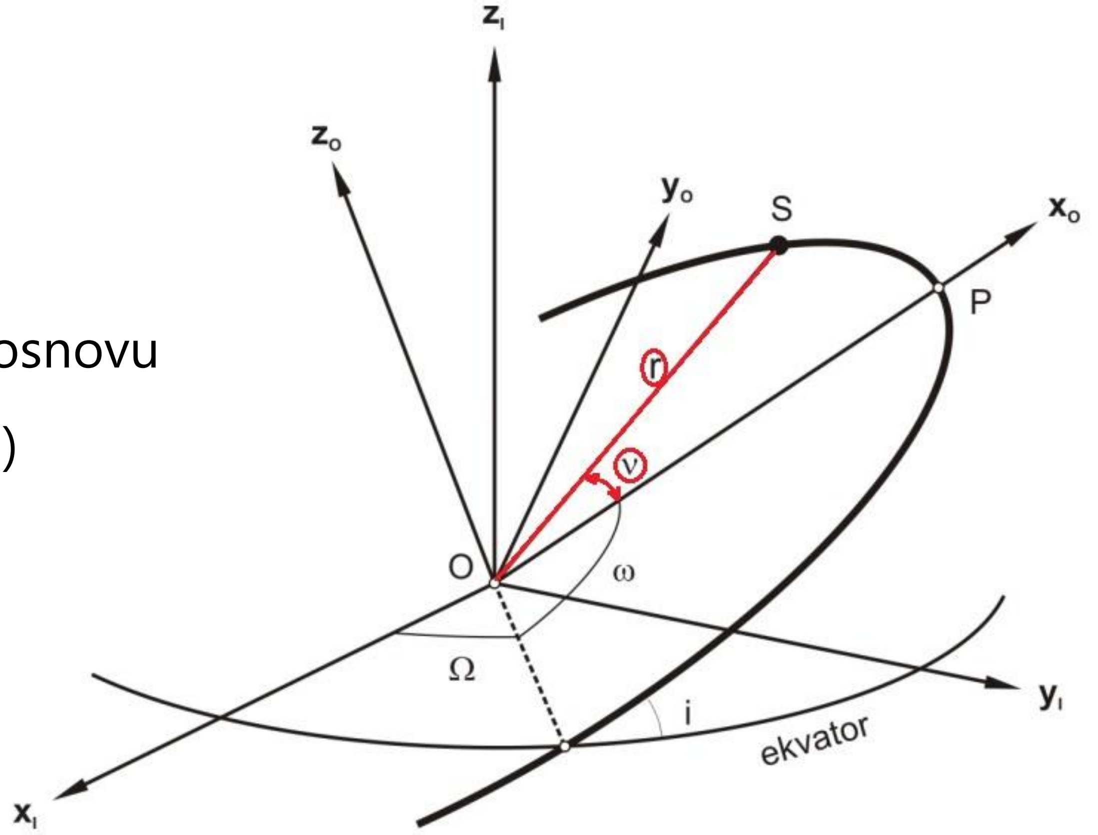


Računanje položaja satelita

Određivanje položaja satelita u inercijalnom koordinatnom sistemu na osnovu Keplerovih elemenata za trenutak vremena t_0:

Dato: $(a, e, i, \Omega, \omega, M)_{t_0}$ $\rightarrow$ Traženo: $\vec{\mathbf{r}}_{\mathrm{I}}$

- Korak 1: određivanje položaja satelita (v, r) u orbitalnom koordinatnom sistemu:
  - određivanje ekscentrične anomalije E na osnovu srednje anomalije M (Keplerova jednačina)
  - Računanje prave anomalije v i rastojanja do satelita r



Računanje položaja satelita

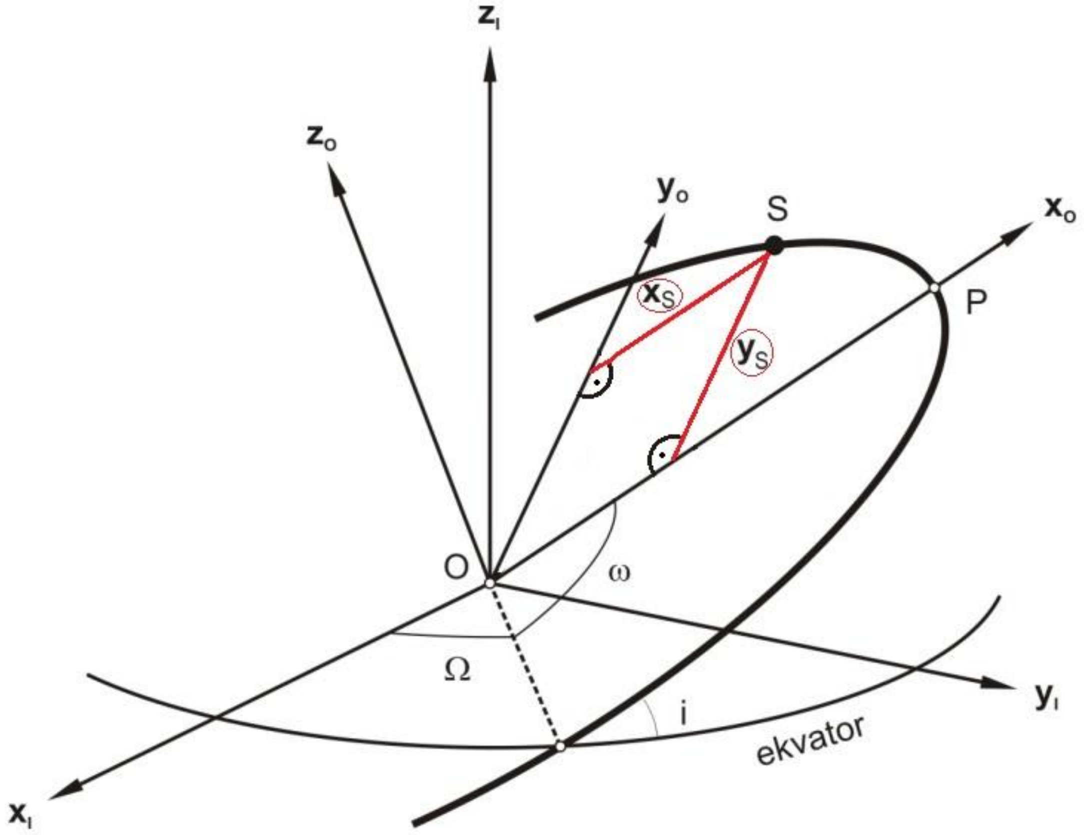
Određivanje položaja satelita u inercijalnom koordinatnom sistemu na osnovu Keplerovih elemenata za trenutak vremena t_0:

Dato: $(a, e, i, \Omega, \omega, M)_{t_0}$ $\rightarrow$ Traženo: $\vec{\mathbf{r}}_{\mathrm{I}}$

- Korak 2: određivanje položaja satelita u orbitalnom koordinatnom sistemu:

  $\vec{\mathbf{r}}_{\mathrm{o}}(x_{\mathrm{o}}, y_{\mathrm{o}}, z_{\mathrm{o}})$

  $x_{\mathrm{o}} = r\cos v\,, y_{\mathrm{o}} = r\sin v\,, z_{\mathrm{o}} = 0$



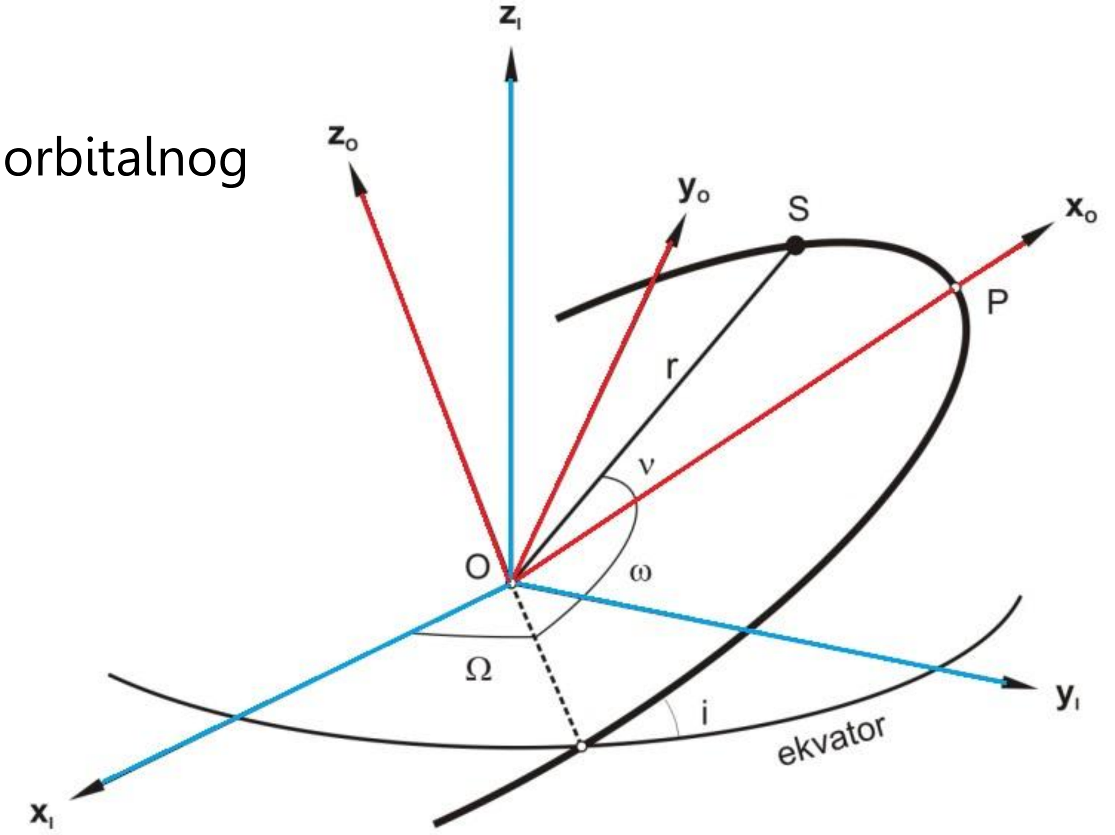
Računanje položaja satelita

Određivanje položaja satelita u inercijalnom koordinatnom sistemu na osnovu Keplerovih elemenata za trenutak vremena t_0:

Dato: $(a, e, i, \Omega, \omega, M)_{t_0}$ $\rightarrow$ Traženo: $\vec{\mathbf{r}}_{\mathrm{I}}$

- Korak 3: transformacija koordinata satelita iz orbitalnog u inercijalni koordinatni sistem:

  3 rotacije: dve oko z_{o} ose i jedna oko x_{o} ose

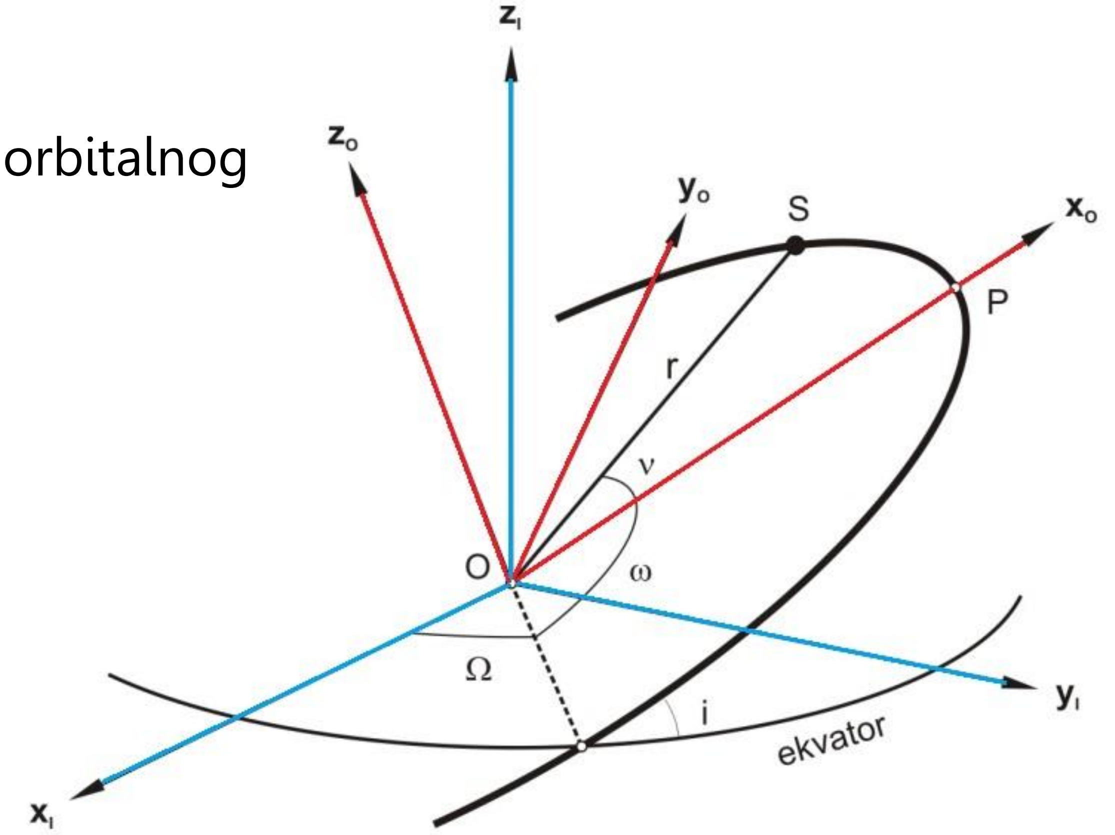


Računanje položaja satelita

Određivanje položaja satelita u inercijalnom koordinatnom sistemu na osnovu Keplerovih elemenata za trenutak vremena t_0:

Dato: $(a, e, i, \Omega, \omega, M)_{t_0}$ $\rightarrow$ Traženo: $\vec{\mathbf{r}}_\mathrm{I}$

- Korak 3: transformacija koordinata satelita iz orbitalnog u inercijalni koordinatni sistem:
  - rotacija oko z_o ose za ugao $-\omega$
  - rotacija oko x_o ose za ugao $-i$
  - rotacija oko z_o ose za ugao $-\Omega$



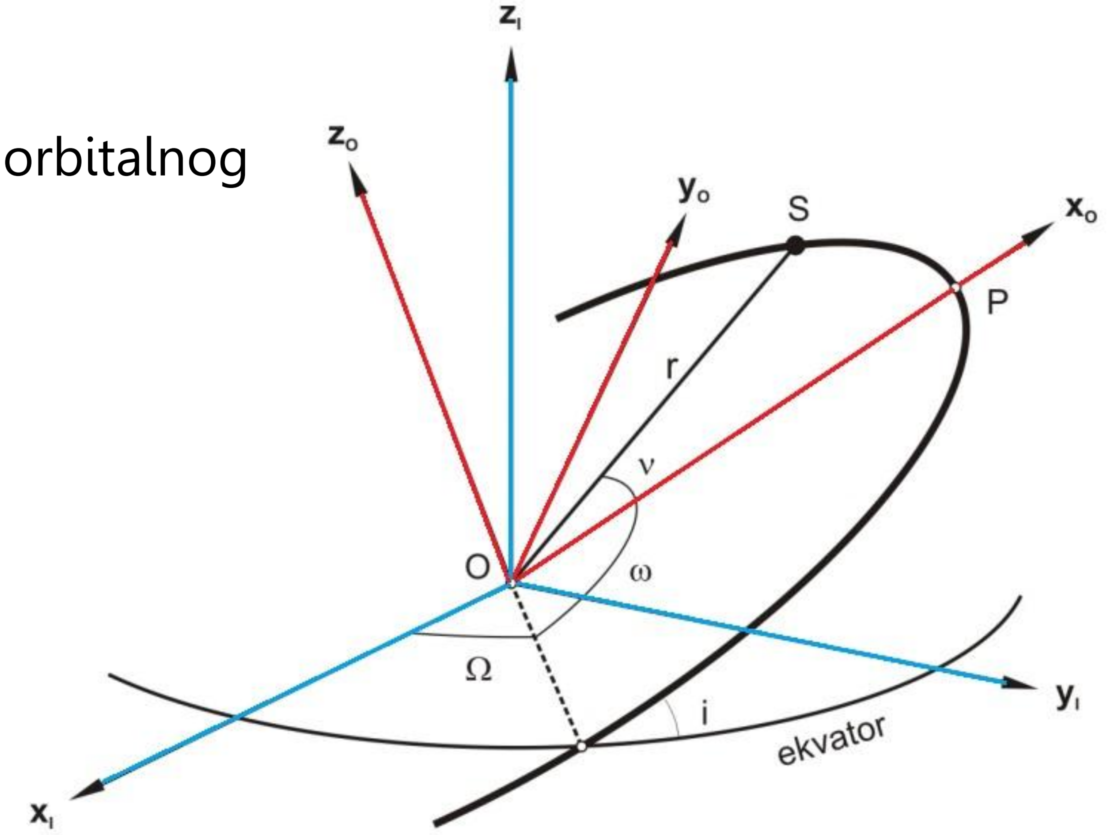
Računanje položaja satelita

Određivanje položaja satelita u inercijalnom koordinatnom sistemu na osnovu Keplerovih elemenata za trenutak vremena t_0:

Dato: $(a, e, i, \Omega, \omega, M)_{t_0} \;\rightarrow\;$ Traženo: $\vec{\mathbf{r}}_{\mathrm{I}}$

- Korak 3: transformacija koordinata satelita iz orbitalnog u inercijalni koordinatni sistem:
  - Matrica ukupne rotacije:

$$\mathbf{R}(\omega, i, \Omega) = \mathbf{R}_3(-\Omega)\mathbf{R}_2(-\mathrm{i})\mathbf{R}_1(-\omega)$$



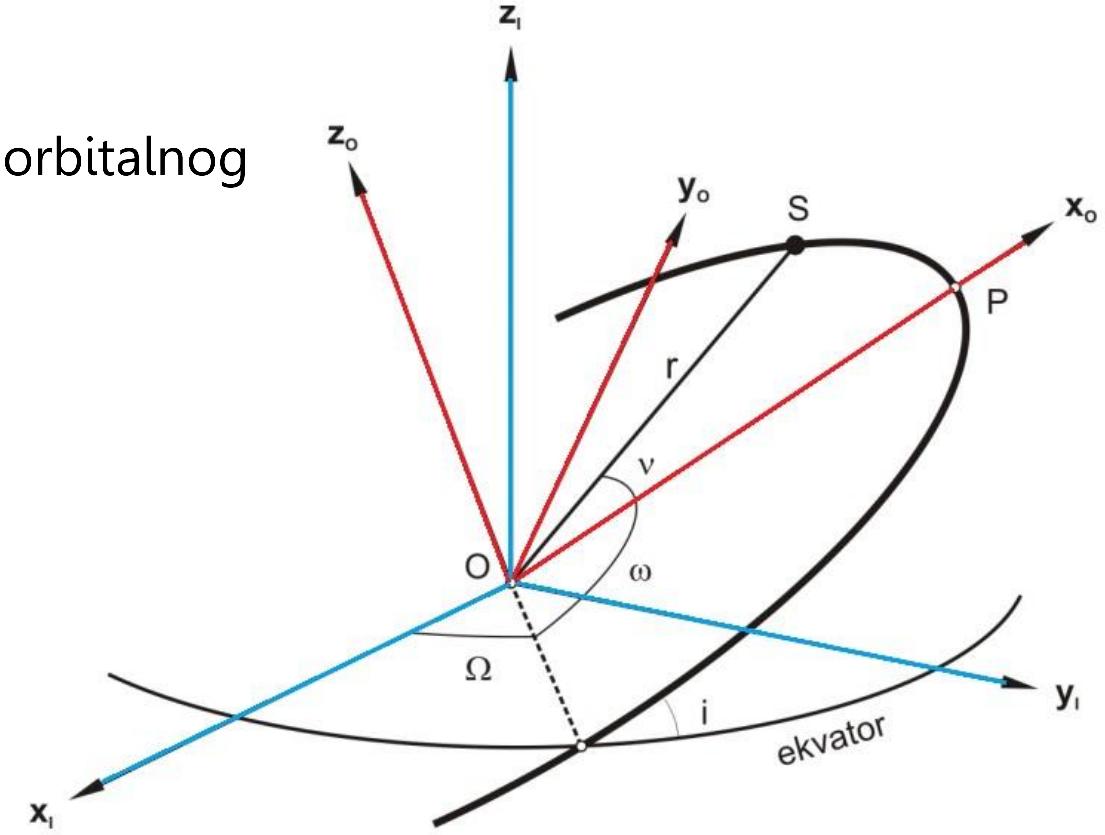
Računanje položaja satelita

Određivanje položaja satelita u inercijalnom koordinatnom sistemu na osnovu Keplerovih elemenata za trenutak vremena t_0:

Dato: $(a, e, i, \Omega, \omega, M)_{t_0}$ $\rightarrow$ Traženo: $\vec{\mathbf{r}}_{\mathrm{I}}$

- Korak 3: transformacija koordinata satelita iz orbitalnog u inercijalni koordinatni sistem:

$$\vec{\mathbf{r}}_{\mathrm{I}} = \mathbf{R}(\omega, i, \Omega)\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{o}}$$



Perturbacija satelitskog kretanja

Zemlja savršeno homogena sfera → kretanje satelita u gravitacionom polju Zemlje u potpunom skladu sa Keplerovim zakonima.

Realna Zemlja → nepravilnog oblika nehomogene unutrašnje građe.

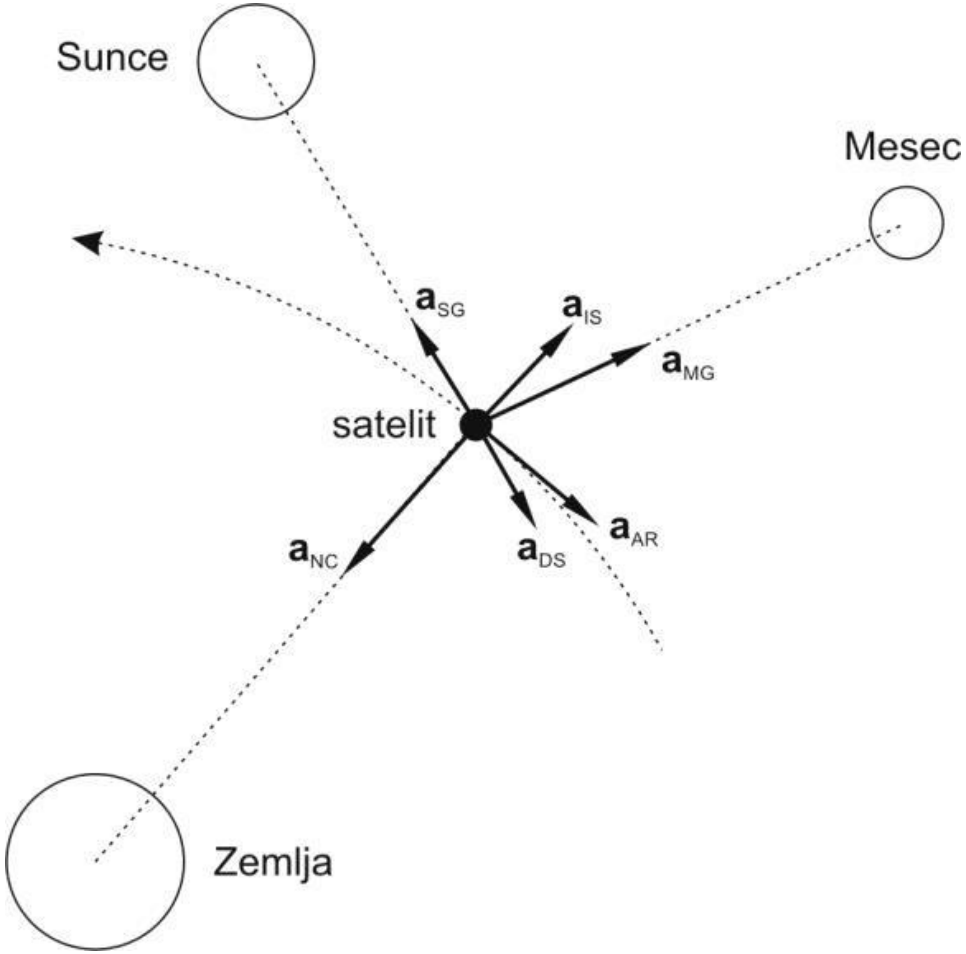
Postojanje drugih uticajnih sile pored sile privlačenja.

Posledica: orbita satelita se menja tokom vremena pod ukupnim dejstvom poremećajnih faktora, i stoga se mora opisivati skupom vremenski promenljivih parametara.

Perturbacija satelitskog kretanja

Poremećajni efekti:

- spljoštenost Zemlje - $\vec{\mathbf{a}}_{NC}$
- gravitacioni uticaj Sunca - $\vec{\mathbf{a}}_{SG}$
- gravitacioni uticaj Meseca - $\vec{\mathbf{a}}_{MG}$
- direktni pritisak Sunčevog zračenja - $\vec{\mathbf{a}}_{DS}$
- indirektni pritisak Sunčevog zračenja - $\vec{\mathbf{a}}_{IS}$
- sila trenja usled otpora vazduha - $\vec{\mathbf{a}}_{AR}$



Perturbacija satelitskog kretanja

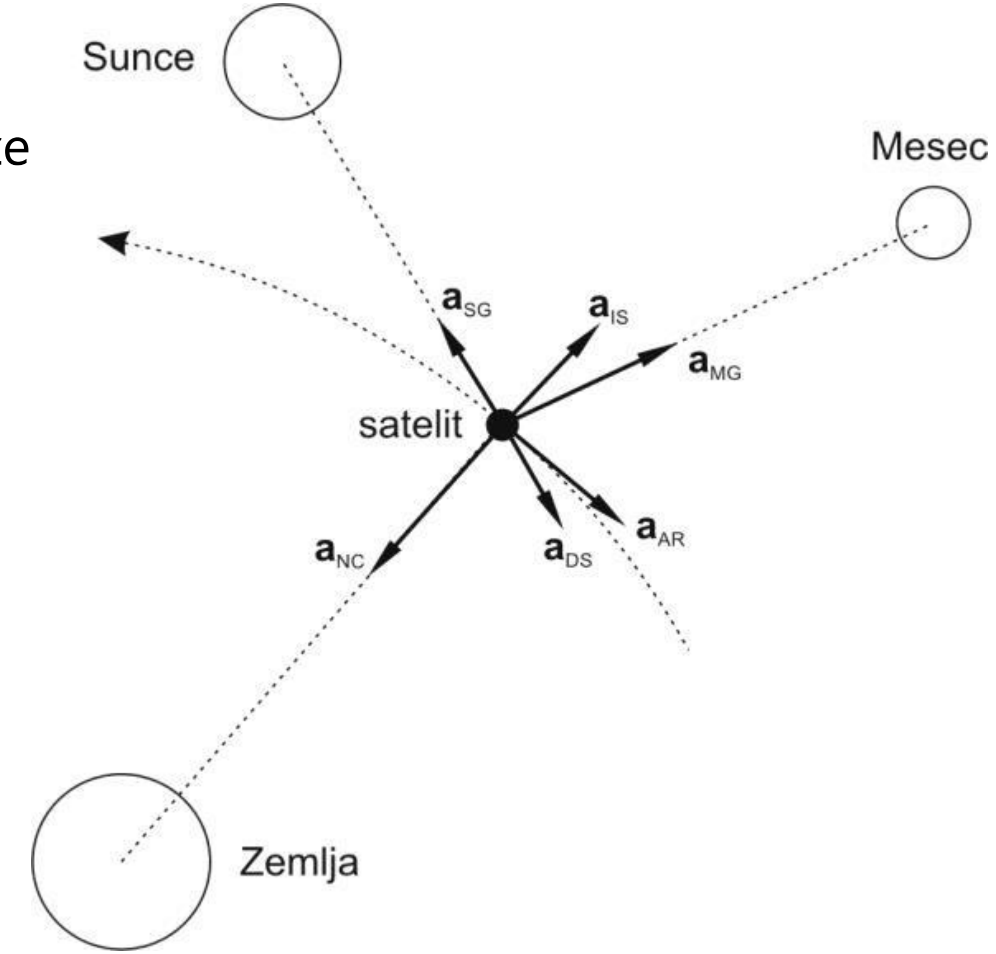
Spljoštenost Zemlje - $\vec{\mathbf{a}}_{NC}$:

- ➢ najveći poremećajni efekat na kretanje satelita,
- ➢ procena uticaja → razvoj potencijala sile Zemljine teže

$$T_{20} = V_{20} - \frac{GM}{r} = -\frac{\sqrt{5}}{2}\frac{GMa^2}{r^3}C_{20}(1 - 3\sin^2\varphi')$$

- V_{20} - član razvoja stepena 2 i reda 0,
- $V = GM/r$ - potencijal homogene sfere,
- φ' - geocentrična širina,

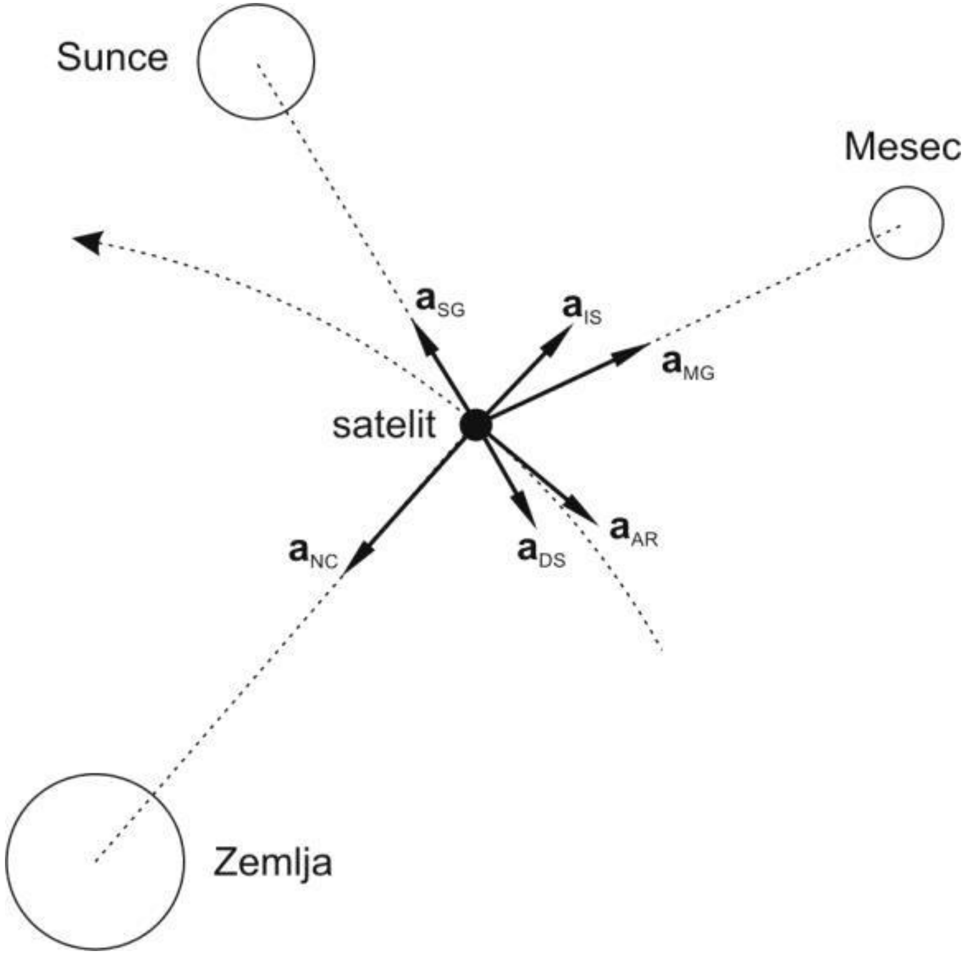
- ➢ intenzitet uticaja za GPS satelite → $5 \cdot 10^{-5}$ ms^{-2}.



Perturbacija satelitskog kretanja

Spljoštenost Zemlje - $\vec{\mathbf{a}}_{NC}$:

- uticaj na kretanje satelita:
  - satelit ubrzava u blizini ekvatorkse ravni,
  - udaljavanjem od ekvatora brzina se smanjuje,
  - promena argumenta perigeuma (rotacija eliptične putanje u orbitalnoj ravni),
  - promena rektascenzije uzlaznog čvora (rotacija nodalne linije).



Perturbacija satelitskog kretanja

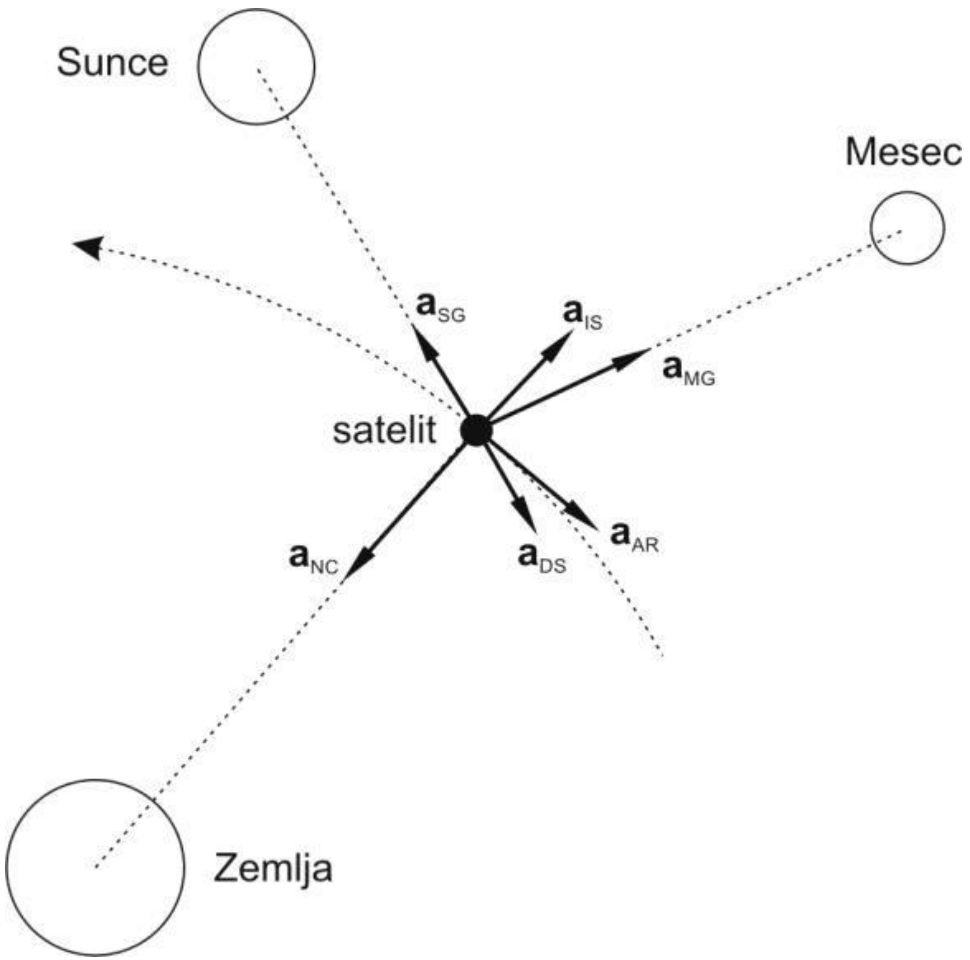
Gravitacioni uticaj Sunca i Meseca - $\vec{\mathbf{a}}_{SG}$ i $\vec{\mathbf{a}}_{MG}$:

- masa Meseca daleko manja od mase Sunca,
- Mesec je dosta bliži Zemlji od Sunca, pa je uticaj veći

$$\vec{\mathbf{a}}_{MG} = Gm_M\left(\frac{\vec{\mathbf{r}}_M - \vec{\mathbf{r}}}{|\vec{\mathbf{r}}_M - \vec{\mathbf{r}}|^3} - \frac{\vec{\mathbf{r}}_M}{|\vec{\mathbf{r}}_M|^3}\right)$$

  - m_M - masa Meseca,
  - $\vec{\mathbf{r}}_M$ - geocentrični vektor položaja Meseca,
- uticaj dovodi do pojave plime okeana

  i plime čvrste Zemljine kore.



Perturbacija satelitskog kretanja

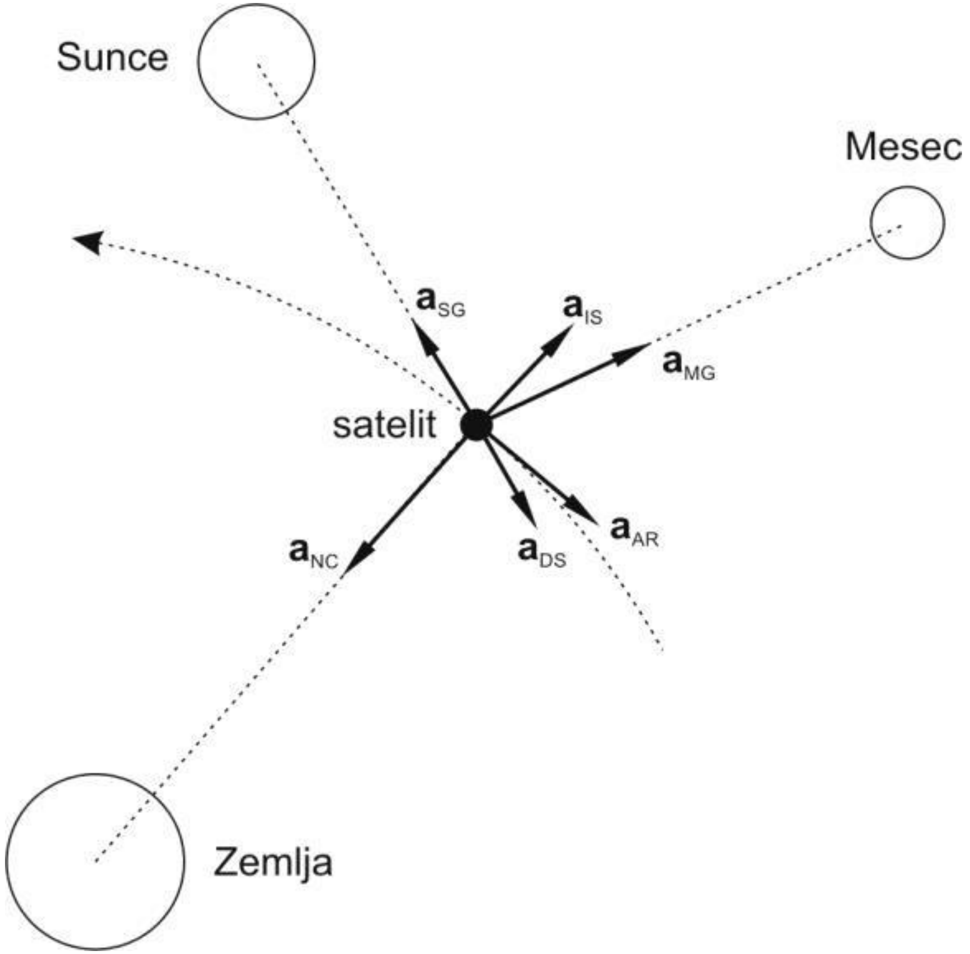
Direktni pritisak Sunčevog zračenja - $\vec{\mathbf{a}}_{DS}$:

- nastaje sudarom emitovanih fotona sa Sunca sa satelitom,
- poremećajno ubrzanje zavisi od efektivne površine satelita i njene refleksivnosti,

Perturbacija satelitskog kretanja

Indirektni pritisak Sunčevog zračenja - $\vec{\mathbf{a}}_{IS}$:

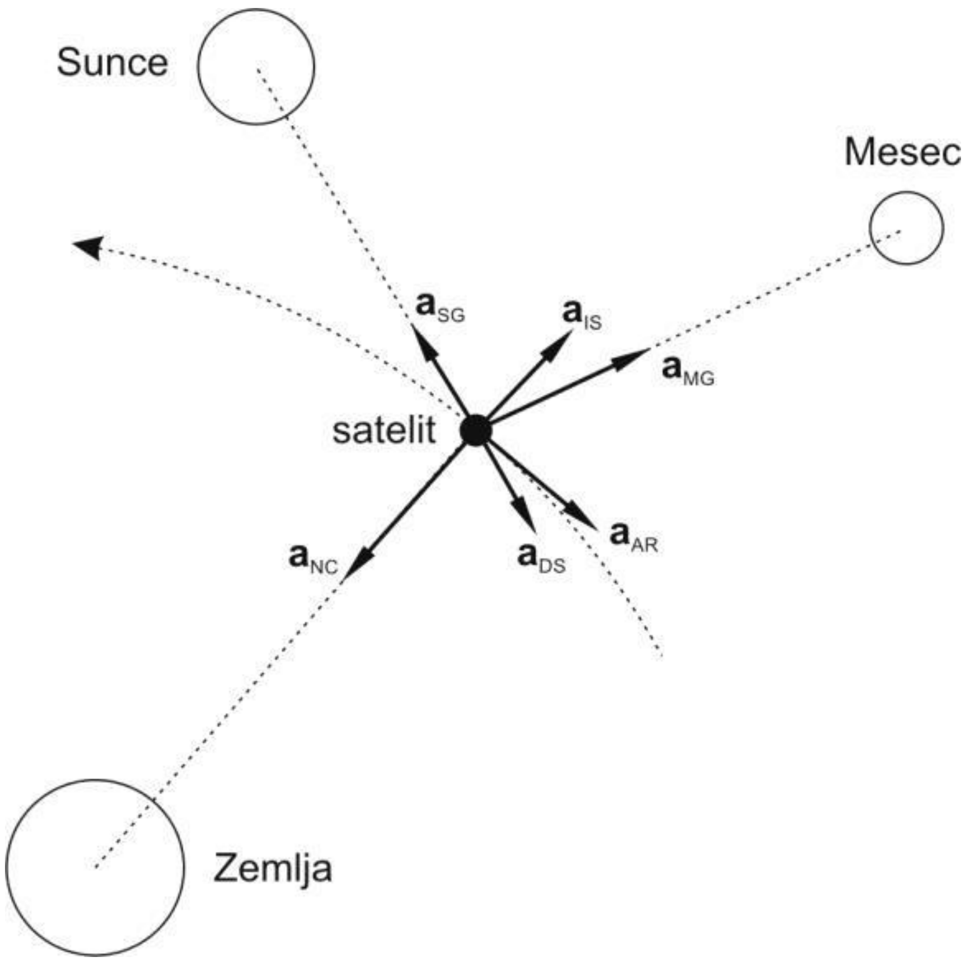
- nastaje usled uticaja odbijenog Sunčevog zračenja od površi Zemlje,
- usled konstantne rotacije Zemlje teško je modelirati ovaj uticaj,
- u literaturi se ova pojava naziva *albedo* efektom.



Perturbacija satelitskog kretanja

Sila trenja usled otpora vazduha - $\vec{\mathbf{a}}_{AR}$:

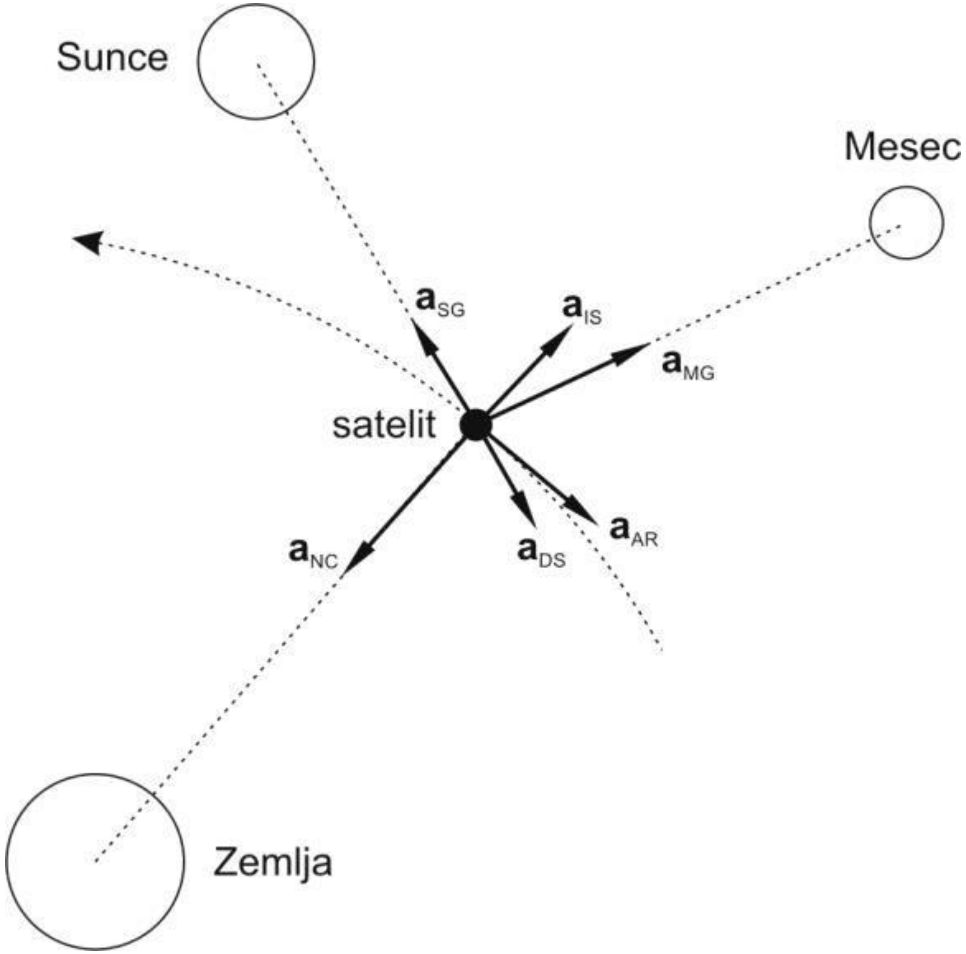
- na visinama leta GPS satelita je atmosfera razređena,
- najmanji od svih efekata.



Perturbacija satelitskog kretanja

Poremećajni efekti:

- spljoštenost Zemlje - $\vec{\mathbf{a}}_{NC}$
- gravitacioni uticaj Sunca - $\vec{\mathbf{a}}_{SG}$
- gravitacioni uticaj Meseca - $\vec{\mathbf{a}}_{MG}$
- direktni pritisak Sunčevog zračenja - $\vec{\mathbf{a}}_{DS}$
- indirektni pritisak Sunčevog zračenja - $\vec{\mathbf{a}}_{IS}$
- sila trenja usled otpora vazduha - $\vec{\mathbf{a}}_{AR}$

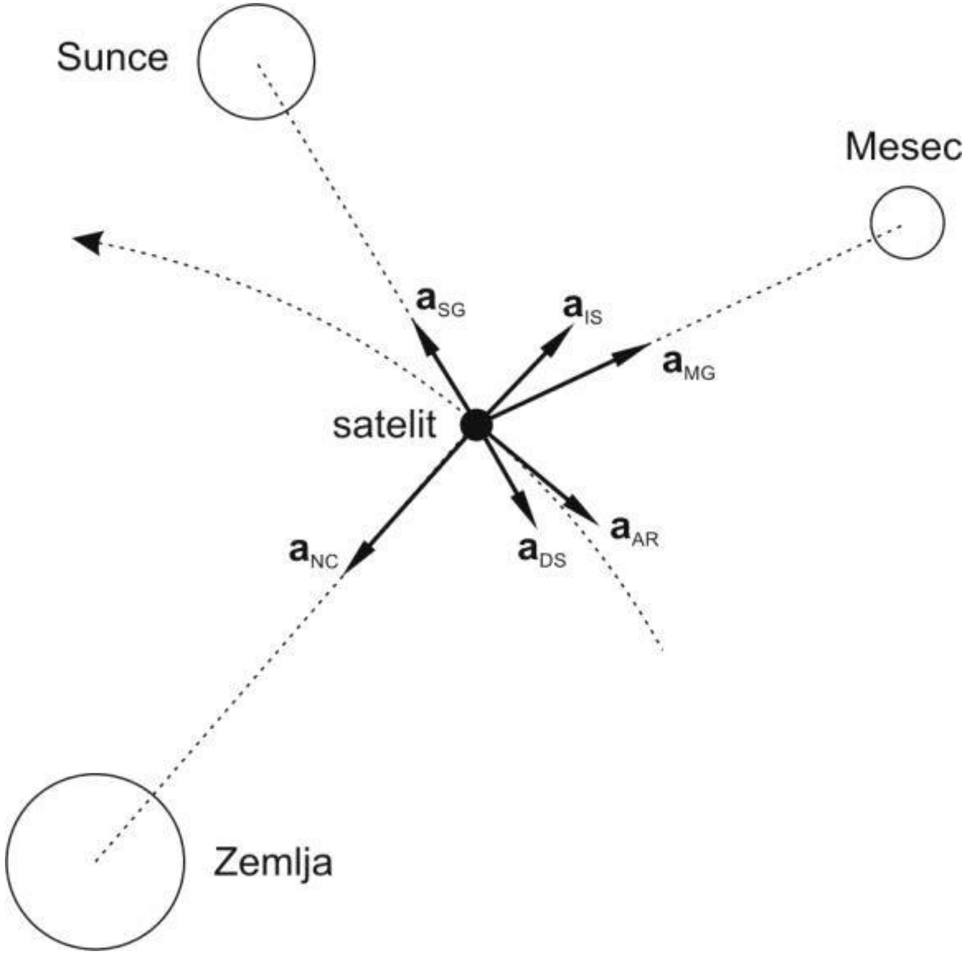


Izvor poremećaja	Poremećajno ubrzanje	Uticaj na orbitu za 1h
Spljoštenost Zemlje	$5 \cdot 10^{-5}$ ms^{-2}	250 m
Lunisolarno privlačenje	$5 \cdot 10^{-6}$ ms^{-2}	25 m
Pritisak Sunčevog zračenja	$1 \cdot 10^{-7}$ ms^{-2}	0.5 m
Albedo	$1 \cdot 10^{-9}$ ms^{-2}	0.01 m

Perturbacija satelitskog kretanja

Jednačina realnog kretanja satelita:

$$\ddot{\vec{\mathbf{r}}} = -\frac{GM}{r^3}\vec{\mathbf{r}} + \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{V}}, t)$$



➢ $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{V}}, t)$ - rezultanta svih poremećajnih sila

- $\vec{\mathbf{F}}$ je u funkciji položaja i brzine satelita i vremena
- intenzitet $\vec{\mathbf{F}}$ je veoma mali u poređenju sa GM/r^2
- greška se nagomilava tokom vremena

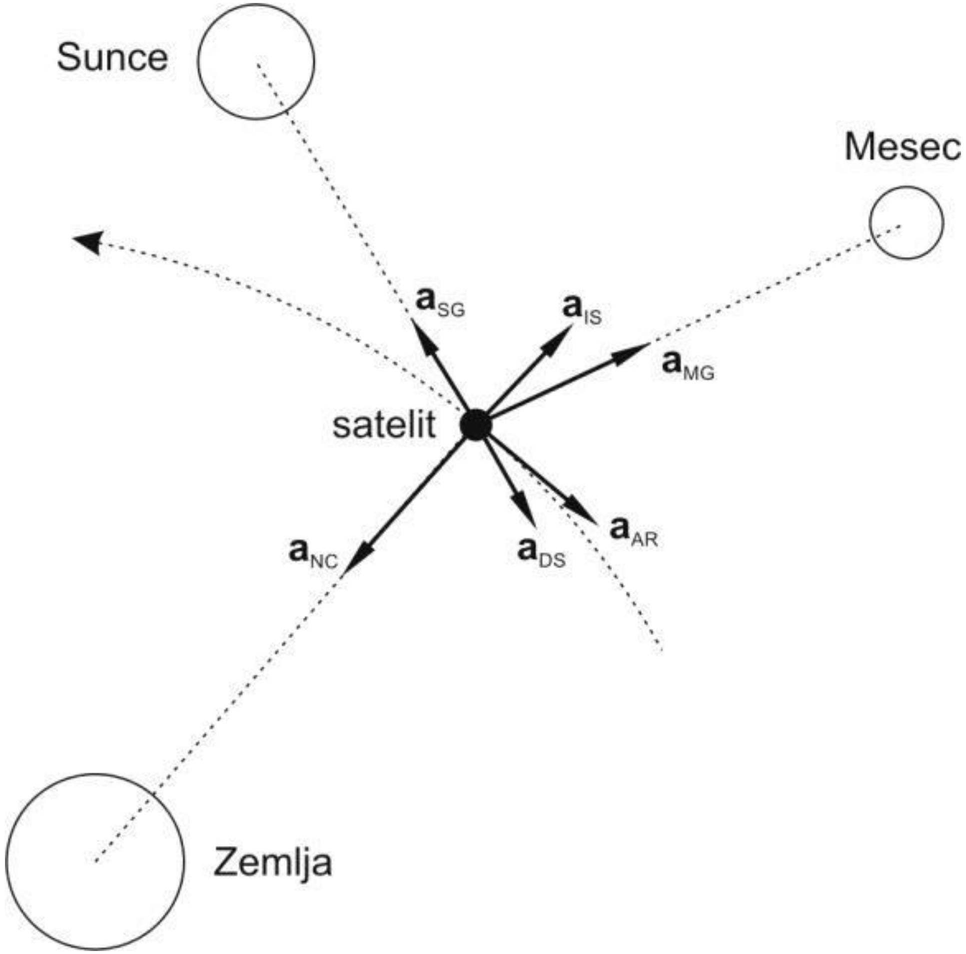
Perturbacija satelitskog kretanja

Realnu satelitsku orbitu nije moguće predstaviti ograničenim brojem parametara.

- moguće je korišćenje Keplerovih parametara u funkciji vremena:

  $a(t_0), e(t_0), i(t_0), \Omega(t_0), \omega(t_0), M(t_0)$

  oskulatorni orbitalni elementi



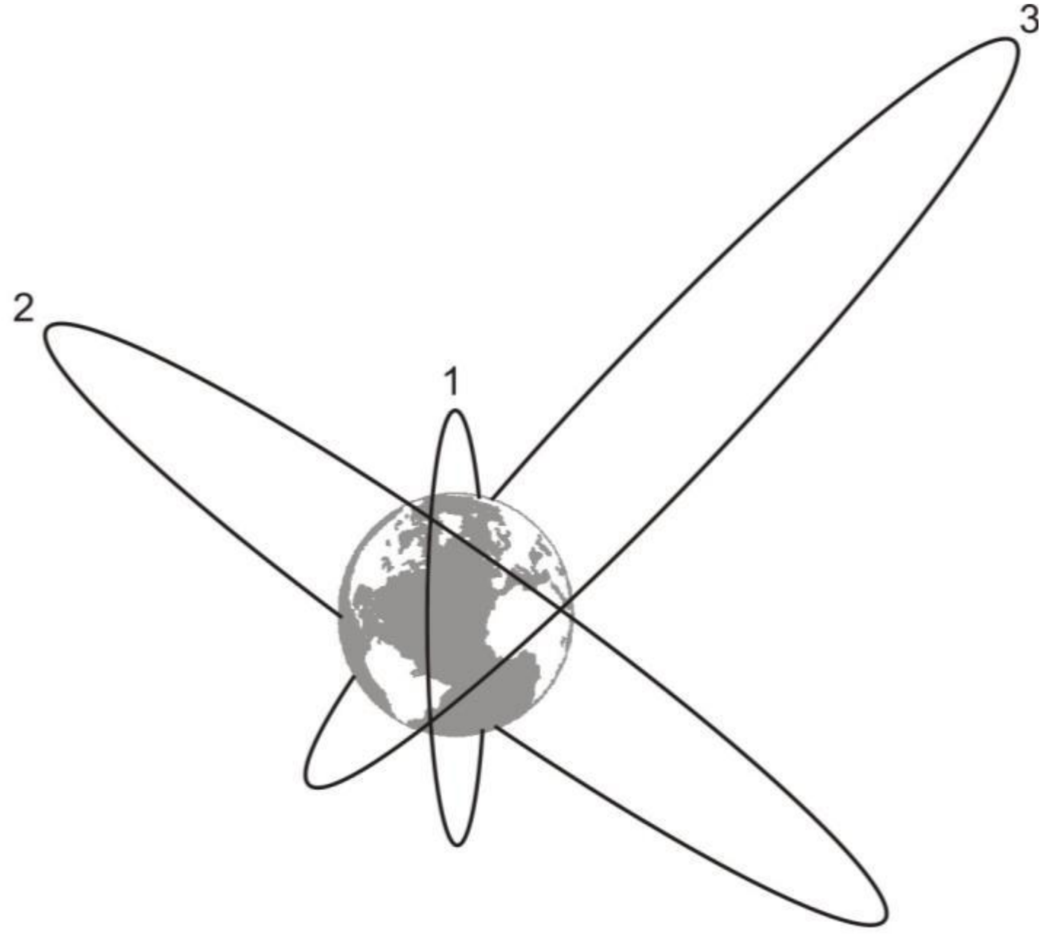
Klasifikacija satelitskih orbita

Veličina, oblik i orijentacija satelitske orbite predstavljaju najznačajnije parametre u fazi planiranja jedne satelitske misije. Tip satelitske orbite zavisi prvenstveno od namene (izviđački, komunikacioni, navigacioni ili meteorološki sateliti).

Podela prema visini leta satelita $h = a - R$:

1. niske (0 km < h < 2000 km),
2. srednje (2000 km < h < 35786 km),
3. visoke (h > 35786 km).

gde je a velika poluosa a R poluprečnik Zemlje.

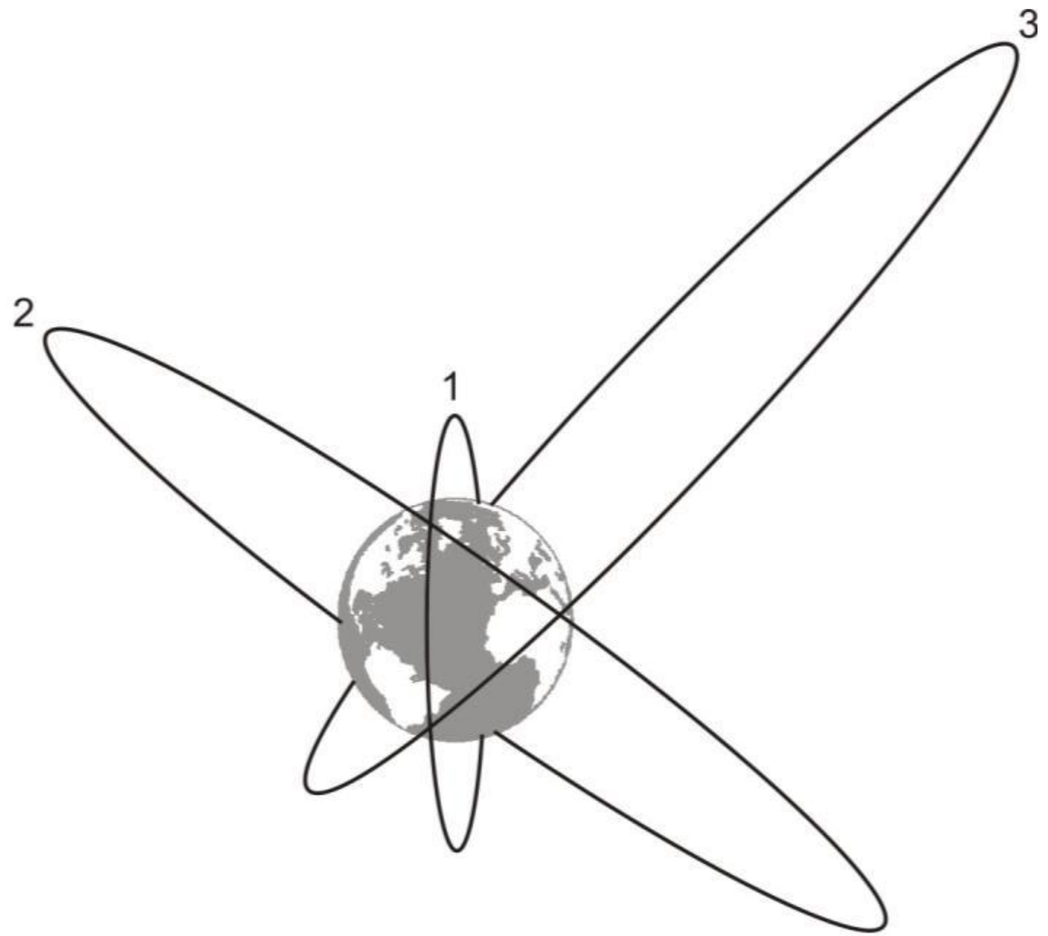


Klasifikacija satelitskih orbita

Niske orbite (0 km < h < 2000 km) karakteristične su za izviđačke satelite kod kojih se zahteva velika brzina kretanja i visoka rezolucija snimaka.

Navigacioni sateliti imaju po pravilu **srednje orbite** (2000 km < h < 35786 km) da bi potpuna pokrivenost Zemljine površi mogla da se postigne relativno malobrojnom satelitskom konstelacijom.

Visoke orbite (h > 35786 km) mogu se sresti kod nekih komunikacionih satelita.

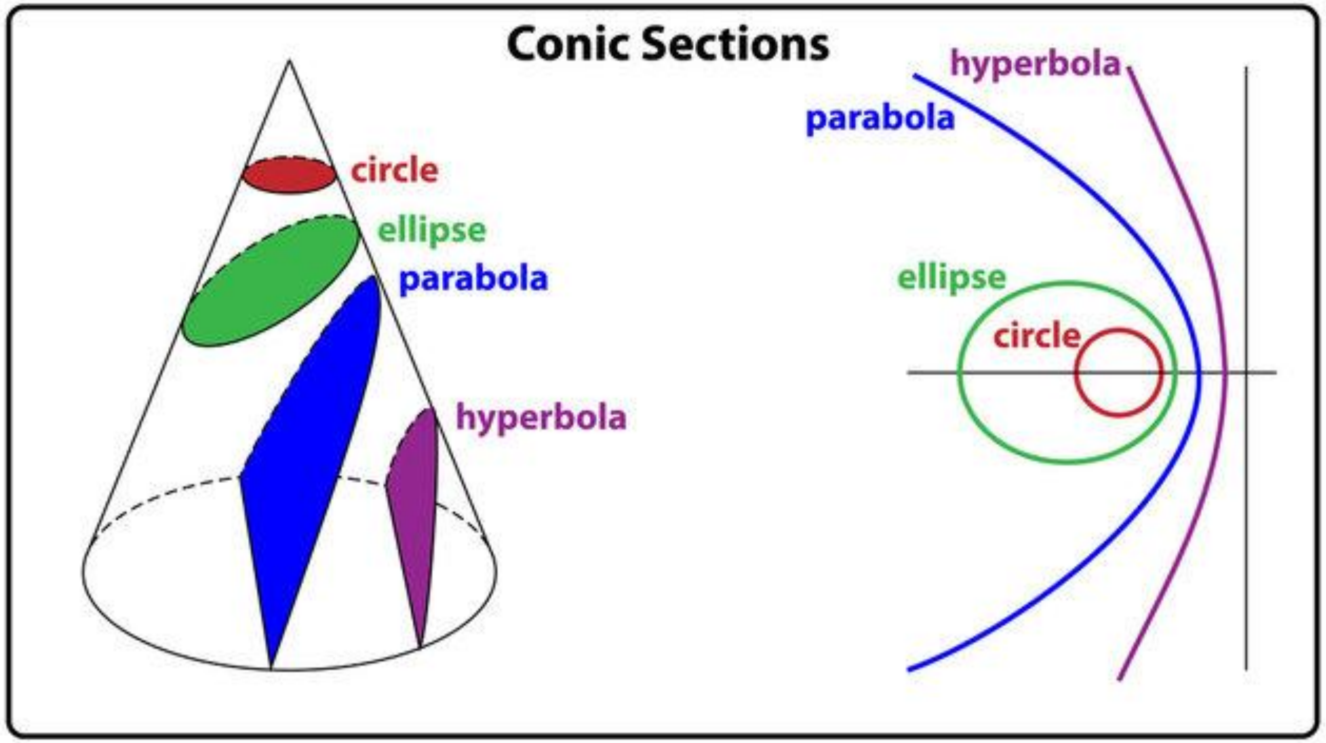


Klasifikacija satelitskih orbita

Veličina, oblik i orijentacija satelitske orbite predstavljaju najznačajnije parametre u fazi planiranja jedne satelitske misije. Tip satelitske orbite zavisi prvenstveno od namene (izviđački, komunikacioni, navigacioni ili meteorološki sateliti).

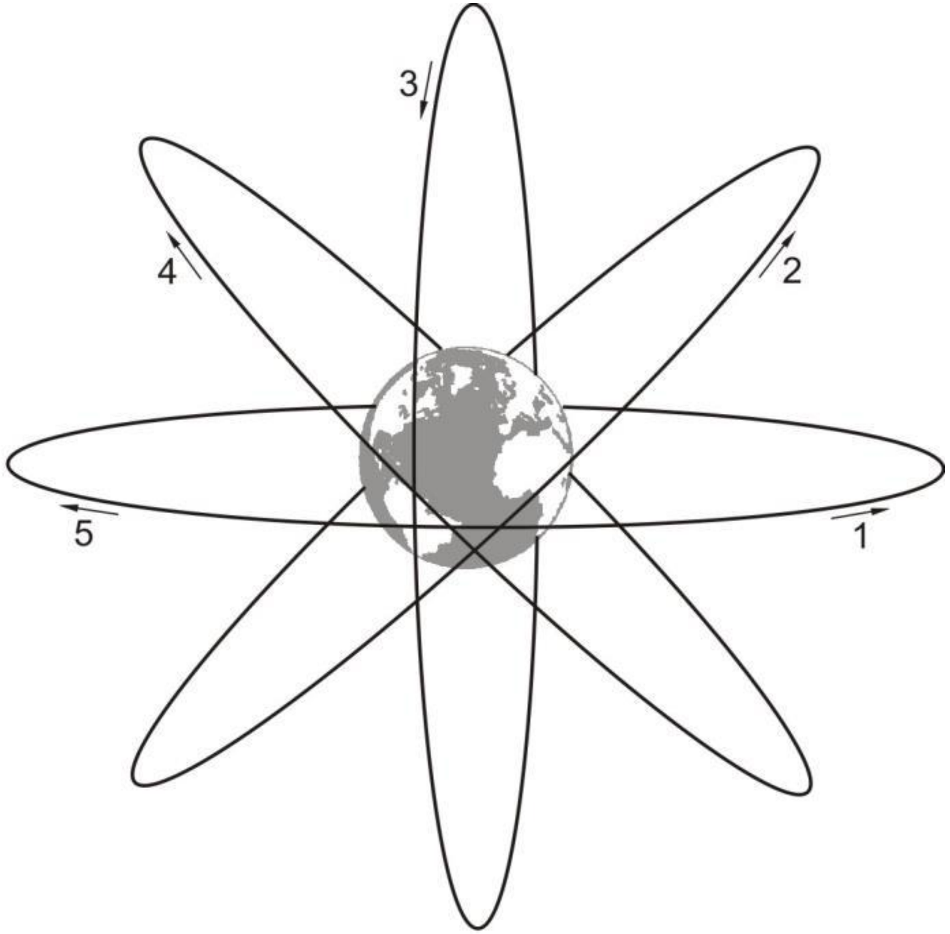
Podela prema parametru ekscentriciteta e:

- **kružne** $(\boldsymbol{e = 0})$**,**
- **eliptične** $(\boldsymbol{0 < e < 1})$**,**
- parabolične $(e = 1)$,
- hiperbolične $(e > 1)$.



Klasifikacija satelitskih orbita

Veličina, oblik i orijentacija satelitske orbite predstavljaju najznačajnije parametre u fazi planiranja jedne satelitske misije. Tip satelitske orbite zavisi prvenstveno od namene (izviđački, komunikacioni, navigacioni ili meteorološki sateliti).



Podela prema inklinaciji i:

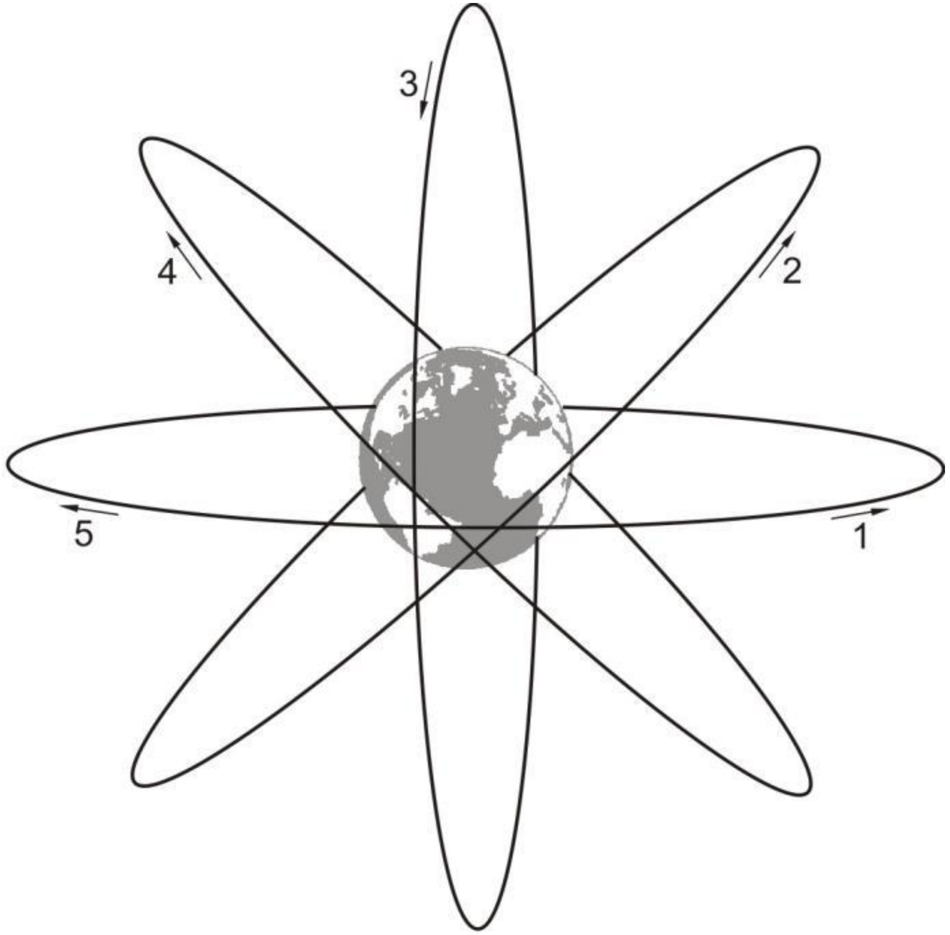
- ekvatorske $(i = 0°)$,
- nagnute $(0° < i < 90°)$,
- polarne $(i = 90°)$.

Klasifikacija satelitskih orbita

Sateliti u **ekvatorskim orbitama** (1 i 5) dobro pokrivaju široki ekvatorijalni pojas Zemljine površi, ali je pokrivenost polarnih oblasti slaba (većina komunikacionih satelita).

Nagnute orbite (2 i 4) imaju sateliti čija je osnovna namena da što veći deo svog orbitalnog perioda provedu iznad oblasti Zemlje koja je predmet istraživanja (navigacioni sateliti).

Polarne orbite (3) se koriste kada je potrebno da satelit bude uvek iznad određenog područja Zemlje u redovnim vremenskim intervalima (sateliti za daljinsku detekciju).

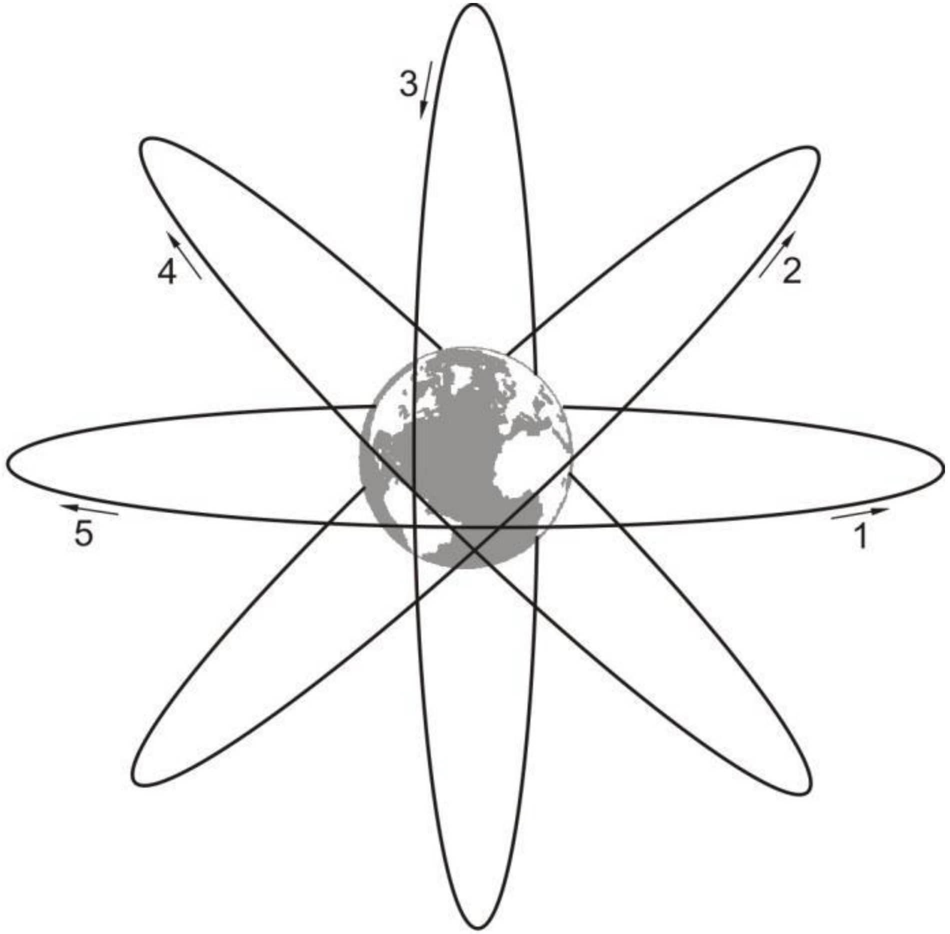


Klasifikacija satelitskih orbita

Veličina, oblik i orijentacija satelitske orbite predstavljaju najznačajnije parametre u fazi planiranja jedne satelitske misije. Tip satelitske orbite zavisi prvenstveno od namene (izviđački, komunikacioni, navigacioni ili meteorološki sateliti).

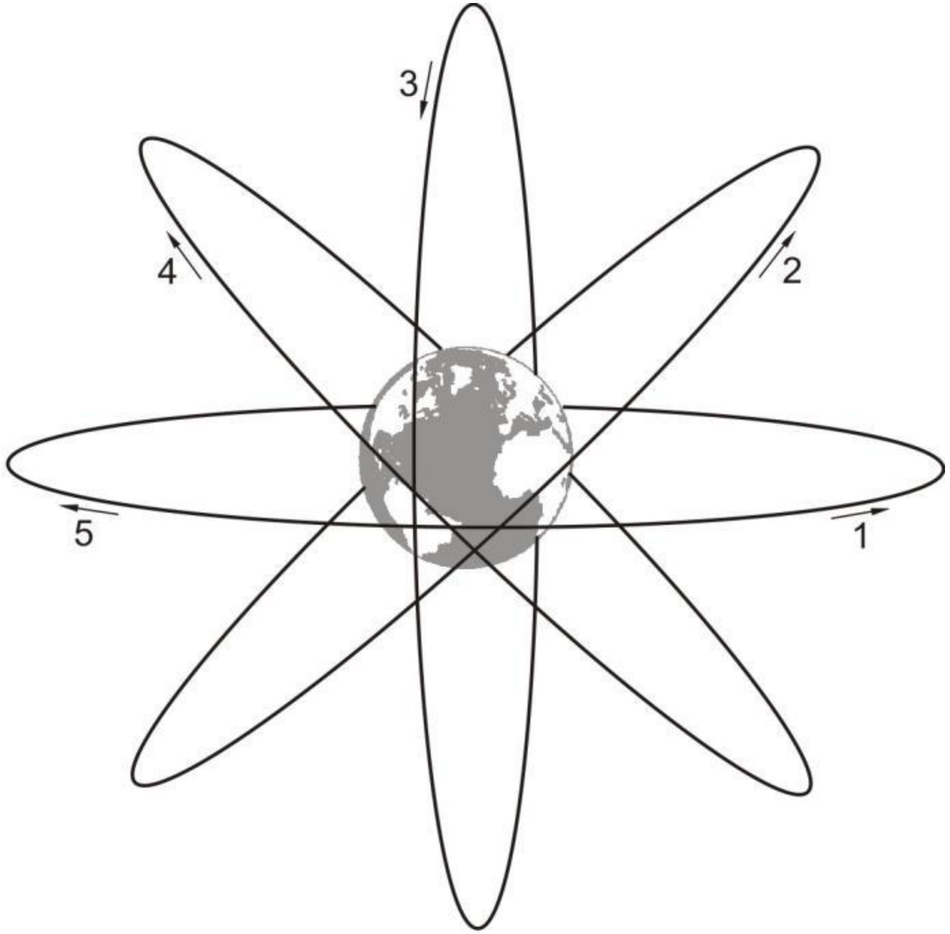
Podela prema smeru kretanja:

- prograde (↺),
- retrogradne (↻).



Klasifikacija satelitskih orbita

Progradne orbite (1 i 2) imaju sateliti koji se, posmatrajući sa lokacije iznad severnog pola, kreću u smeru u kojem se Zemlja okreće (zapad-istok). **Retrogradne** orbite (5 i 4) imaju sateliti sa smerom kretanja suprotnim od smera Zemljine rotacije. Ovakva podela je neodređena jedino kod polarnih orbita.



Razlozi ekonomičnosti nameću da u najvećem broju slučajeva satelitske orbite budu progradne, jer je u suprotnom neophodna velika količina energije da bi se prilikom lansiranja satelita savladao inicijalni efekat rotacije Zemlje.

Klasifikacija satelitskih orbita

Podela prema kriterijumu sinhronizacije:

- geosinhrone,
- geostacionirane,
- heliosinhrone.

Geosinhrone orbite: period obilaska satelita stoji u celobrojnom odnosu sa periodom rotacije Zemlje (satelitska konstelacija se ponavlja svakog dana; sateliti su u pravilnim vremenskim intervalima uvek iznad istog mesta Zemljine površi).
Primer: NAVSTAR GPS (visina: 20200 km, period obilaska: 12 zvezdanih časova (polovina perioda rotacije Zemlje)).

Klasifikacija satelitskih orbita

Podela prema kriterijumu sinhronizacije:

- geosinhrone,
- geostacionirane,
- heliosinhrone.

Geostacionirane orbite: posebna vrsta geosinhronih orbita koje leže u ravni ekvatora ($i = 0°$), i kod kojih je period obilaska tačno jednak periodu jedne pune rotacije Zemlje (24 zvezdana časa). Geostacionarni sateliti imaju uvek iste položaje na nebu.

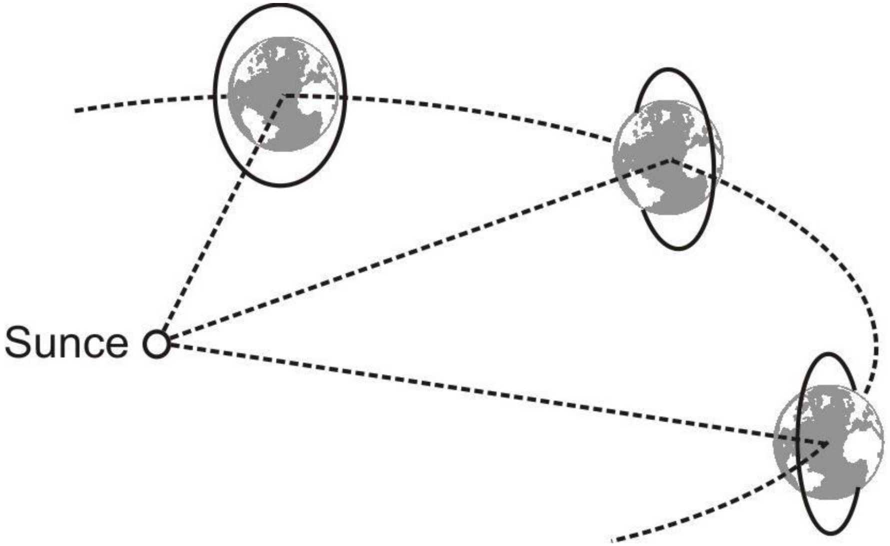
Primer: komunikacioni sateliti (visina: 35786 km).

Na visini od 35786 km period orbitiranja satelita postaje jednak sideričkom danu Zemlje - satelit postaje geostacioniran (stoji iznad iste tačke ekvatora).

Klasifikacija satelitskih orbita

Podela prema kriterijumu sinhronizacije:

- geosinhrone,
- geostacionirane,
- heliosinhrone.



Heliosinhrone orbite: tip orbite koji omogućava da paneli satelita imaju neprestano napajanje Sunčevom energijom. Da se ne bi našao u Zemljinoj senci, satelit mora pre svega imati polarnu putanju, uz dodatni uslov da orbitalna ravan bude uvek pod pravim uglom u odnosu na liniju koja povezuje centar mase Zemlje i Sunca. Promena rektascenzije uzlaznog čvora orbite za $360°$ godišnje (oko $1°$ dnevno).

Primer: sateliti za daljinsku detekciju.

PREDAVANJE 4

Principi satelitskih merenja

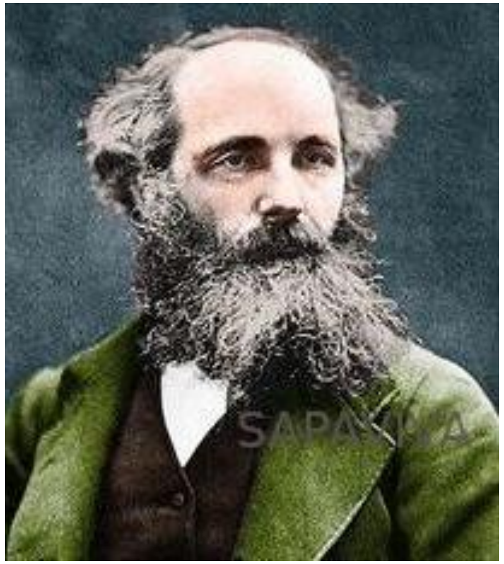
Principi satelitskih merenja

1. Osnovni pojmovi o signalima
2. Fazna i grupna brzina
3. Doplerov efekat
4. Kretanje signala kroz atmosferu
5. Satelitsko merenja pravaca
6. Satelitsko merenje dužina
7. Satelitsko merenje promene dužina
8. Altimetrijska merenja
9. Interferometrijska merenja

Osnovni pojmovi o signalima

Krajem XIX veka, škotski fizičar i matematičar Džejms Maksvel formulisao je sistem jednačina koji opisuje jedinstvenu teoriju električnih i magnetnih pojava. Teorijsko proučavanje ovih jednačina predvidelo je pojavu **elektromagnetnih talasa** i dovelo do važnih zaključaka u oblasti optike. Maksvel je ujedno prvi razumeo i interpretirao osnovnu prirodu svetlosti.

Maksvelove jednačine predstavljaju klasičnu teoriju elektromagnetnih pojava i po svom značaju zauzimaju mesto slično Njutnovim zakonima u mehanici ili osnovnim principima u termodinamici.



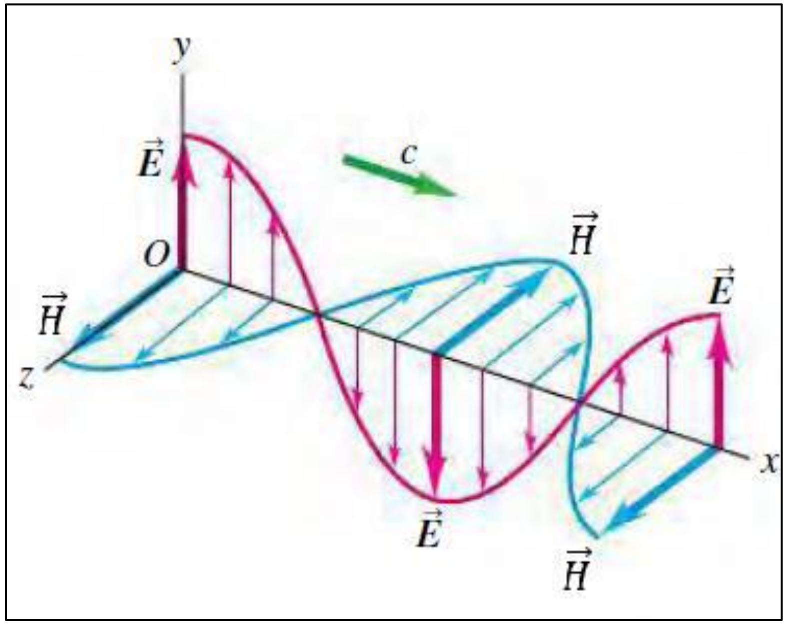
James Clerk Maxwell
(1831-1879)

$$\oint \mathbf{E} dl = -\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{B} dS,$$

$$\oint \mathbf{B} dS = 0,$$

$$\oint \mathbf{H} dl = \int \mathbf{J} dS + \frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{D} dS,$$

$$\oint \mathbf{E} dS = \int \rho dV.$$

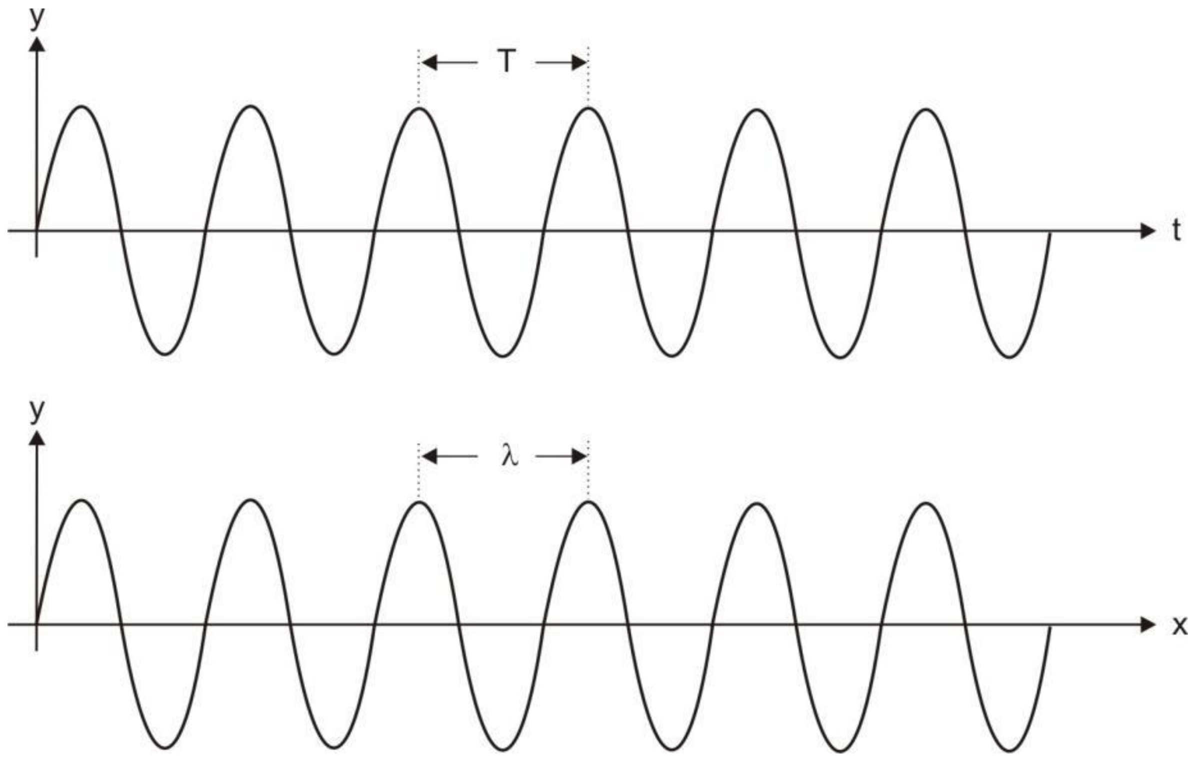


Osnovni pojmovi o signalima

Osnovni izraz EM talasa:

$$y = A \sin\left[2\pi\left(ft - f\frac{x}{v} + \phi_0\right)\right]$$

- intenzitet - y (u trenutku vremena t)
- amplituda - A
- frekvencija - f
- pređeno rastojanje - x (do vremena t)
- brzina - v
- početna faza - ϕ_0
- faza talasa - $\left(ft - f\frac{x}{v} + \phi_0\right)$



Osnovni pojmovi o signalima

Važne relacije:

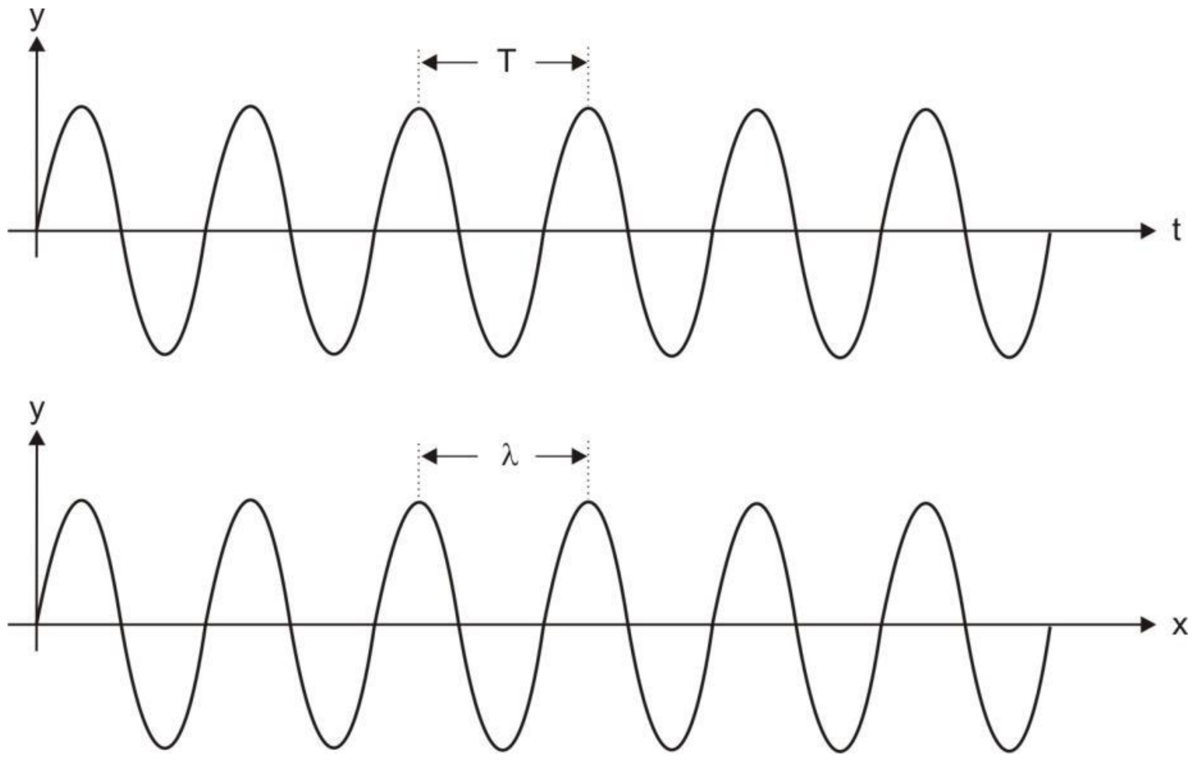
- Period talasa

$$T = \frac{1}{f}$$

- Talasna dužina - λ

- Brzina prostiranja

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$



Osnovni pojmovi o signalima

Važne relacije:

- Kružna frekvencija

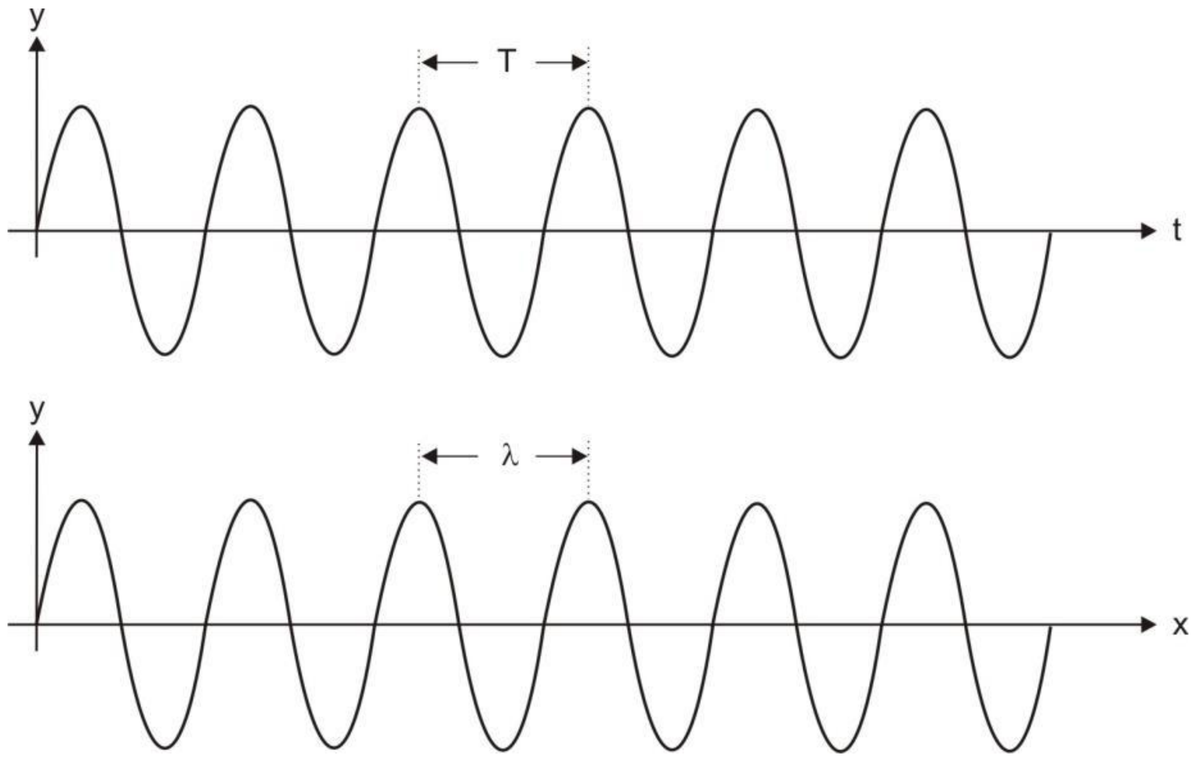
  $\omega = 2\pi f$

- Talasni broj

  $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

- Početni fazni ugao

  $\varphi_0 = 2\pi\phi_0$



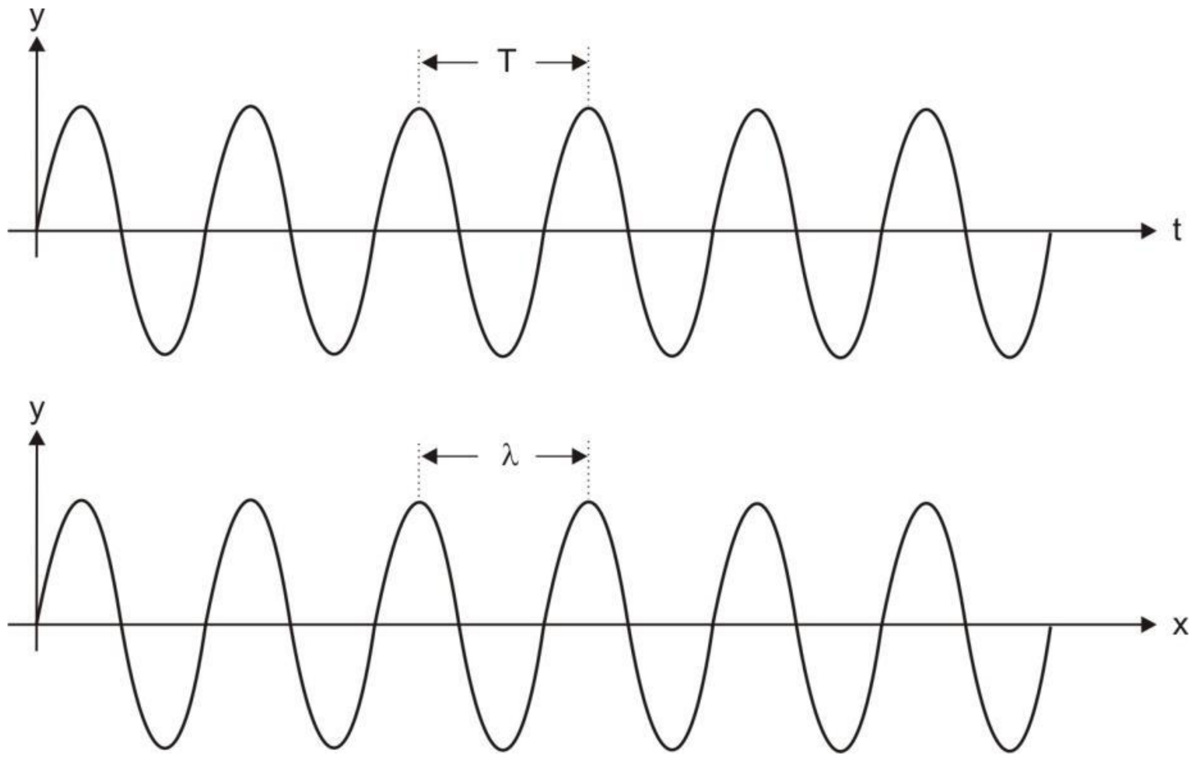
Osnovni pojmovi o signalima

Osnovni izraz:

$$y = A\sin\left[2\pi\left(ft - f\frac{x}{v} + \phi_0\right)\right]$$

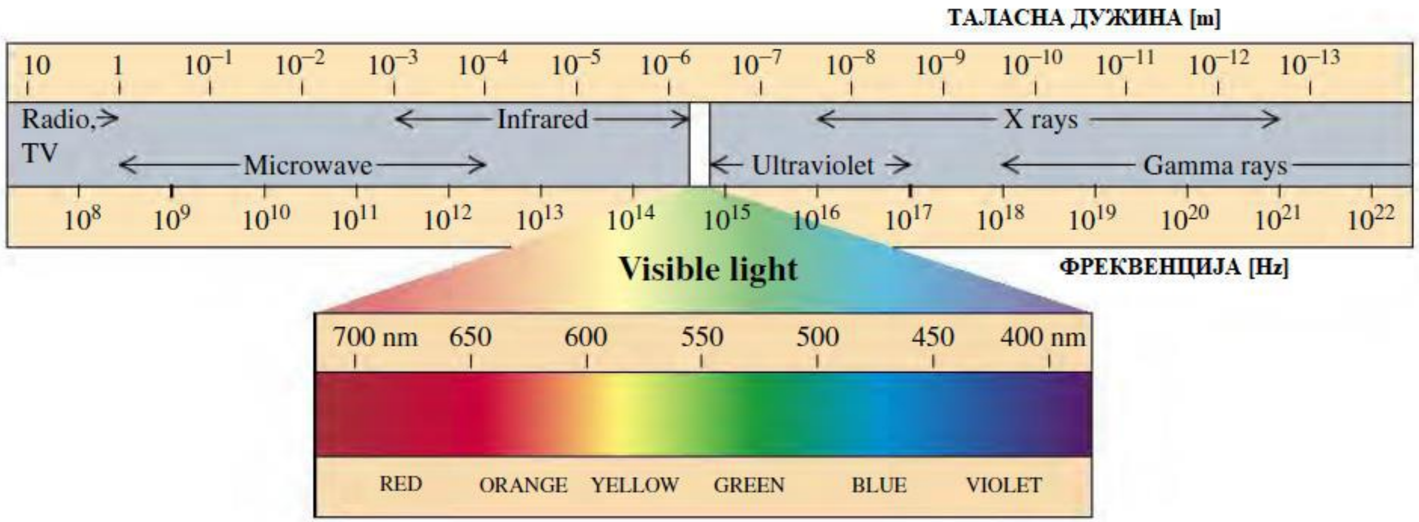
koristeći ω, k i φ_0

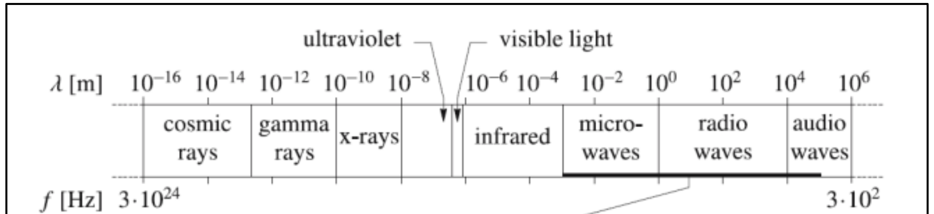
$$y = A\sin[\omega t - kx + \varphi_0]$$



Osnovni pojmovi o signalima

- Spektar EM talasa
  - Radio talasi
    - Mikrotalasi (1 mm – 1 m)





Notation	Wavelength λ	Frequency f
Extremely high frequency (EHF)	0.1–1 cm	300–30 GHz
Super high frequency (SHF)	1–10 cm	30–3 GHz
Ultra high frequency (UHF)	10–100 cm	3–0.3 GHz
Very high frequency (VHF)	1–10 m	300–30 MHz
High frequency (HF)	10–100 m	30–3 MHz
Medium frequency (MF)	0.1–1 km	3–0.3 MHz
Low frequency (LF)	1–10 km	300–30 kHz
Very low frequency (VLF)	10–100 km	30–3 kHz

Band	f [GHz]
K	26.5–18
Ku	18–12.4
X	12.4–8
C	8–4
S	4–2
L	2–1

Frekvencijski opseg	Frekvencija	Talasna dužina
VLF (veoma niska frekvencija)	< 30 kHz	> 10 km
LF (niska frekvencija)	30 kHz – 300 kHz	1 km – 10 km
MF (srednja frekvencija)	300 kHz – 3 MHz	100 m – 1 km
HF (visoka frekvencija)	3 MHz – 30 MHz	10 m – 100 m
VHF (veoma visoka frekvencija)	30 MHz – 300 MHz	1 m – 10 m
UHF (ultra visoka frekvencija)	300 MHz – 3 GHz	10 cm – 1 m
SHF (super visoka frekvencija)	3 GHz – 30 GHz	1 cm – 10 cm
EHF (ekstremno visoka frekvencija)	30 GHz – 300 GHz	1 mm – 1 cm

Osnovni pojmovi o signalima

Osnovne komponente satelitskih signala:

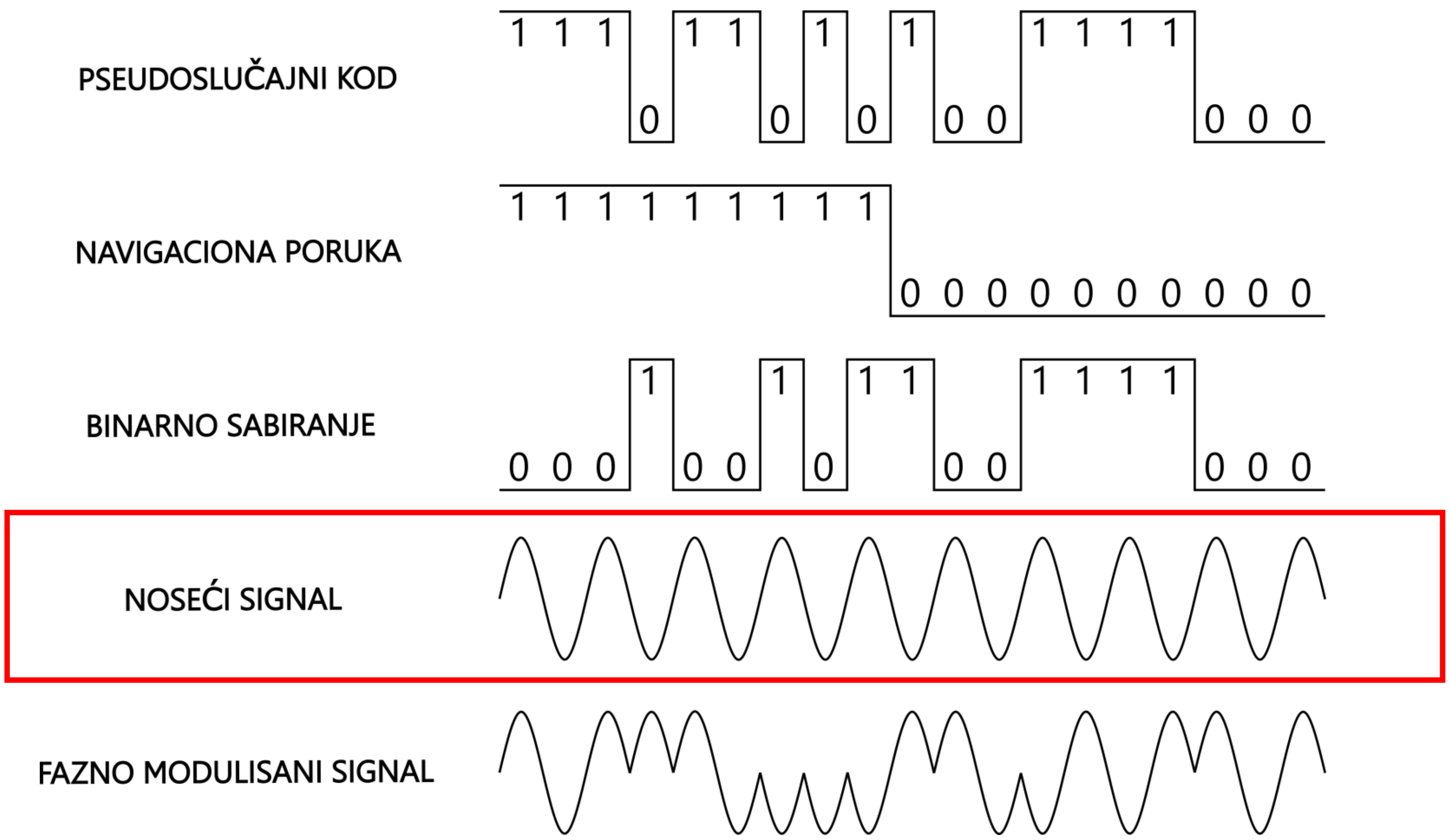
- **Noseći talas**: čist sinusni talas definisane frekvencije f_{L1} i f_{L2} sa odgovarajućim talasnim dužinama $\lambda_{L1} = 19.0$ cm i $\lambda_{L2} = 24.4$ cm;

- **Kodovi**: jedinstveni binarni niz nula i jedinica generisan na osnovu matematičkog algoritma tako da se ne može definisati specifična pravilnost ili prepoznatljivi šablon, koji se odlikuju specijalnim autokorelacionim i kroskorelacionim svojstvima; nazivaju se još i pseudoslučajni kodovi;

- **Navigacioni podaci**: binarno kodirana poruka koja sadrži neophodne podatke za pozicioniranje kao što su: efemeride satelita (podaci o položaju i brzini), parametri časovnika satelita, podaci o stanju i ispravnosti satelita, podaci nephodni za primenu određenih korekcionih modela, kao i mnogi drugi parametri.

Osnovni pojmovi o signalima

Kompletni signal dobija se kombinovanjem prethodno navedenih komponenti u okviru procesa binarnog sabiranja i fazne modulacije (binarno fazno kodiranje - Binary Phase Shift Keying BPSK):



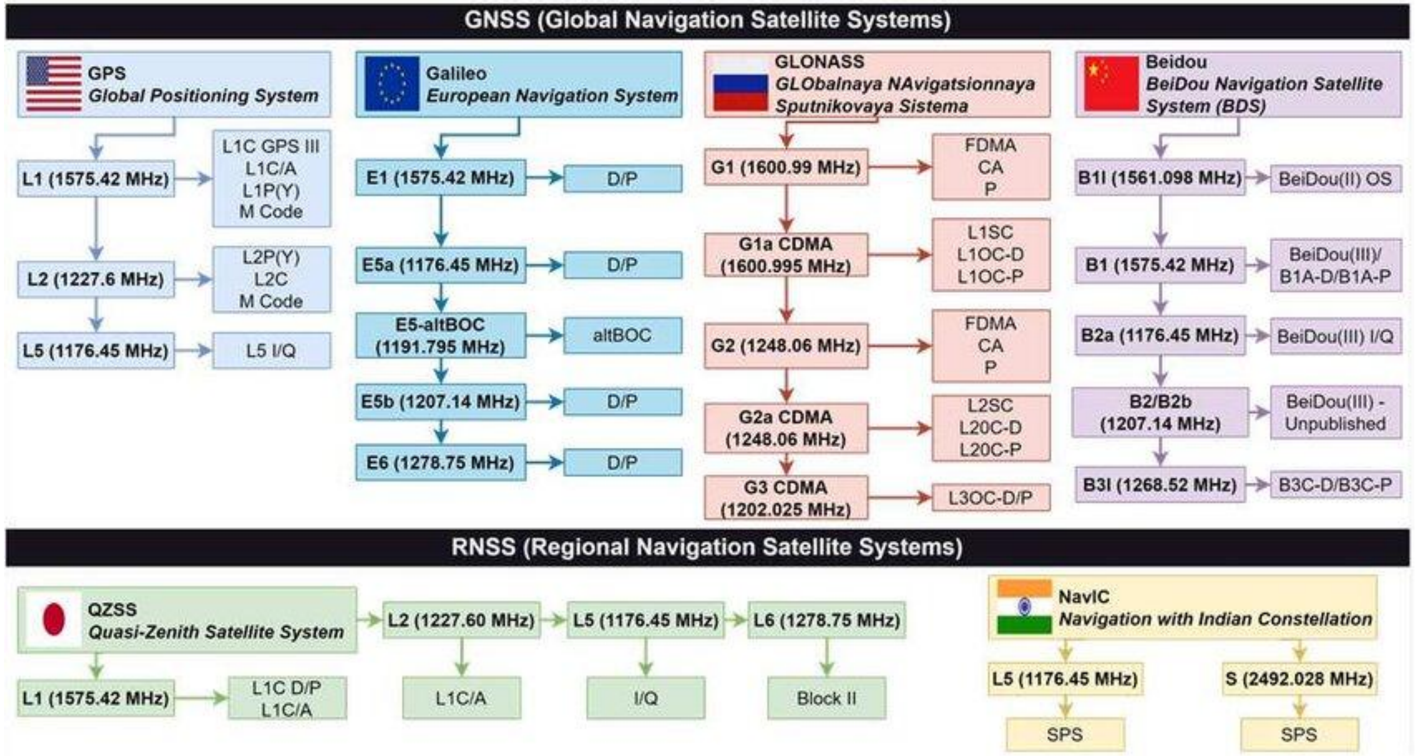
Osnovni pojmovi o signalima

GPS sateliti emituju signale koristeći dve frekvencije iz L-opsega (UHF frekvencijsko područje):

- Link 1 (L1) - $f_{L1} = 1575.42$ MHz
- Link 2 (L2) - $f_{L2} = 1227.60$ MHz

Prikazane frekvencije su izvedene iz osnovne frekvencije $f_0 = 10.23$ MHz:

- $f_{L1} = 154 \cdot f_0$ MHz
- $f_{L2} = 120 \cdot f_0$ MHz



Fazna i grupna brzina

Brzina prostiranja EM talasa:

- opšti slučaj - $v = \lambda / T = \lambda f$
- u vakuumu - $c_0 = 2.99792458 \cdot 10^8$ ms^{-1}

Prikazani izraz definiše faznu brzinu jer se odnosi na fazu talasa koji ima jednu frekvenciju:

$$v_{ph} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f = \frac{\omega}{k}$$

Fazna i grupna brzina

U realnosti se gotovo uvek radi o signalu kojeg predstavlja grupa elektromagnetnih talasa različitih frekvencija. Prostiranje talasne grupe odvija se grupnom brzinom v_{gr}.

Grupna brzina se može definisati posmatranjem 2 talasa jednakih amplituda pri $\varphi_0 = 0$:

$$y_1 = A\sin[\omega_1 t - k_1 x]$$

$$y_2 = A\sin[\omega_2 t - k_2 x]$$

Važi $\omega_1 = 2\pi f_1$ i $\omega_2 = 2\pi f_2$, kao i $k_1 = 2\pi/\lambda_1$ i $k_2 = 2\pi/\lambda_2$

Fazna i grupna brzina

Superpozicija dva talasa y_1 i y_2:

$$y_{gr} = y_1 + y_2 = A\sin[\omega_1 t - k_1 x] + A\sin[\omega_2 t - k_2 x] = A(\sin[\omega_1 t - k_1 x] + \sin[\omega_2 t - k_2 x])$$

Važi:

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

Sledi:

$$y_{gr} = 2A\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t - \frac{k_1 + k_2}{2}x\right)\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \frac{k_1 - k_2}{2}x\right)$$

Fazna i grupna brzina

Rezultat je signal sa amplitudom A_m i mešovitom kružnom frekvencijom ω_m:

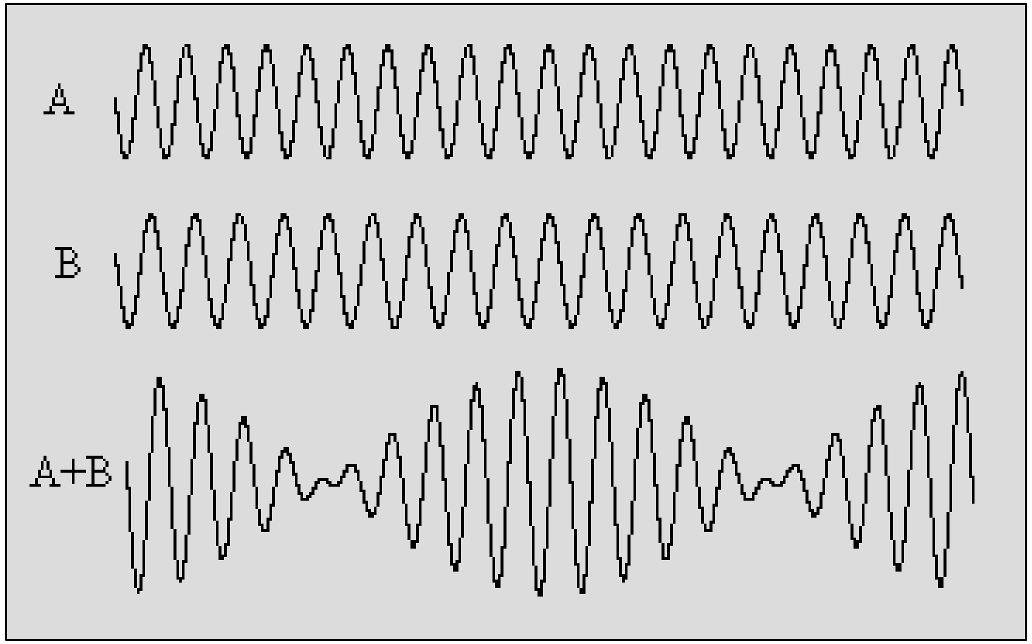
$$y_{gr} = A_m \sin(\omega_m t - k_m x)$$

gde su:

$$A_m = 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x\right)$$

$$\omega_m = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

$$k_m = \frac{k_1 + k_2}{2}$$



Fazna i grupna brzina

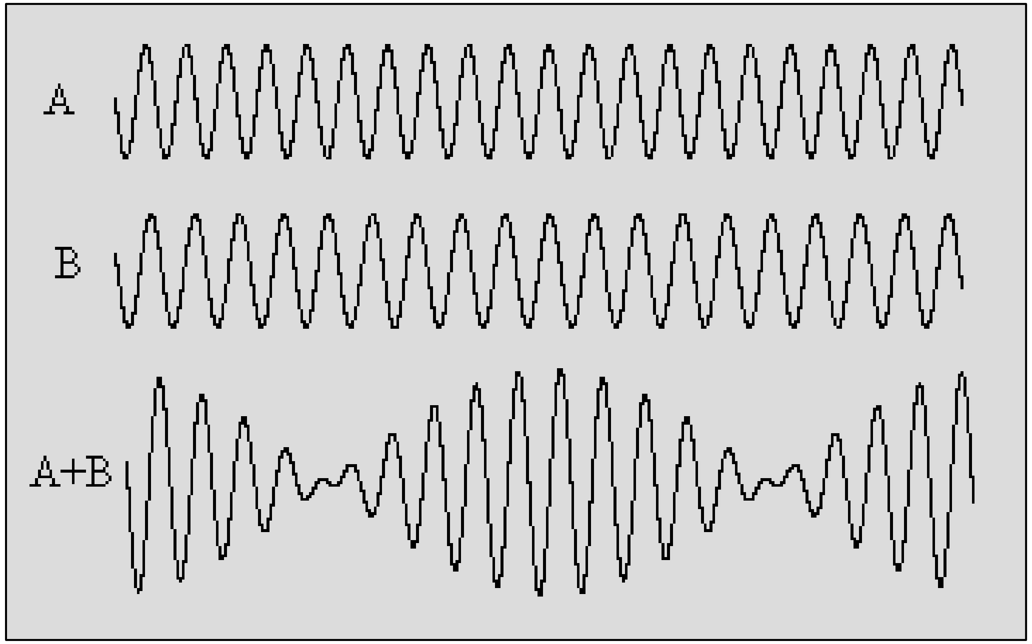
Iz jednačine:

$$A_m = 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \frac{k_1 - k_2}{2}x\right)$$

sledi da kretanje grupe karakteriše periodično promenljiva amplituda A_m i da se maksimumi premeštaju brzinom koja predstavlja odnos kružne frekvencije i talasnog broja grupe:

$$\omega_{gr} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$$

$$k_{gr} = \frac{k_1 - k_2}{2}$$



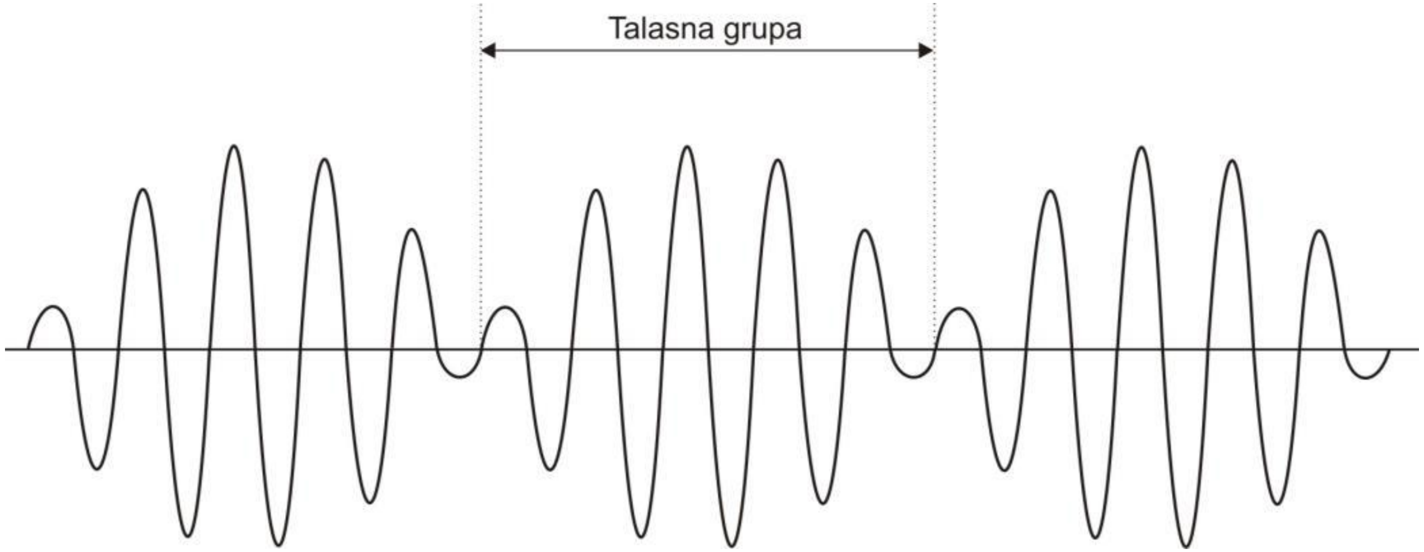
Fazna i grupna brzina

Dakle, za grupnu brzinu važi:

$$v_{gr} = \frac{\omega_{gr}}{k_{gr}} = \frac{f_1 - f_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\lambda_1\lambda_2 = -\frac{\Delta f}{\Delta \lambda}\lambda_1\lambda_2$$

Ako razlike Δf i $\Delta\lambda$ teže nuli, sledi:

$$v_{gr} = -\frac{df}{d\lambda}\lambda^2$$



Fazna i grupna brzina

Prostiranje talasne grupe odvija se grupnom brzinom v_{gr}:

$$v_{gr} = -\frac{df}{d\lambda}\lambda^2$$

Jednačina veze fazne i grupne brzine?

Formiranjem totalnog diferencijala jednačine $v_{ph} = \lambda f$

Fazna i grupna brzina

Formiranjem totalnog diferencijala jednačine $v_{ph} = \lambda f$:

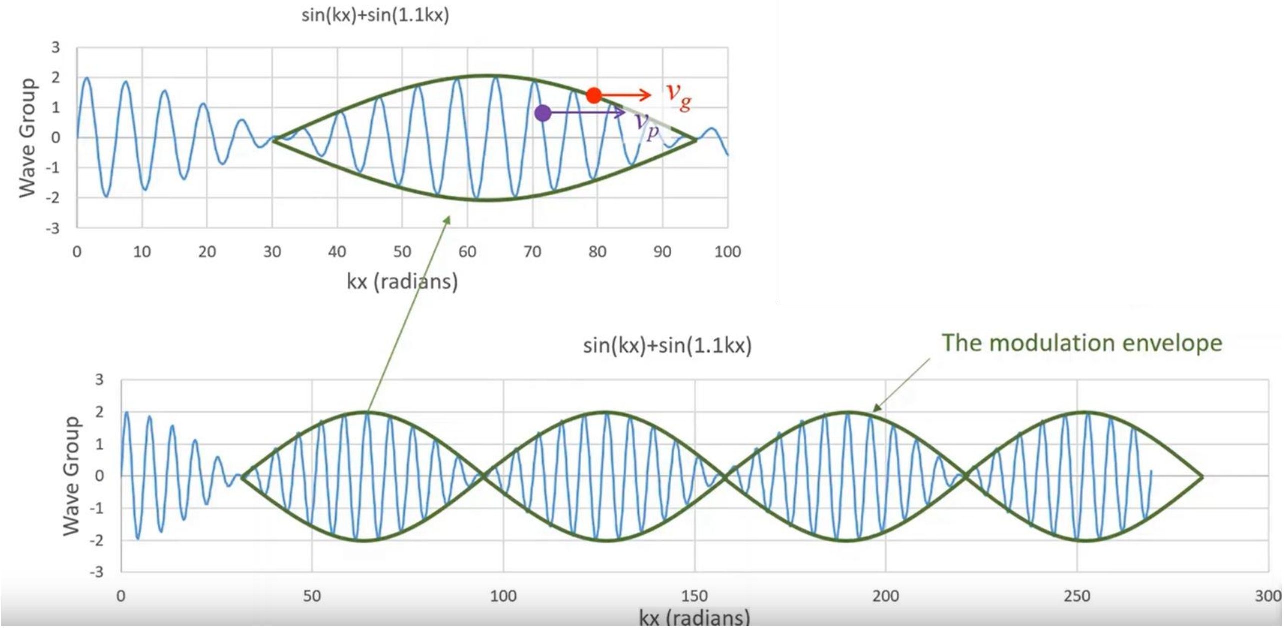
$$dv_{ph} = f d\lambda + \lambda df$$

Podelimo jednačinu sa $\lambda d\lambda$:

$$\frac{1}{\lambda}\frac{dv_{ph}}{d\lambda} = \frac{f}{\lambda} + \frac{df}{d\lambda}$$

Rekombinujemo članove:

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda}\frac{dv_{ph}}{d\lambda} - \frac{f}{\lambda}$$



Fazna i grupna brzina

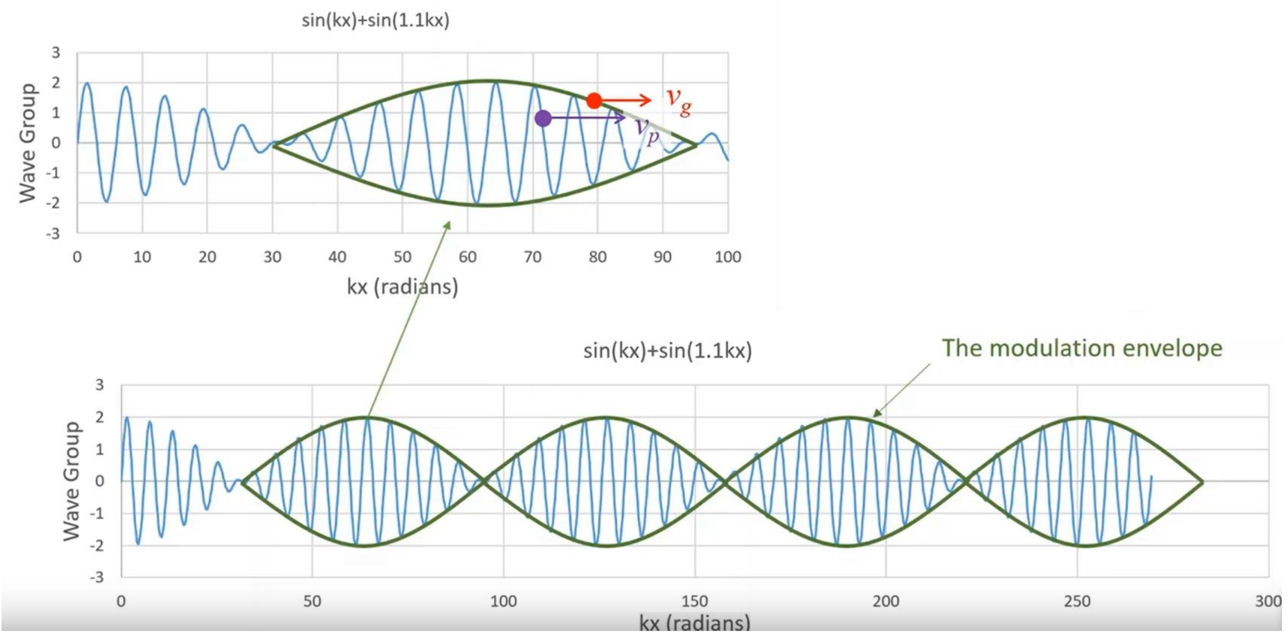
Zamenom u izraz za grupnu brzinu dobijamo:

$$v_{gr} = -\frac{df}{d\lambda}\lambda^2 = -\lambda^2\left(\frac{1}{\lambda}\frac{dv_{ph}}{d\lambda} - \frac{f}{\lambda}\right)$$

$$v_{gr} = -\lambda\frac{dv_{ph}}{d\lambda} + \lambda f = v_{ph} - \lambda\frac{dv_{ph}}{d\lambda}$$

U funkciji kružne frekvencije i talasnog broja:

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}\left(v_{ph}k\right) = v_{ph} + k\frac{dv_{ph}}{dk}$$



Fazna i grupna brzina

Pored izraza za brzinu, od velikog značaja su i izrazi kojima se definiše fazni i grupni indeks prelamanja, imajući u vidu da se upravo te veličine koriste prilikom definisanja kašnjenja signala usled uticaja jonosfere.

U disperzivnim sredinama razlikujemo:

- Fazni indeks prelamanja – n_{ph}
- Grupni indeks prelamanja – n_{gr}

$$n_i = \frac{c_0}{v_i} \quad \rightarrow \quad n_{ph} = \frac{c_0}{v_{ph}} \quad \rightarrow \quad n_{gr} = \frac{c_0}{v_{gr}}$$

Fazna i grupna brzina

Pored izraza za brzinu, od velikog značaja su i izrazi kojima se definiše fazni i grupni indeks prelamanja, imajući u vidu da se upravo te veličine koriste prilikom definisanja kašnjenja signala usled uticaja jonosfere.

U disperzivnim sredinama razlikujemo:

- Fazni indeks prelamanja – n_{ph}
- Grupni indeks prelamanja – n_{gr}

$$n_{gr} = n_{ph} - \lambda \frac{dn_{ph}}{d\lambda} = n_{ph} + f \frac{dn_{ph}}{df}$$

Fazna i grupna brzina

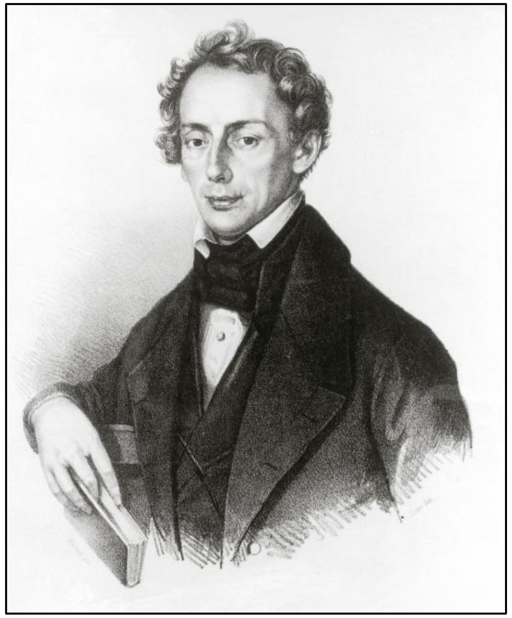
Može se zaključiti sledeće:

- brzina prostiranja faze definisanog elektromagnetnog talasa uniformne talasne dužine definiše se faznom brzinom;
- brzina prostiranja talasne grupe generisane superpozicijom različitih talasa sa različitim talasnim dužinama definiše se grupnom brzinom;
- u kontekstu GPS tehnologije, prilikom merenja kodnih pseudodužina neophodno je razmatrati grupnu brzinu, dok je prilikom merenja faznih pseudodužina neophodno razmatrati faznu brzinu prostiranja.

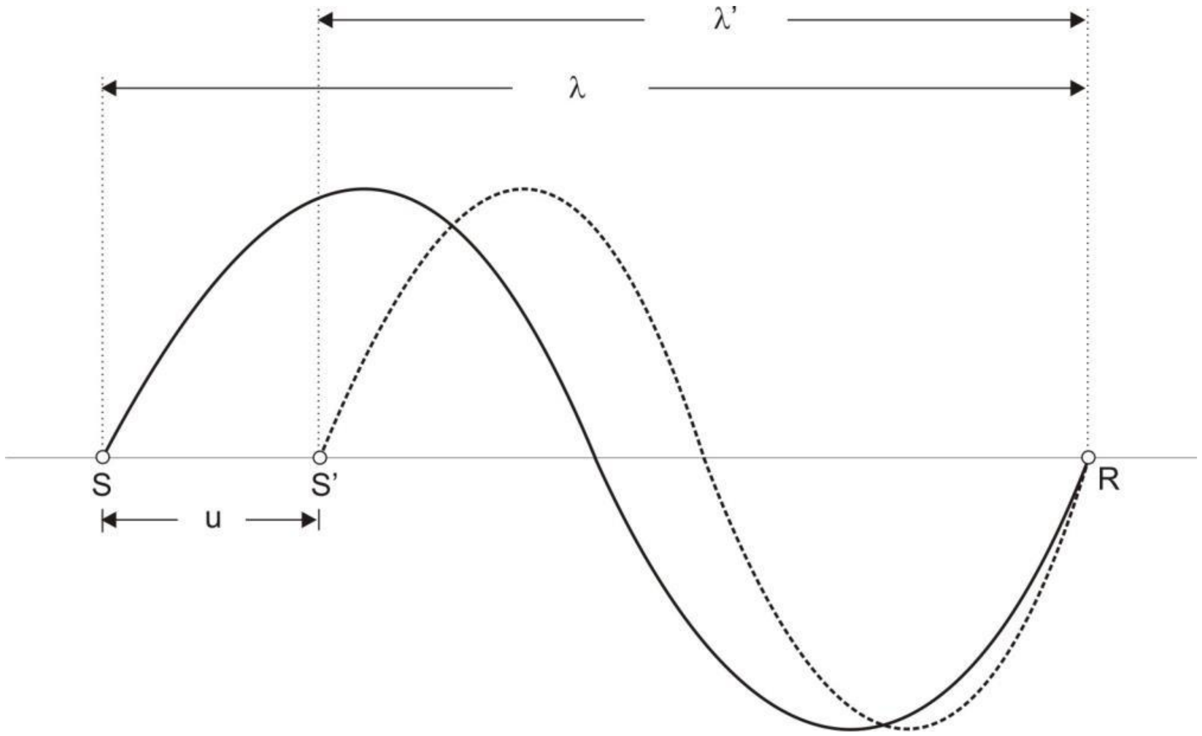
Doplerov efekat

Elektromagnetni talasi poseduju osobinu koja se sastoji u tome da im se talasna dužina i frekvencija menjaju kada se predajnik (izvor talasa) kreće relativno u odnosu na prijemnik (opažača).

Ova pojava je karakteristična za sve vrste talasa i naziva se **Doplerovim efektom** (1842. godine).



Christian Doppler
(1803-1853)



Doplerov efekat

Elektromagnetni talasi poseduju osobinu koja se sastoji u tome da im se talasna dužina i frekvencija menjaju kada se predajnik (izvor talasa) kreće relativno u odnosu na prijemnik (opažača).

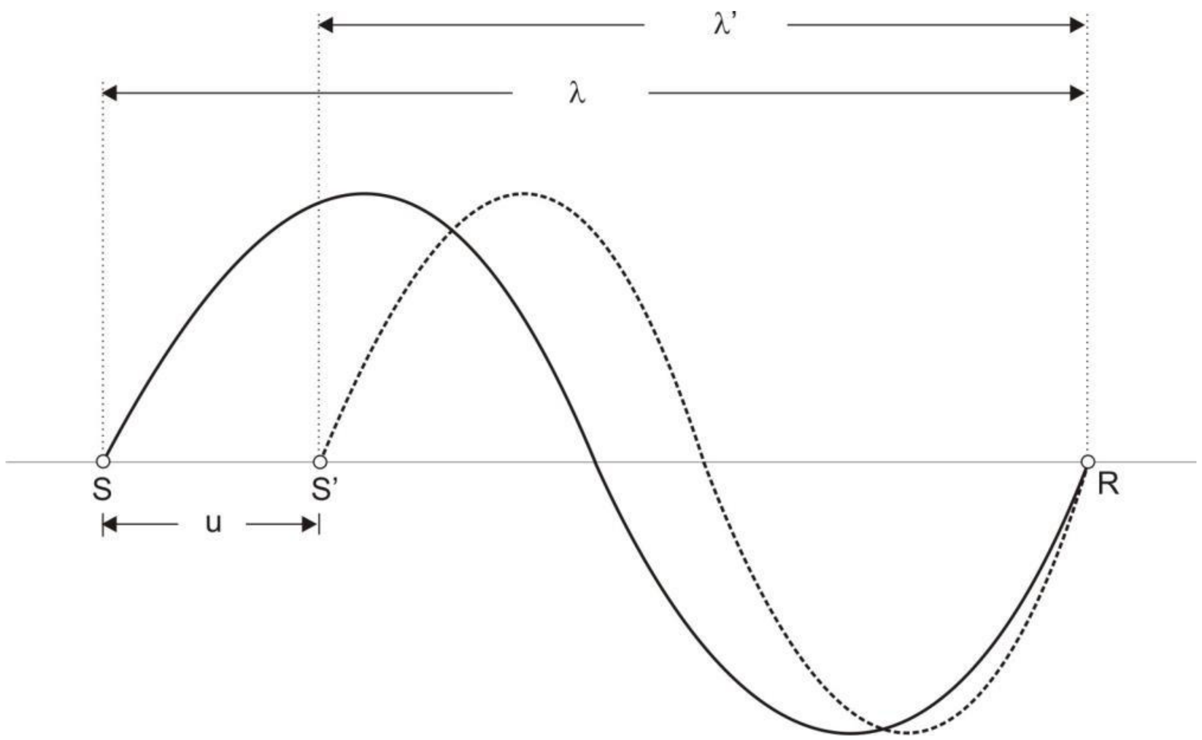
Ova pojava je karakteristična za sve vrste talasa i naziva se **Doplerovim efektom** (1842. godine).

v_s - brzina kretanja predajnika

$$\lambda' = \lambda - u = \frac{v}{f_s} - \frac{v_s}{f_s} = \frac{v}{f_s}\left(1 - \frac{v_s}{v}\right)$$

$$f_R \lambda' = f_S \lambda = v$$

$$f_R = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{\frac{v}{f_s}\left(1 - \frac{v_s}{v}\right)} = \frac{f_s}{1 - \frac{v_s}{v}}$$



Doplerov efekat

Elektromagnetni talasi poseduju osobinu koja se sastoji u tome da im se talasna dužina i frekvencija menjaju kada se predajnik (izvor talasa) kreće relativno u odnosu na prijemnik (opažača).

Ova pojava je karakteristična za sve vrste talasa i naziva se **Doplerovim efektom** (1842. godine).

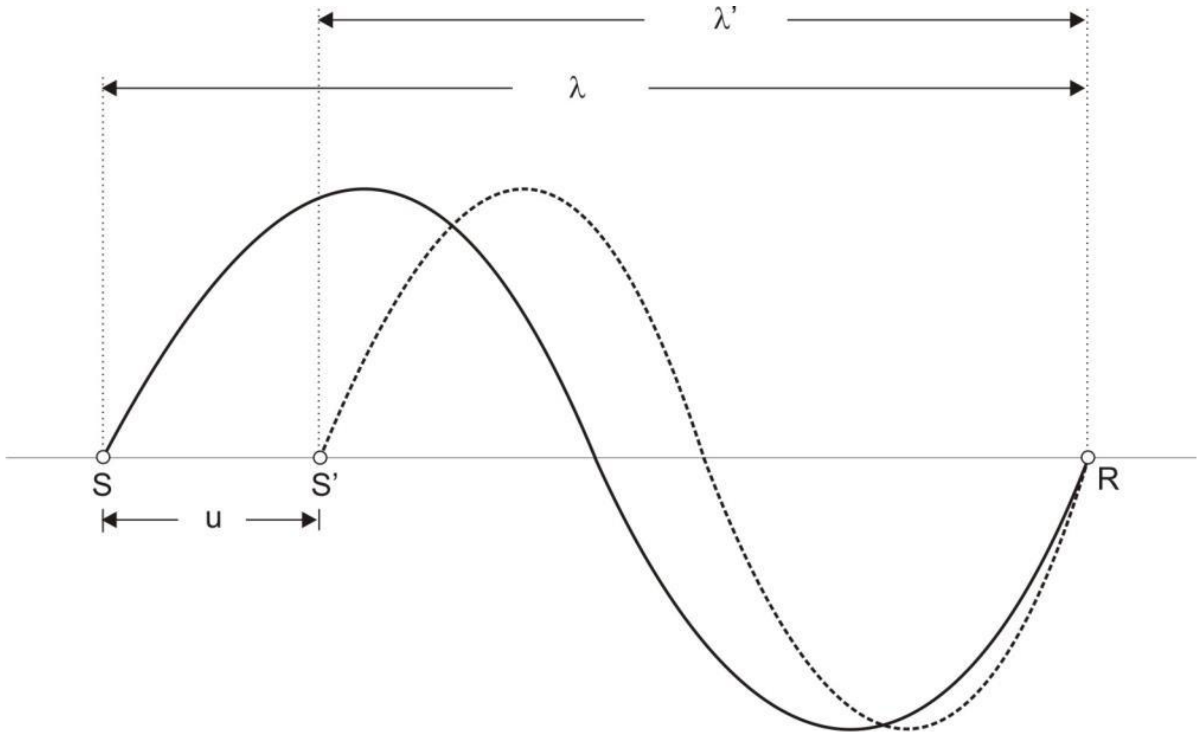
- razvojem u red izraza:

$$f_R = \frac{f_s}{1 - \frac{v_s}{v}}$$

dobijamo:

$$f_R = f_S\left(1 + \frac{v_s}{v}\right)$$

*** predajnik se približava prijemniku**



Doplerov efekat

Elektromagnetni talasi poseduju osobinu koja se sastoji u tome da im se talasna dužina i frekvencija menjaju kada se predajnik (izvor talasa) kreće relativno u odnosu na prijemnik (opažača).

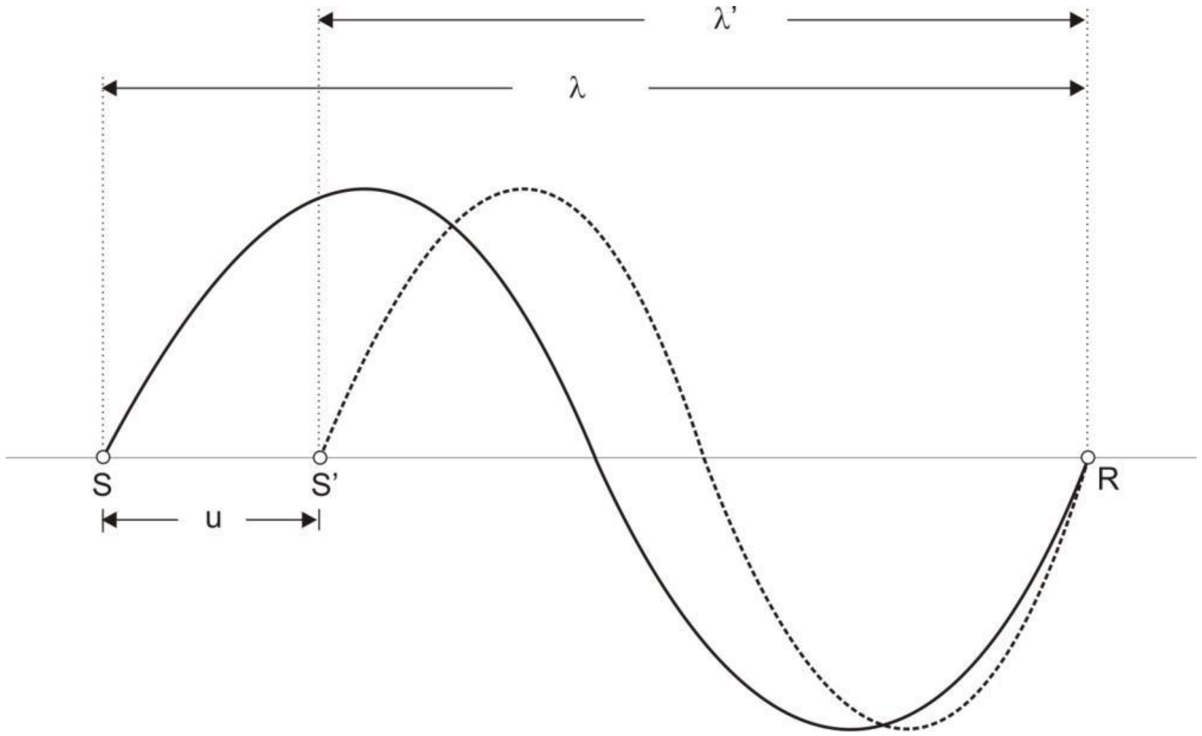
Ova pojava je karakteristična za sve vrste talasa i naziva se **Doplerovim efektom** (1842. godine).

$$f_R = f_S\left(1 + \frac{v_S}{v}\right)$$

*** predajnik se približava prijemniku**

$$f_R = f_S\left(1 - \frac{v_S}{v}\right)$$

**** predajnik se udaljava od prijemnika**



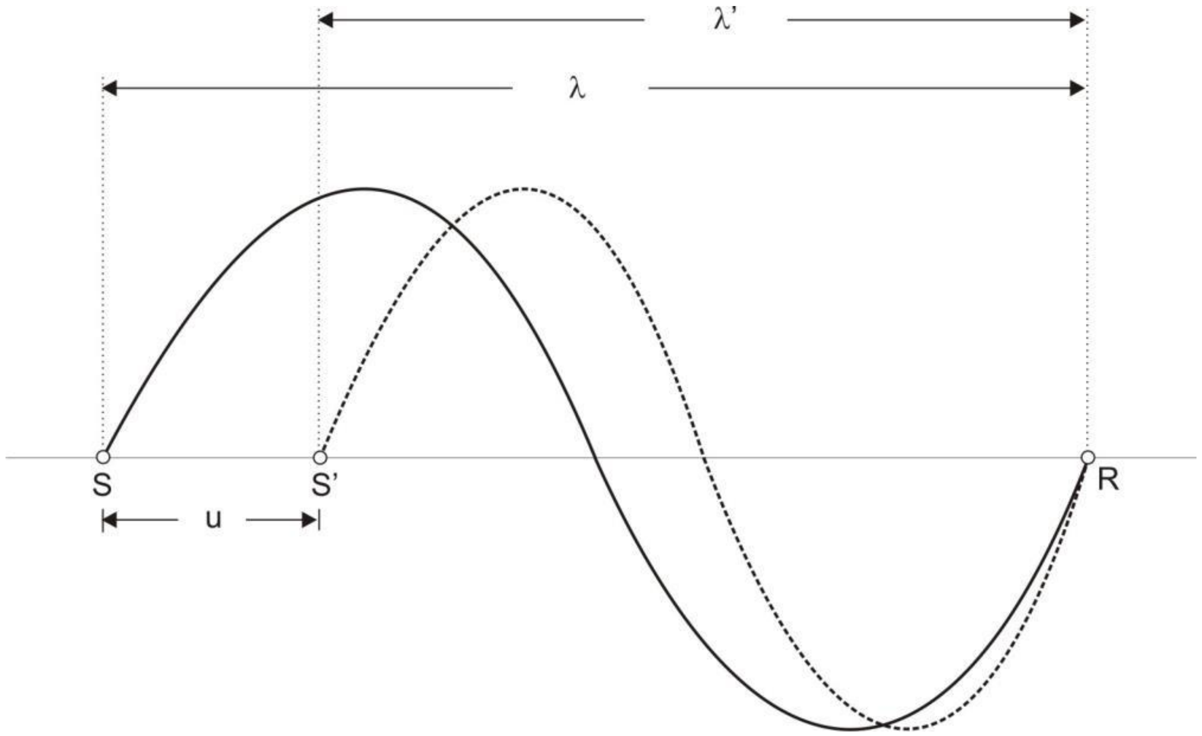
Doplerov efekat

Elektromagnetni talasi poseduju osobinu koja se sastoji u tome da im se talasna dužina i frekvencija menjaju kada se predajnik (izvor talasa) kreće relativno u odnosu na prijemnik (opažača).

Ova pojava je karakteristična za sve vrste talasa i naziva se **Doplerovim efektom** (1842. godine).

- u opštem slučaju:

$$f_R = f_S\left(1 - \frac{1}{v}\frac{ds}{dt}\right)$$



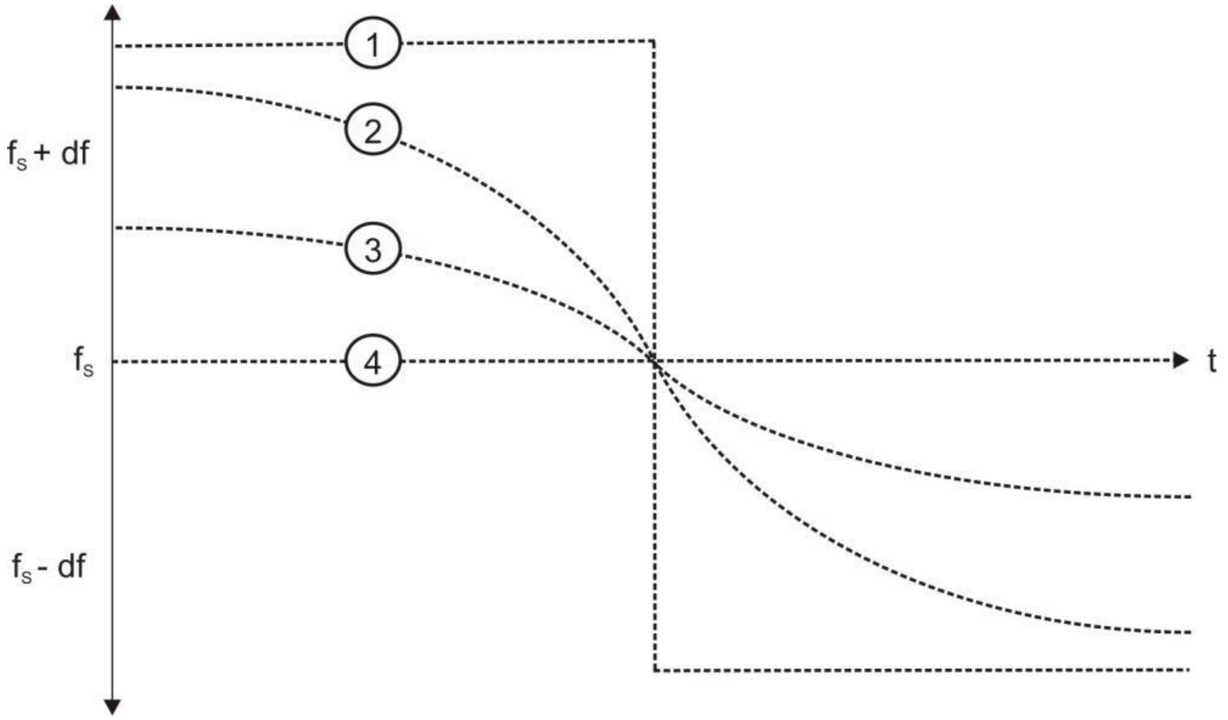
Doplerov efekat

Elektromagnetni talasi poseduju osobinu koja se sastoji u tome da im se talasna dužina i frekvencija menjaju kada se predajnik (izvor talasa) kreće relativno u odnosu na prijemnik (opažača).

Ova pojava je karakteristična za sve vrste talasa i naziva se **Doplerovim efektom** (1842. godine).

Doplerova kriva:

- Slučaj 1: prijemnik na putanji
- Slučaj 2 i 3: putanja je na određenom rastojanju od prijemnika
- Slučaj 4: kružna putanja



Kretanje signala kroz atmosferu

Signali emitovani sa satelita kreću se najvećim delom kroz sredinu koja se može smatrati praznim prostorom.

Prostiranje elektromagnetnih talasa se u tom slučaju odvija pravolinijski i brzinom svetlosti, pri čemu između fazne i grupne brzine **ne postoji** nikakva razlika.

Međutim, satelitski signali jednim delom prolaze i kroz Zemljin atmosferski omotač, odnosno **Zemljinu atmosferu**.

U Zemljinoj atmosferi elektromagnetni talasi menjaju svoja **svojstva** - brzinu prostiranja i oblik putanje.

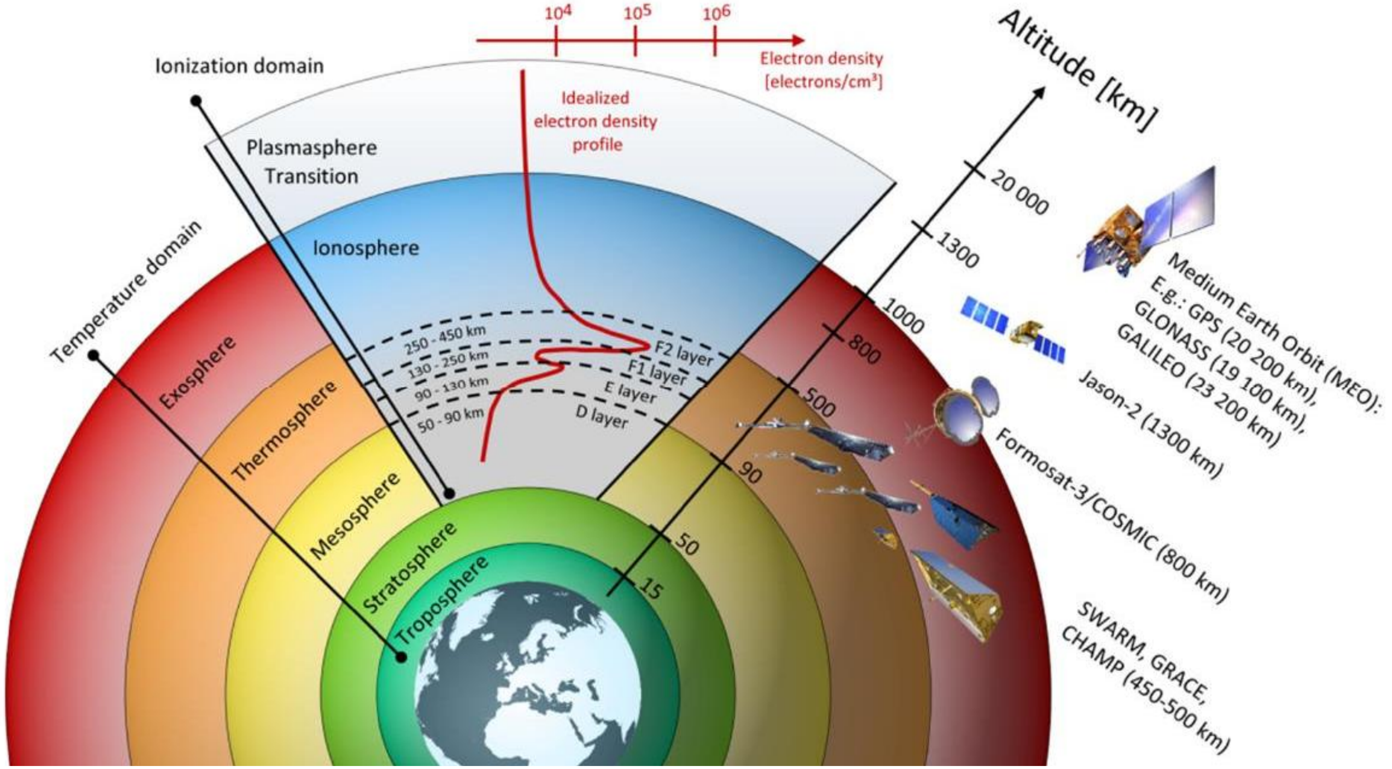
Ukupan efekat naziva se **atmosferskom refrakcijom**.

Kretanje signala kroz atmosferu

Zemljina atmosfera - sloj gasova koji okružuje planetu Zemlju.

Njena struktura poseduje visok stepen kompleksnosti, ali se kod određenih primena može opisati kao set koncentričnih sferičnih omotača specifičnih svojstava.

Uzimajući u obzir aspekt prostiranja satelitskih signala, atmosfera se može podeliti na dva sloja: **jonosferu** i **troposferu**.



Kretanje signala kroz atmosferu

Važni pojmovi:

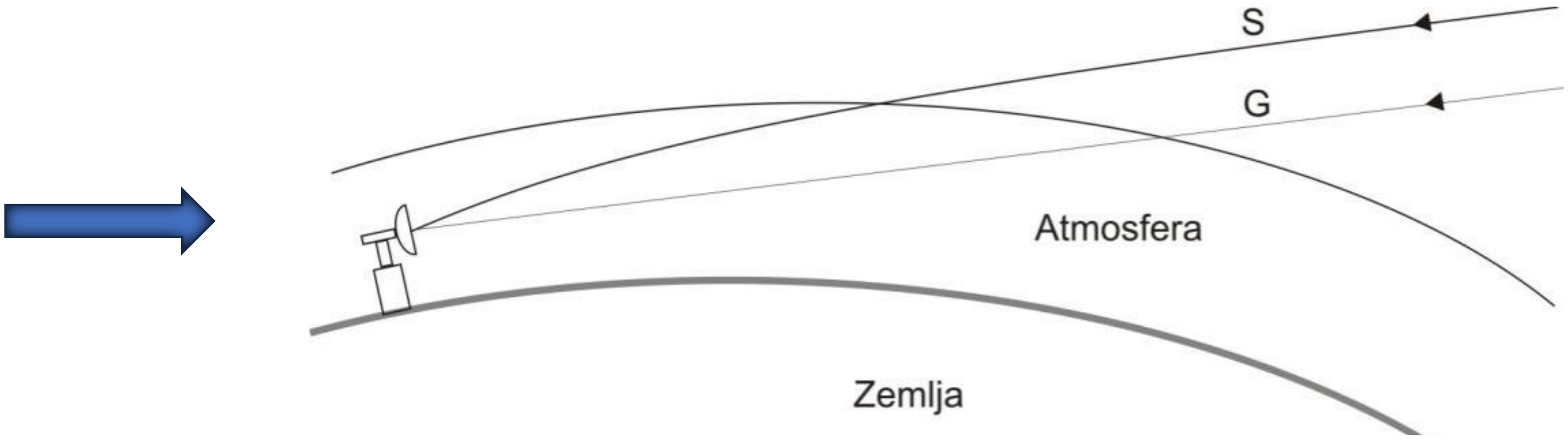
- Indeks prelamanja sredine:

$$n_i = \frac{c_0}{v_i}$$

- Refrakcioni broj:

$$N_i = (n_i - 1)10^6$$

- Fermatov princip:



Kretanje signala kroz atmosferu

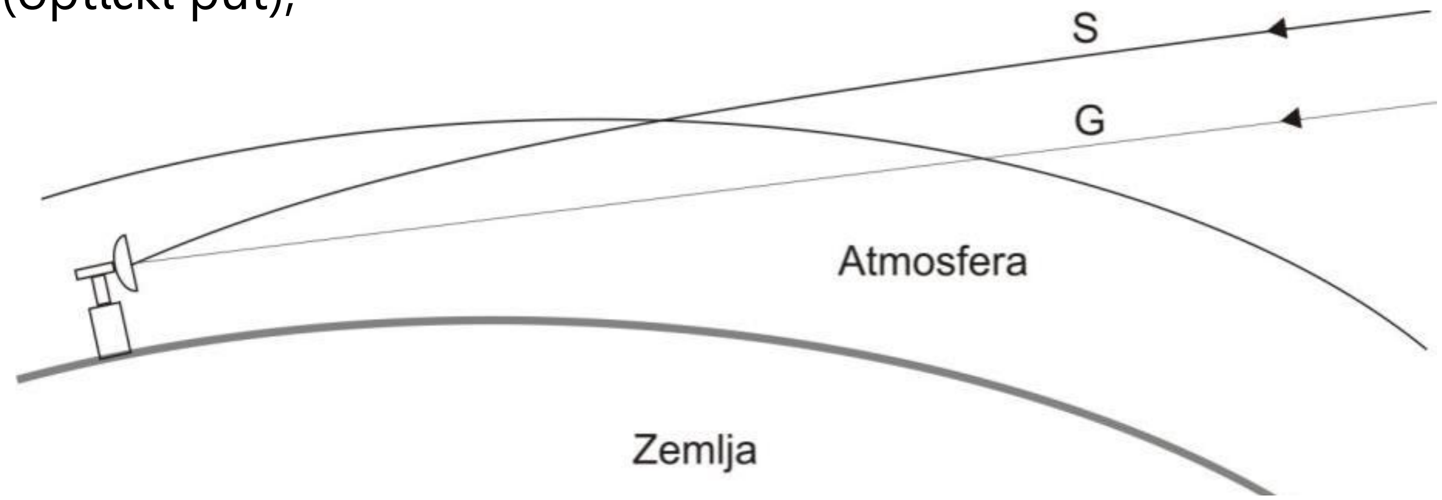
Fermatov princip

- prema Fermatovom principu, elektromagnetni talas će se prilikom prostiranja u nehomogenoj sredini prostirati putanjom koja se razlikuje od pravolinijskog rastojanja, tako da vreme prostiranja kroz datu sredinu bude minimalno,

- aktuelna putanja signala S razlikuje od pravolinijskog, geometrijskog rastojanja G,

- indeks prelamanja atmosfere menja se kao funkcija položaja s duž optičkog puta,

- signal se najbrže kreće putanjom S (optički put),



Kretanje signala kroz atmosferu

Fermatov princip

- indeks prelamanja atmosfere menja se kao funkcija položaja s duž optičkog puta:

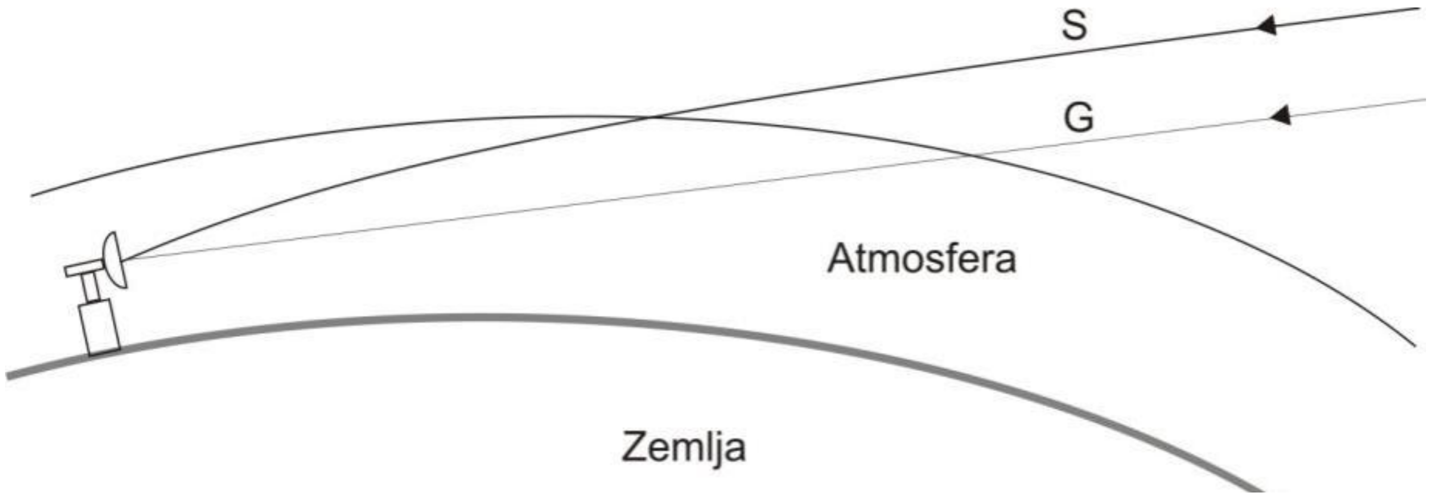
$$n = \frac{c_0}{v} = n(s)$$

- dalje sledi:

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \rightarrow \quad dt = \frac{ds}{v}$$

$$v = \frac{c_0}{n} \quad \rightarrow \quad dt = \frac{ds}{\frac{c_0}{n}}$$

$$dt = \frac{n(s)}{c_0} ds$$



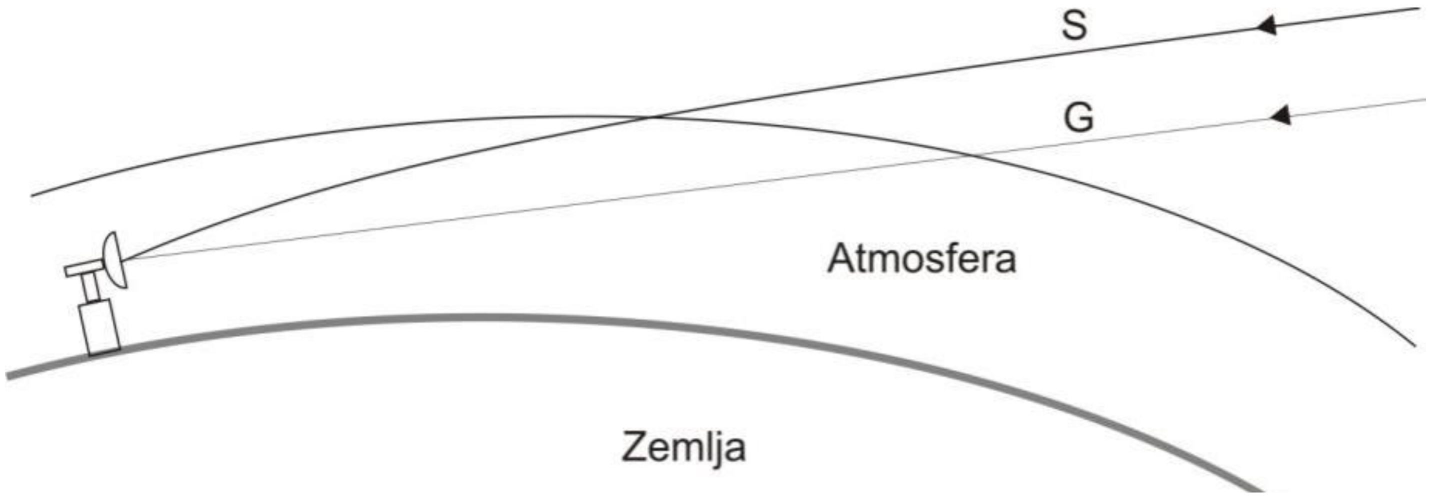
Kretanje signala kroz atmosferu

Fermatov princip

- dalje sledi:

$$dt = \frac{n(s)}{c_0} ds \quad \rightarrow \quad \Delta t = t_2 - t_1 = \int_R^S \frac{n(s)}{c_0} ds$$

$$S = c_0 \Delta t = \int_S^R n(s) ds$$



Kretanje signala kroz atmosferu

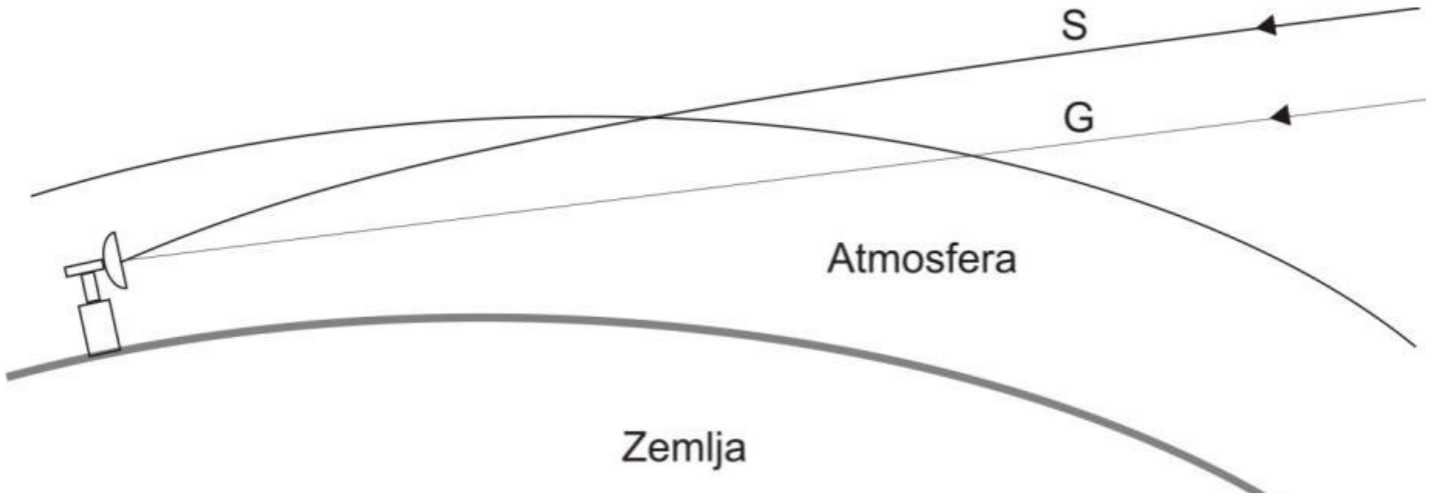
Fermatov princip

- Mereno rastojanje:

$$S = \int_{S}^{R} n(s) ds$$

- Pravolinijsko rastojanje G:

$$G = \int_{S}^{R} n ds = \int_{S}^{R} ds$$



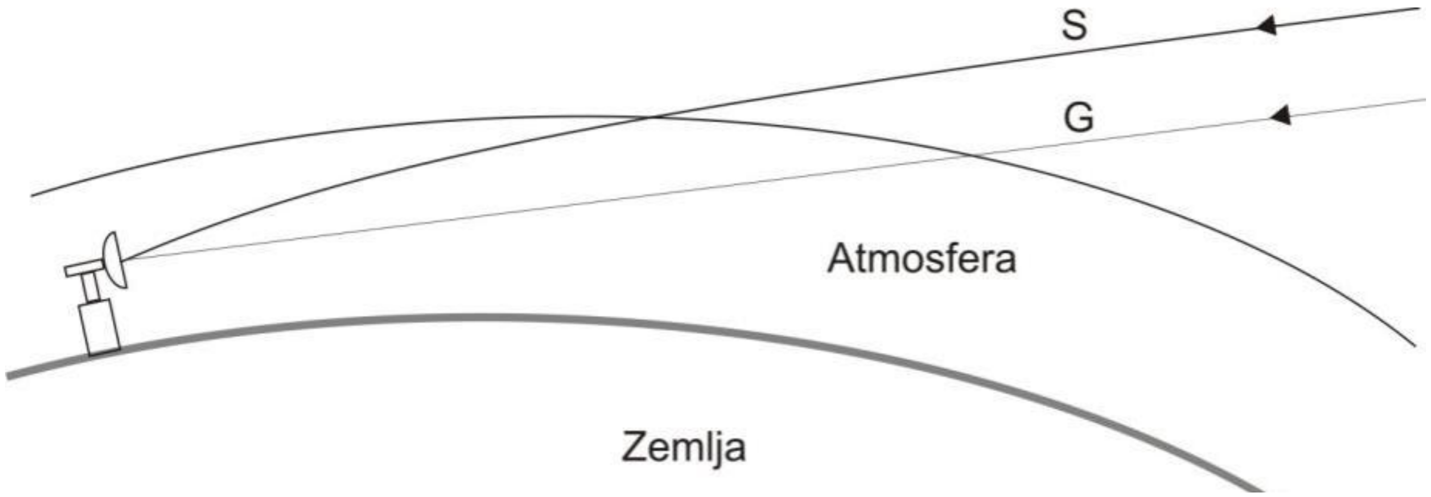
Kretanje signala kroz atmosferu

Fermatov princip

- Atmosferska refrakcija:

$$\Delta S = S - G = \int_{S}^{R} (n(s) - 1)ds$$

- Imajući u vidu prethodno, za određivanje atmosferske refrakcije neophodno je poznavanje indeksa prelamanja sredine duž putanje prostiranja signala.

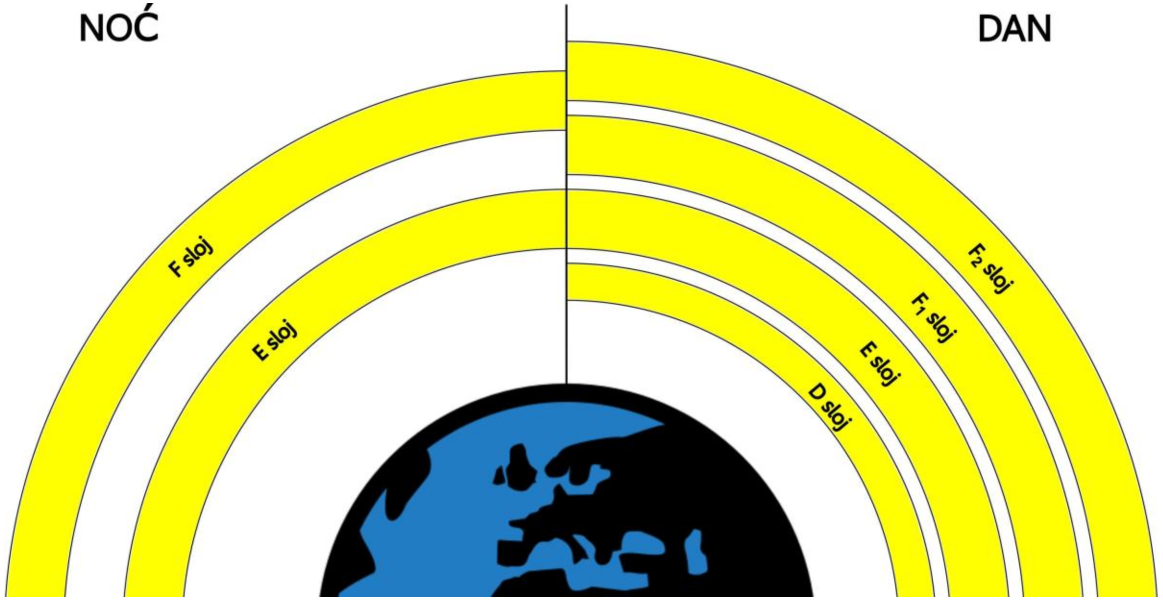


Kretanje signala kroz atmosferu

Kretanje signala kroz jonosferu

- Zemljina jonosfera se može definisati kao gornji sloj Zemljine atmosfere u kome dominantno preovladavaju naelektrisane osobine kao posledica prisustva naelektrisanih čestica – slobodni elektroni i joni, koje nastaju prvenstveno kao posledica jonizacije od strane pristiglog Sunčevog zračenja.

- Jonosfera se prostire na visinama od oko 50 km do preko 1000 km:
  - D sloj (50 km – 90 km)
  - E sloj (90 km – 140 km)
  - F sloj (140 km – 1000 km)



Kretanje signala kroz atmosferu

Kretanje signala kroz jonosferu

- Osobine Zemljine jonosfere:
  - Homogenost: ✘
  - Izotropija: ✘
  - Disperzivnost: ✓

- Jonosfera je nehomogena sredina u kontekstu koncentracije elektrona što za posledicu ima blage promene indeksa prelamanja u prostornom domenu;

- Jonosfera nije izotropna sredina imajući u vidu da jonosferski indeks prelamanja zavisi od pravca prostiranja talasa u odnosu na linije sila geomagnetnog polja;

- Jonosfera je disperzivna sredina za radio talase, što za posledicu ima promenu indeksa prelamanja sredine, odnosno neophodno je razmatrati faznu i grupnu brzinu.

Kretanje signala kroz atmosferu

Kretanje signala kroz jonosferu

- Disperzivnost:
  - indeks prelamanja:

$$n_{gr} = 1 + \frac{40.3}{f^2} N_e \qquad n_{ph} = 1 - \frac{40.3}{f^2} N_e$$

- N_e - koncentracija elektrona (broj elektrona u jedinici zapremine)
- f - frekvencija singla

Kretanje signala kroz atmosferu

Kretanje signala kroz jonosferu

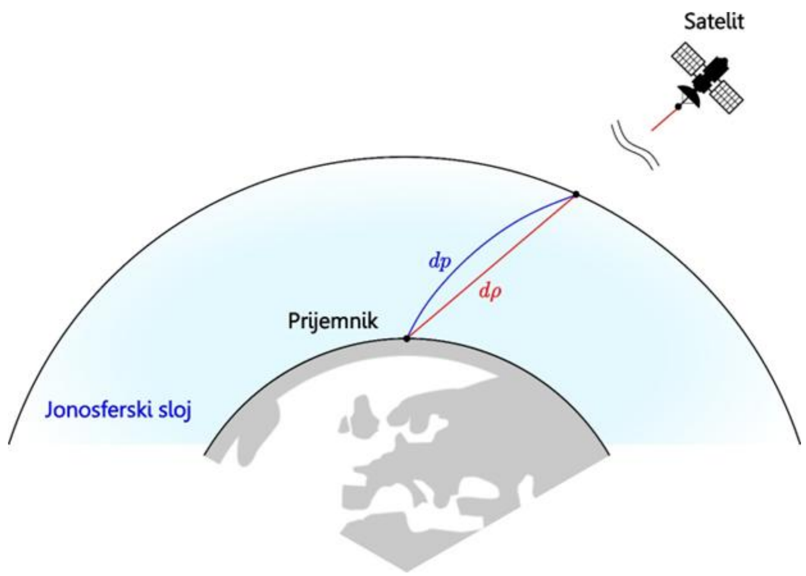
- Disperzivnost:
  - jonosferska refrakcija:

$$\Delta S_{I_{gr}} = \int_S (n(s)_{gr} - 1)ds \qquad \Delta S_{I_{ph}} = \int_S (n(s)_{ph} - 1)ds$$

$$\Delta S_{I_{gr}} = \int_S (1 + \frac{40.3}{f^2} N_e(s) - 1)ds \qquad \Delta S_{I_{ph}} = \int_S (1 - \frac{40.3}{f^2} N_e(s) - 1)ds$$

$$\Delta S_{I_{gr}} = \int_S \frac{40.3}{f^2} N_e(s)ds \qquad \Delta S_{I_{ph}} = -\int_S \frac{40.3}{f^2} N_e(s)ds$$

Kretanje signala kroz atmosferu



Kretanje signala kroz jonosferu

- Disperzivnost:

  - jonosferska refrakcija:

$$\Delta S_{I_{gr}} = \frac{40.3}{f^2} \int_S N_e(s) ds \qquad \Delta S_{I_{ph}} = -\frac{40.3}{f^2} \int_S N_e(s) ds$$

Veličina $\int_S N_e(s) ds$ naziva se totalni (integralni) sadržaj elektrona (Total Electron Content – TEC).

Kretanje signala kroz atmosferu

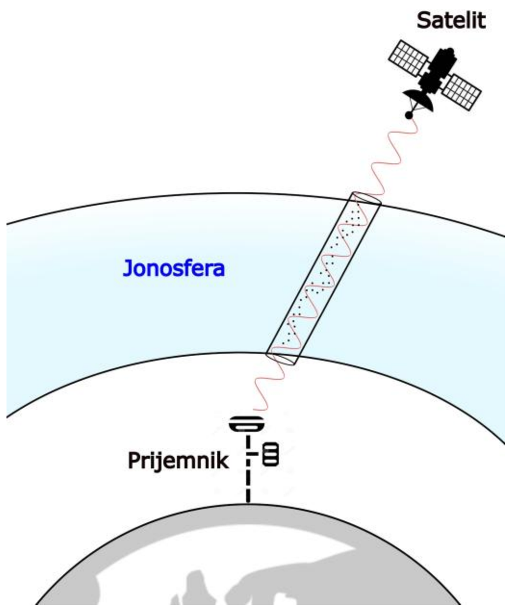
Kretanje signala kroz jonosferu

Veličina $\int_S N_e(s)ds$ naziva se totalni (integralni) sadržaj elektrona (Total Electron Content – TEC).

Totalni sadržaj elektrona se može definisati kao ukupan broj elektrona u zamišljenom cilindru sa osnovom površine 1 m^2, čija je osovina putanja signala.

Jedinica za TEC zove se TECU (Total Electron Content Unit), i iznosi 10^{16} slobodnih elektrona po kvadratnom metru.

$$\Delta S_{I_{gr}} = \frac{40.3}{f^2} TEC \qquad \Delta S_{I_{ph}} = -\frac{40.3}{f^2} TEC$$



* Uticaj je istog intenziteta ali je različit znak!
** greška merenja – od 10 m do 150 m.

Kretanje signala kroz atmosferu

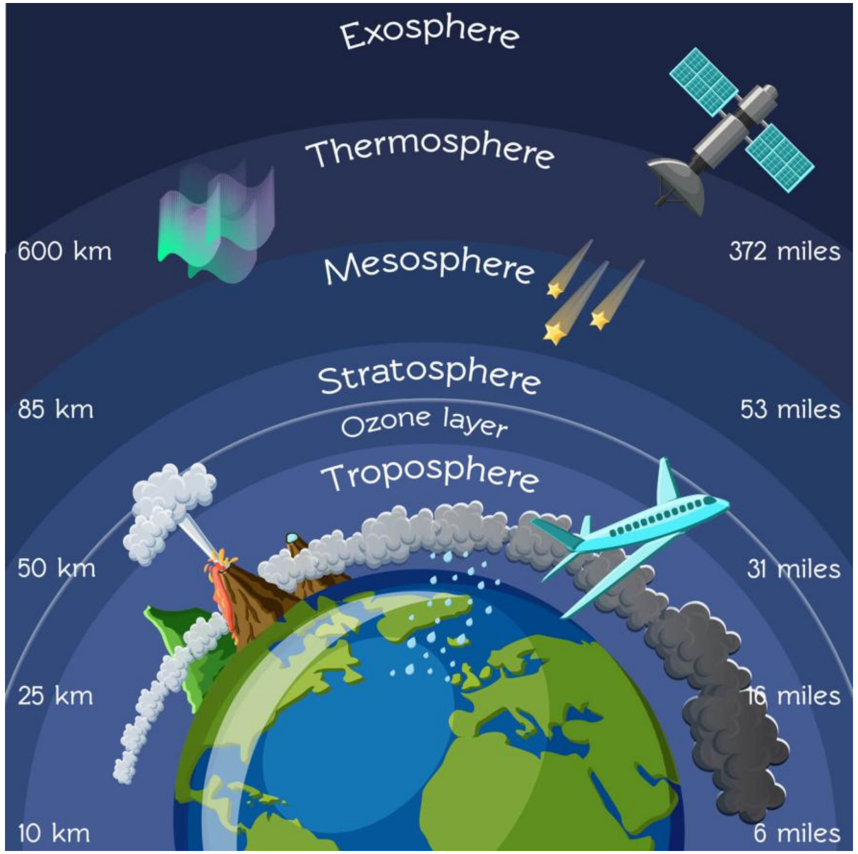
Kretanje signala kroz troposferu

- Troposfera je oblast atmosfere koja se proteže od fizičke površi Zemlje do visine od oko 20 km, pri čemu prvih 10 km obuhvata 99% svih atmosferskih gasova i celokupni sadržaj vodene pare.

- Troposfera nije disperzivna sredina za radio talase.

- Indeks prelamanja troposfere je funkcija atmosferskih parametara:

  - P – pritisak,
  - T – temperatura,
  - e – parcijalni pritisak vodene pare.



Kretanje signala kroz atmosferu

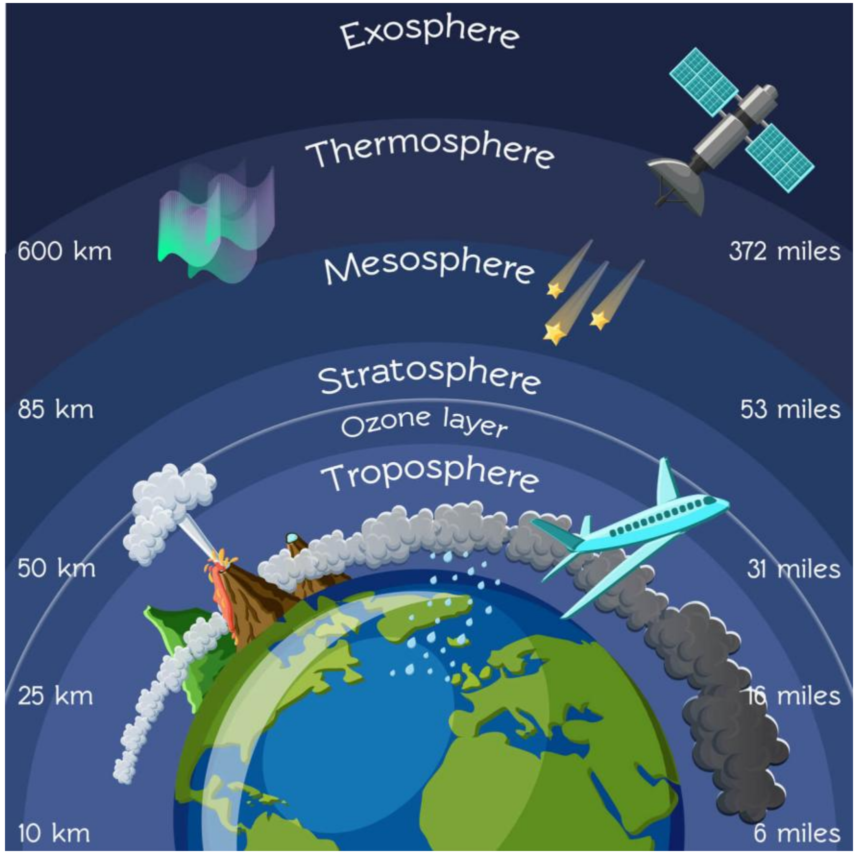
Kretanje signala kroz troposferu

- Indeks prelamanja troposfere je funkcija atmosferskih parametara:

  - P – pritisak,
  - T – temperatura,
  - e – parcijalni pritisak vodene pare.

$$n = 1 + c_1 \frac{P}{T} + c_2 \frac{e}{T^2}$$

$$\Delta S_T = \int_S (n-1) ds$$



Kretanje signala kroz troposferu

- Često se koristi refrakcioni broj umesto indeksa prelamanja troposfere:

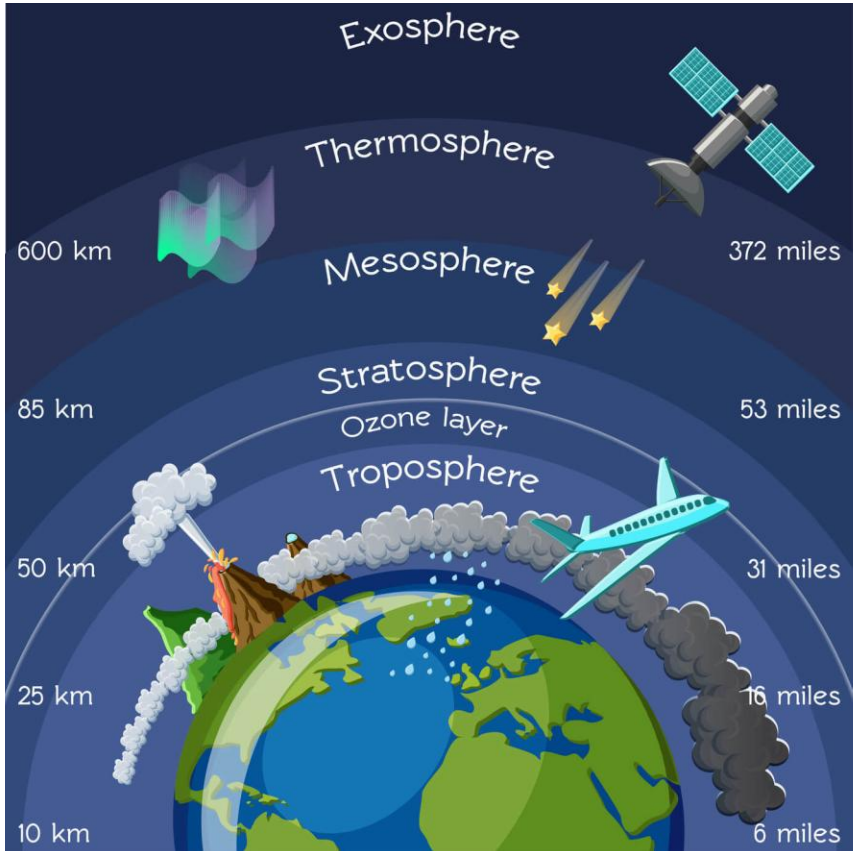
$$N = (n-1)10^6$$

$$N = c_1 \frac{P}{T} + c_2 \frac{e}{T^2}$$

* empirijski određeno: $c_1 = 77.6$ i $c_2 = 3.73 \cdot 10^5$

- Troposferska refrakcija:

$$\Delta S_T = \int_S \frac{N}{10^6} ds = 10^{-6} \int_S N(s) ds$$



Kretanje signala kroz atmosferu

Kretanje signala kroz troposferu

- Analiza izraza:

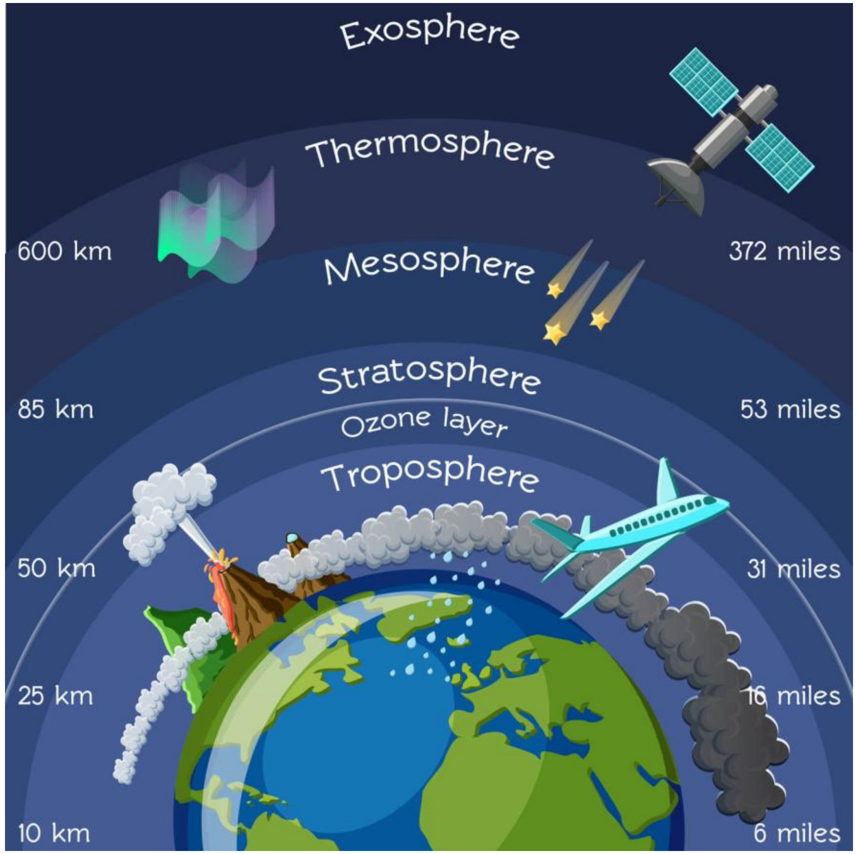
$$N = c_1 \frac{P}{T} + c_2 \frac{e}{T^2}$$

  - prvi član – uticaj suvog vazduha (suva komponenta),
  - drugi član – uticaj vodene pare (vlažna komponenta).

- Troposferska refrakcija:

$$\Delta S_T = \Delta S_{T\,dry} + \Delta S_{T\,wet}$$

$$\Delta S_T = 10^{-6} \int_S N_{dry}(s) ds + 10^{-6} \int_S N_{wet}(s) ds$$



Kretanje signala kroz atmosferu

Kretanje signala kroz troposferu

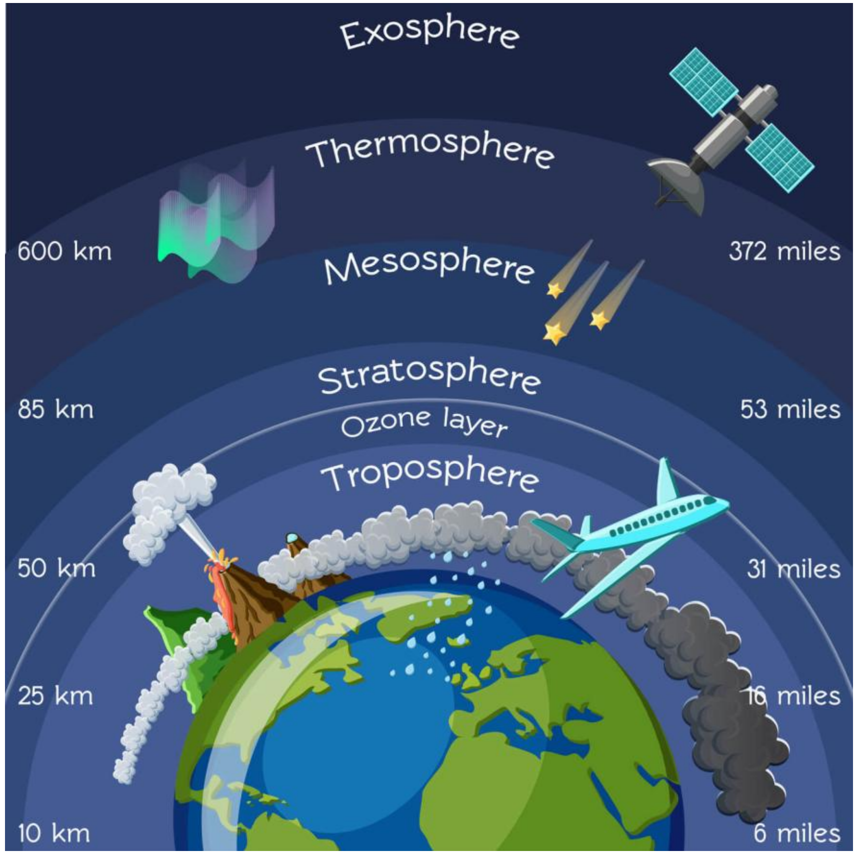
Troposferska refrakcija:

$$\Delta S_T = \Delta S_{T\,dry} + \Delta S_{T\,wet}$$

- suva komponenta relativno se lako modelira jer je raspodela suvog vazduha I geografski i po visini veoma homogena. Ona učestvuje sa dominantnih 90% u ukupnom efektu troposferske refrakcije, i zavisi pre svega od vazdušnog pritiska,

- vlažna komponenta se, nasuprot tome, vrlo teško prognozira jer se sadržaj i raspodela vodene pare u troposferi nepredvidivo menjaju, kako prostorno tako i vremenski.

* greška merenja – od 2 m do 25 m.



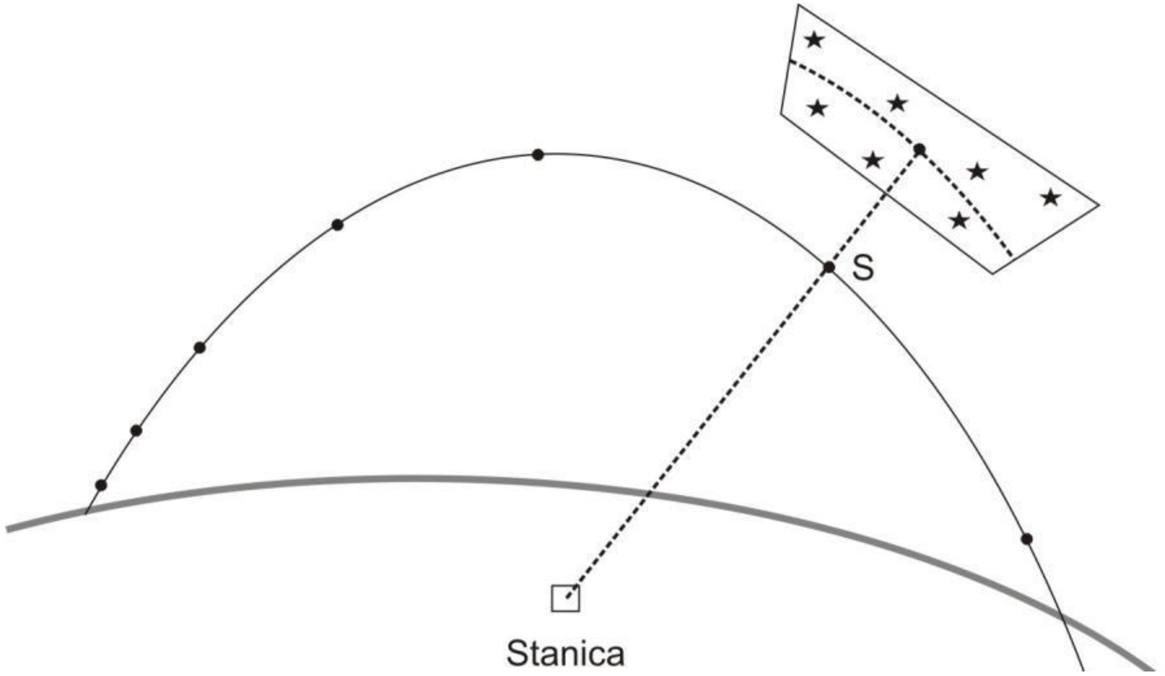
Satelitsko merenje pravaca

Određivanje pravaca prema satelitima predstavlja jednu od najranijih opažačkih tehnika u satelitskoj geodeziji.

- **fotografska metoda** – korišćenjem EM talasa iz vidljivog dela spektra,
- osnovna ideja – fotografisanje satelita i pozadinskog neba noću, dok se stanica sa kamerom nalazi u Zemljinoj senci,
- trag satelitske putanje.

Osnovni rezultat:

- merljiv snimak – mogu se meriti koordinate



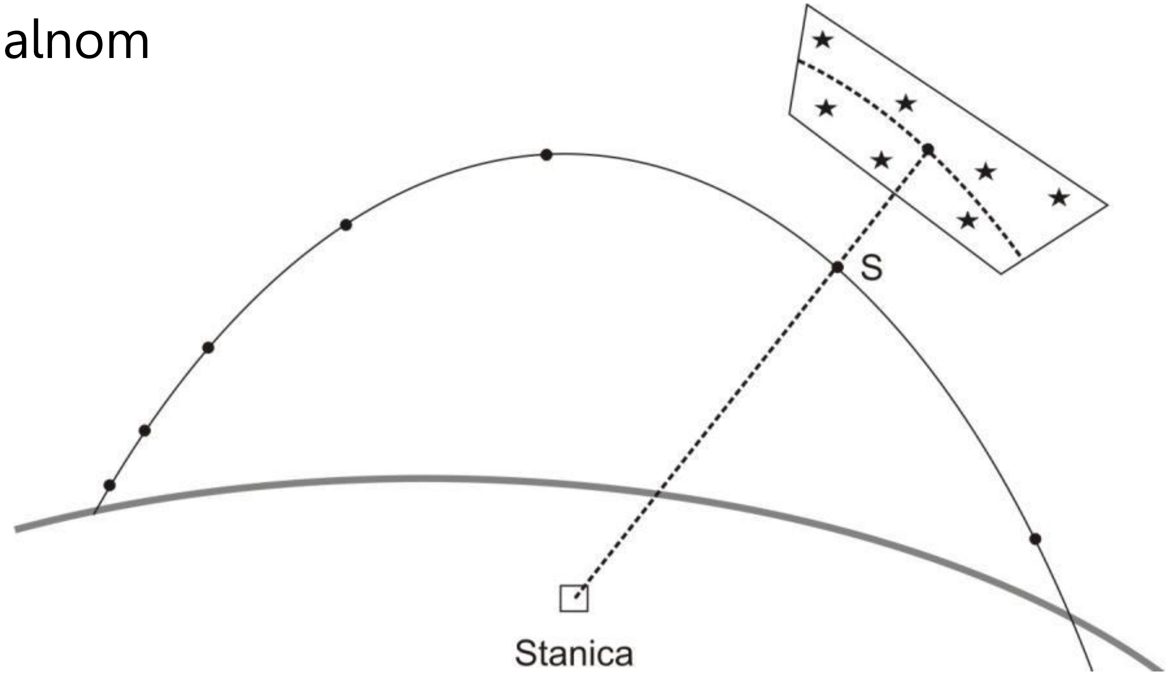
Satelitsko merenje pravaca

Osnovne merene veličine na snimku:

- pravougle koordinate satelita - (x_s, y_s),
- pravougle koordinate zvezda - (x_i, y_i),

Koordinate zvezda → poznate veličine iz kataloga:

- polarne koordinate u konvencionalnom inercijalnom referentom sistemu - (α_i, δ_i),
  - α_i - rektascenzija,
  - δ_i - deklinacija.



Satelitsko merenje pravaca

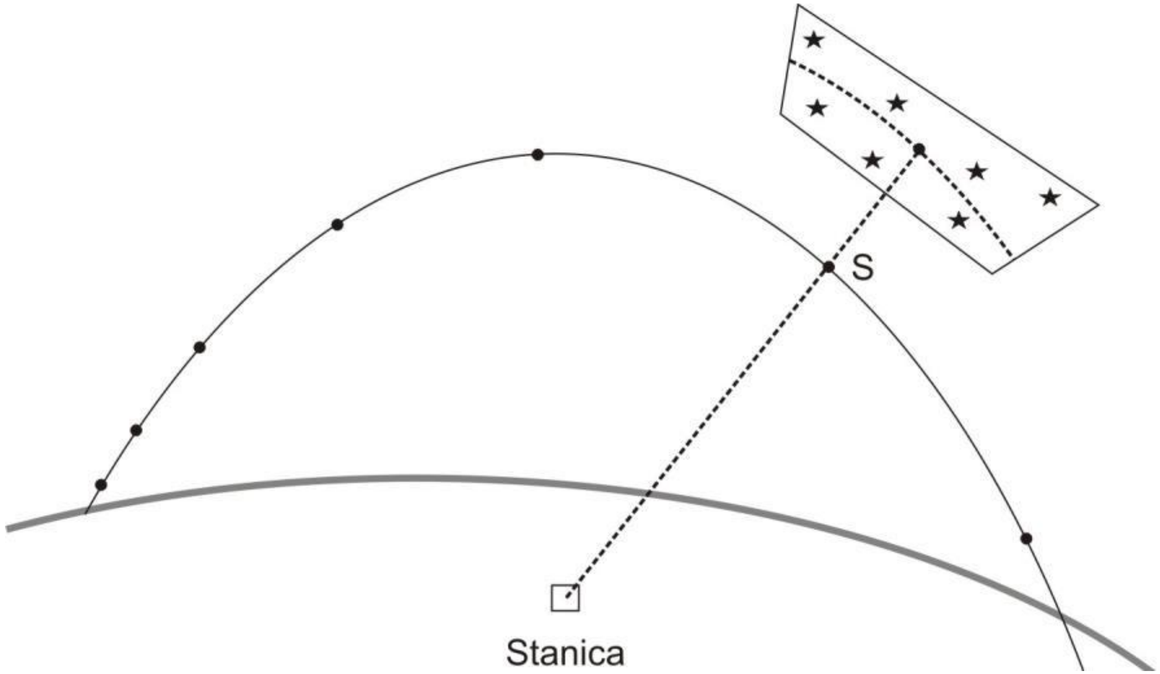
Interpolacionim postupkom moguće je odrediti koordinate satelita - (α_s, δ_s).

Jedinični vektor pravca ka satelitu je definisan na sledeći način:

$$\vec{\mathbf{e}}_s = \begin{bmatrix} \cos\delta_s \cos\alpha_s \\ \cos\delta_s \sin\alpha_s \\ \sin\delta_s \end{bmatrix}$$

Osnovni problem → operativna realizacija:

- povoljni vremenski uslovi,
- specijalne kamere,
- korekcija merenih koordinata na snimku,
- efekat satelitske refrakcije,
- efekat satelitske aberacije, ...



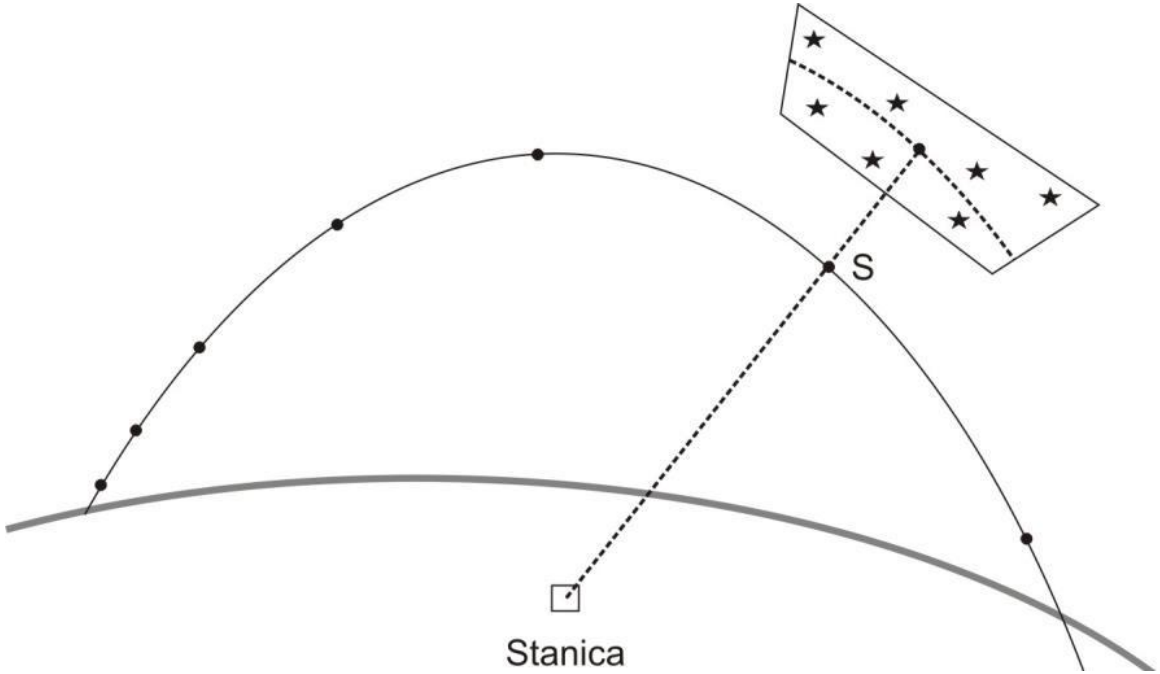
Satelitsko merenje pravaca

Tipična tačnost merenja – 1 μm (0.5″)

Tačnost definitivnih pravaca – 1″ (oko 3 m za satelite koji lete na visini od 6000 km)

Oblast primene:

- određivanje orbita satelita,
- zvezdana triangulacija.

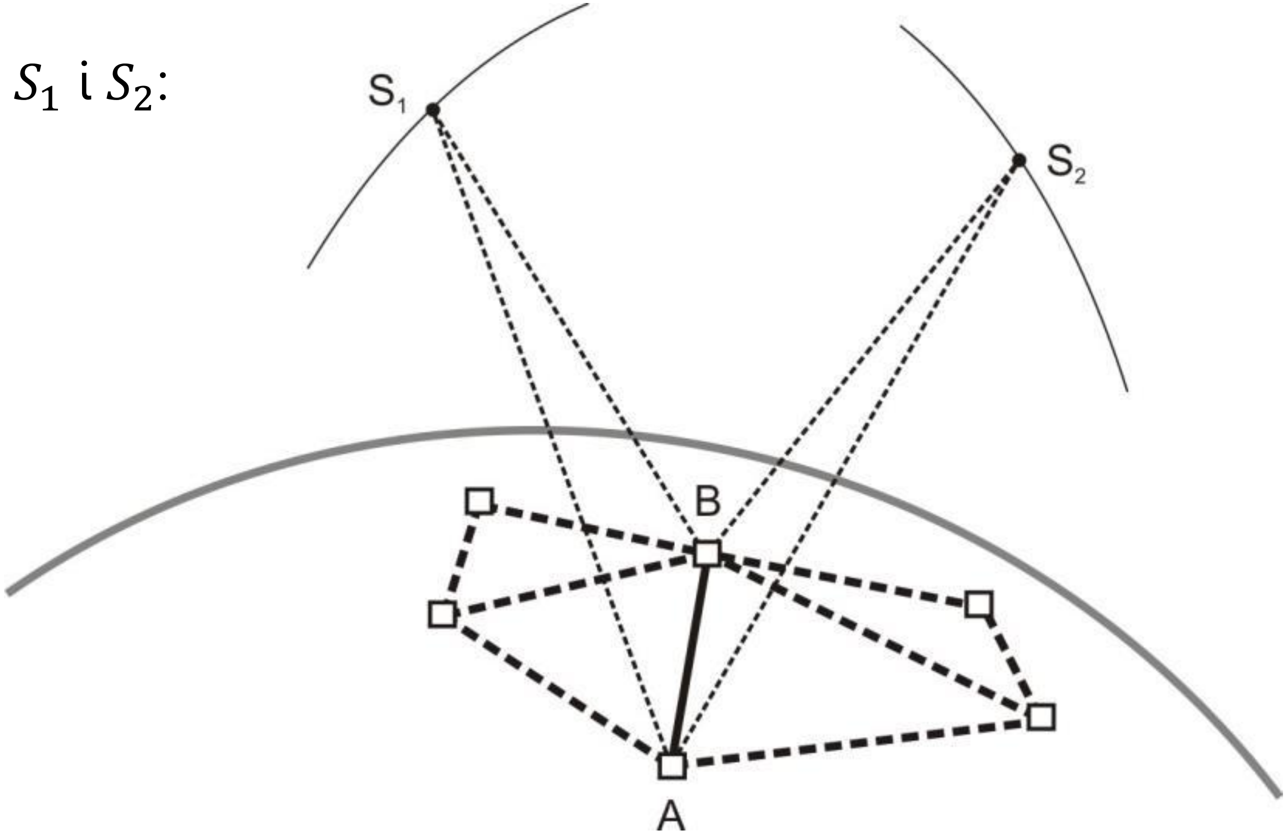


Satelitsko merenje pravaca

Zvezdana triangulacija

Osnovni princip:

- opažačke stanice: A i B,
- simultano mereni pravci ka dva satelita: S_1 i S_2:
  - pravac A- S_1 $\rightarrow$ $\vec{\mathbf{e}}_{A1}$
  - pravac B- S_1 $\rightarrow$ $\vec{\mathbf{e}}_{B1}$
  - pravac A- S_2 $\rightarrow$ $\vec{\mathbf{e}}_{A2}$
  - pravac B- S_2 $\rightarrow$ $\vec{\mathbf{e}}_{B2}$



Zvezdana triangulacija

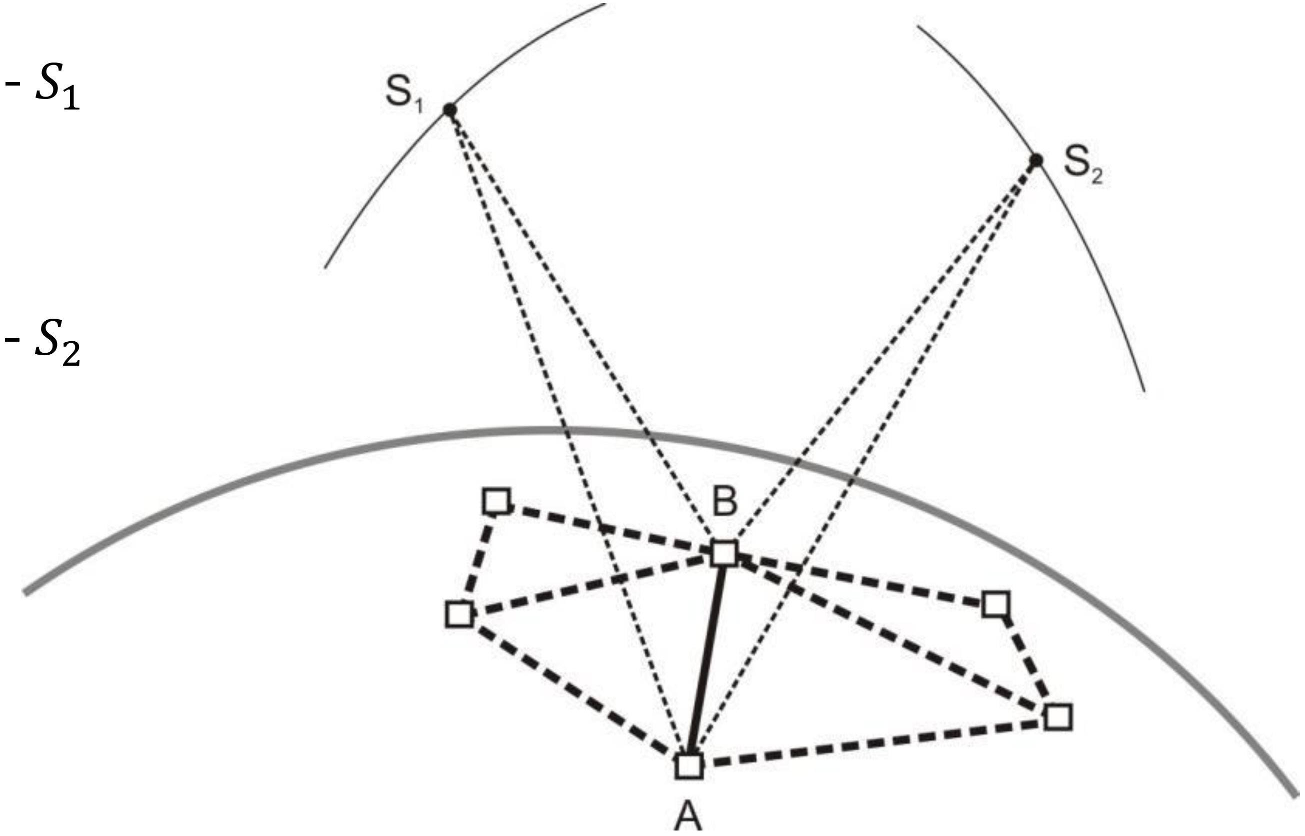
Osnovni princip:

- definicija ravni preko vektora normale:
  - ravan definisana pravcima A- S_1 i B- S_1

    $\vec{\mathbf{n}}_1 = \vec{\mathbf{e}}_{A1} \times \vec{\mathbf{e}}_{B1}$

  - ravan definisana pravcima A- S_2 i B- S_2

    $\vec{\mathbf{n}}_2 = \vec{\mathbf{e}}_{A2} \times \vec{\mathbf{e}}_{B2}$



Satelitsko merenje pravaca

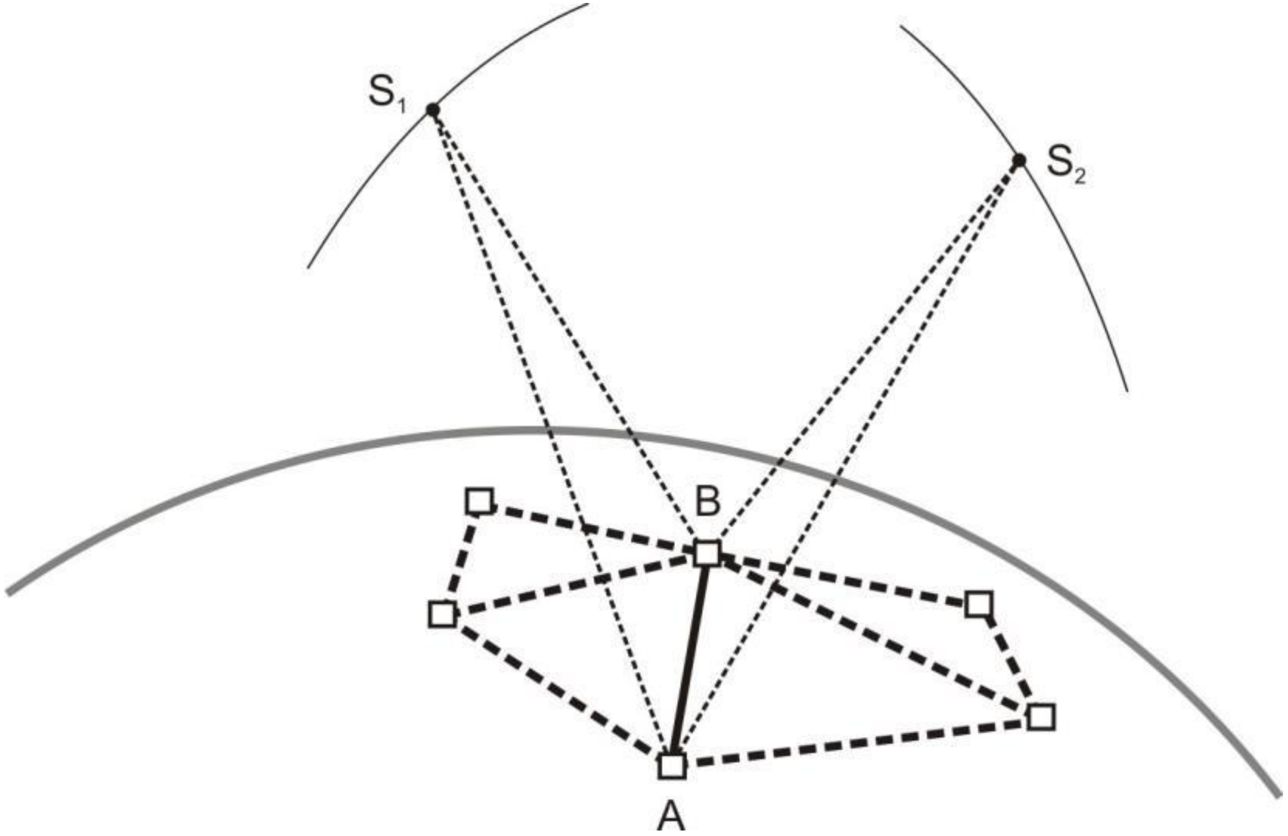
Zvezdana triangulacija

Osnovni princip:

- na osnovu vektora $\vec{\mathbf{n}}_1$ i $\vec{\mathbf{n}}_2$ može se definisati vektor:

$$\vec{\mathbf{e}}_{AB} = \frac{\vec{\mathbf{n}}_1 \times \vec{\mathbf{n}}_2}{|\vec{\mathbf{n}}_1 \times \vec{\mathbf{n}}_2|}$$

koji definiše pravac između terestričkih stanica A i B.



Satelitsko merenje pravaca

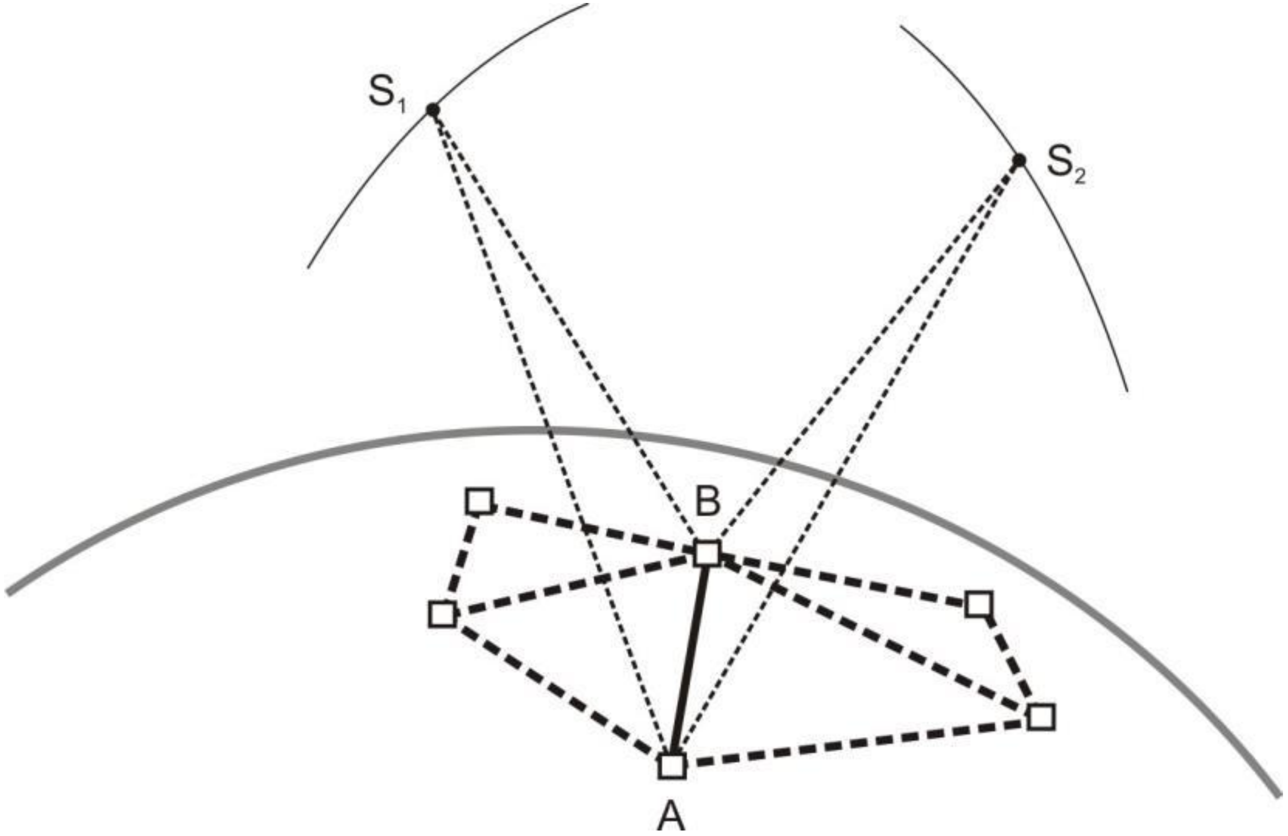
Zvezdana triangulacija

Osnovni problem:

- defekt datuma:
  - apsolutni položaj mreže,
  - razmera mreže.

Neophodni parametri:

- koordinate jedne stanice,
- jedna izmerena dužina.



Satelitsko merenje pravaca

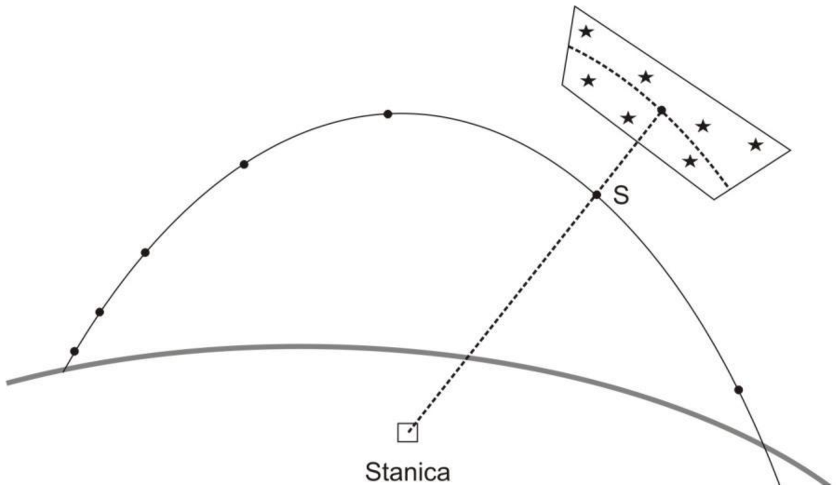
Opažanja 1966-1970:

- kamera za opažanje – BC4,
- 45 globalno raspoređenih terestričkih stanica,
- prosečno međustanično rastojanje – između 3000 km i 4000 km,
- sateliti: ECHO-1, ECHO-2, GEOS-2 i PAGEOS,
- razmera: sedam međustaničnih dužina mereno geodimetrom,
- položaj: koordinate jedne stanice,
- tačnost položaja stanica oko 4.5 m,
- ocenjena vrednost ekvatorskog poluprečnika Zemlje: 6 378 130 m,
- realizovan globalni Brunsov poliedar.

Satelitsko merenje pravaca

Fotografsko merenje pravaca

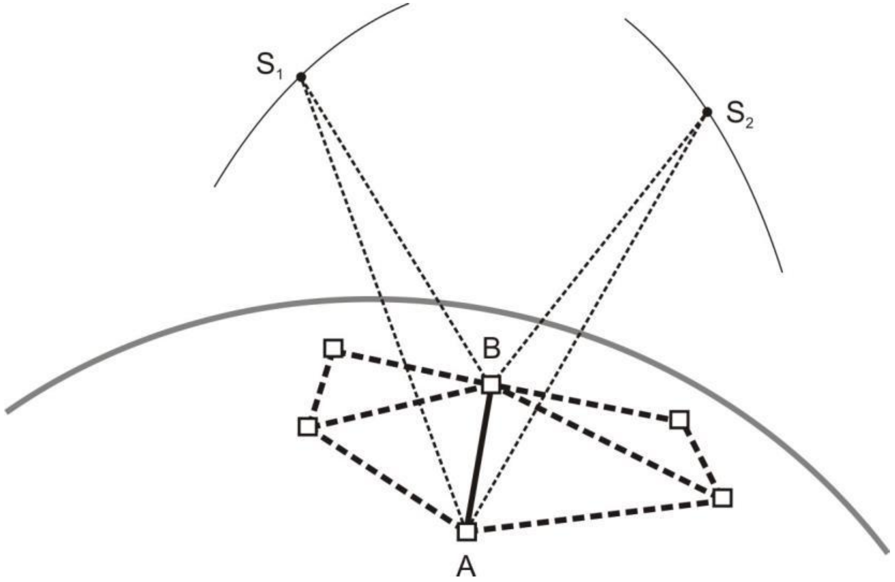
- dominantna opažačka tehnika (1964 – 1975),
- dugotrajni proces merenja,
- komplikovana obrada podataka,
- relativno niska tačnost.



Od 1975. godine – lasersko merenje rastojanja do satelita.

Napredak → pojava CCD senzora:

- zamena fotografskih ploča CCD senzorima,
- kraće vreme opažanja,
- digitalna obrada,
- automatizacija procesa,
- bolja tačnost:
  - dimenzije piksela manje od 10 μm - uglovna rezolucija oko 0.1".



Satelitsko merenje dužina

Merenje dužina u satelitskoj geodeziji zasniva se na **merenju vremena prostiranja** elektromagnetnih signala duž puta između terestričke stanice i satelita.

Podela po spektru EM talasa:

- optički sistemi,
- radarski sistemi.

Optički sistemi:

- zavisnost od vremenski prilika,
- korišćenje laserskog zračenja.

Radarski sistemi:

- ne zavise od vremenski uslova,
- uticaj atmosferske refrakcije,
- talasne dužine iz domene centimetra ili decimetra.

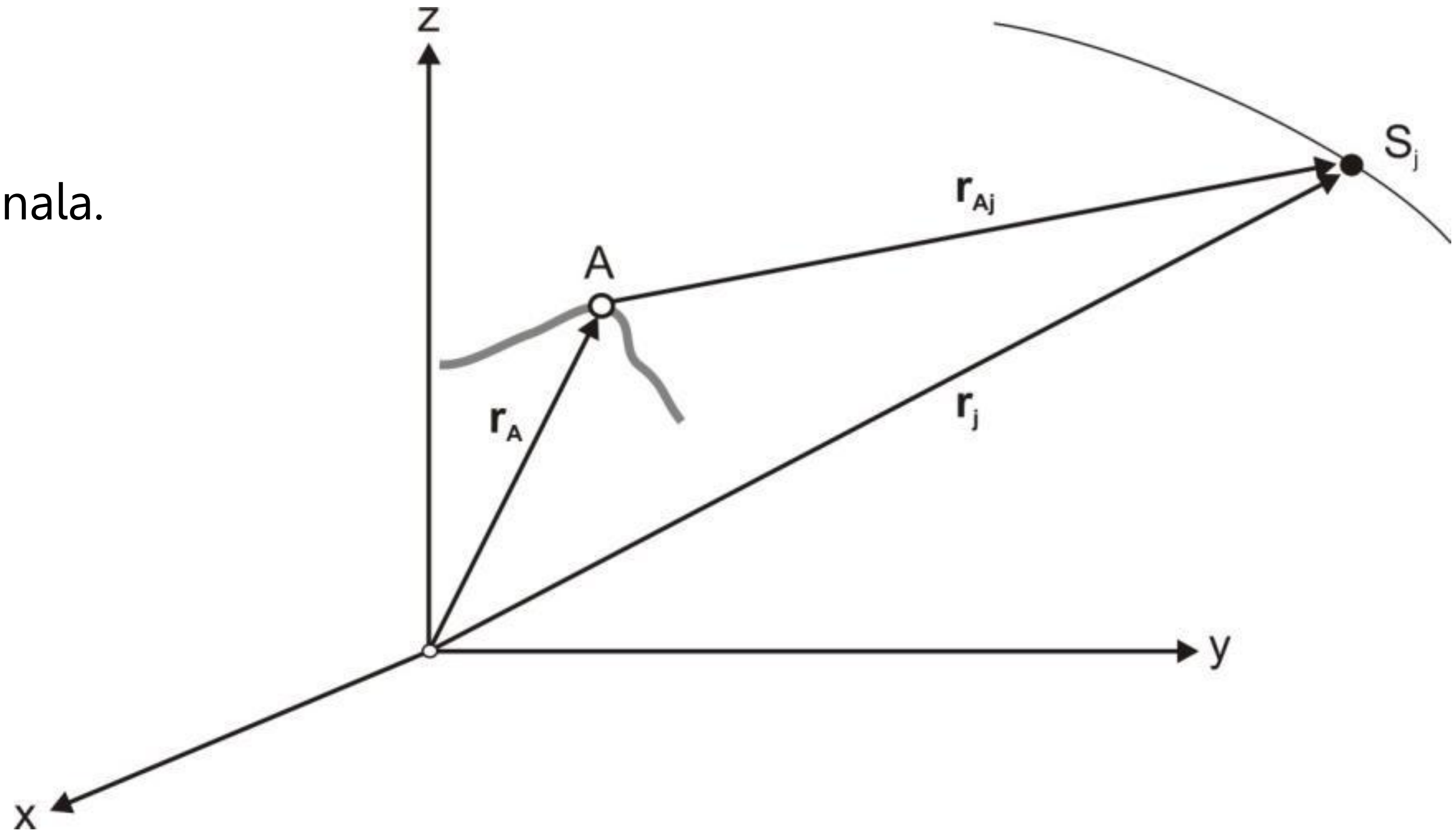
Satelitsko merenje dužina

Osnovni princip:

- merenje vremena puta - Δt:

$$\left|\vec{\mathbf{r}}_j - \vec{\mathbf{r}}_A\right| = \left|\vec{\mathbf{r}}_{Aj}\right| = c \cdot \Delta t_{Aj}$$

gde je c brzina prostiranja signala.



Satelitsko merenje dužina

Osnovnim principom se opisuje jednosmerni režim merenja rastojanja:

- merenje vremena puta (Δt) sa dva sinhronizovana časovnika (jedan na stanici drugi u satelitu),

$$\left|\vec{\mathbf{r}}_j - \vec{\mathbf{r}}_A\right| = \left|\vec{\mathbf{r}}_{Aj}\right| = r_{Aj} = c \cdot \Delta t_{Aj}$$

- primer: GNSS, odnosno GPS NAVSTAR, GLONASS, GALILEO, …

Satelitsko merenje dužina

Dvosmerni režim merenja rastojanja:

- merenje vremena puta (Δt) sa jednim časovnikom na stanici:
  - signal se emituje od predajnika do reflektora na satelitu,
  - signal se reflektuje i ponovo registruje u prijemniku,
  - signal prelazi dvostruko rastojanje:

$$\left|\vec{\mathbf{r}}_j - \vec{\mathbf{r}}_A\right| = \left|\vec{\mathbf{r}}_{Aj}\right| = r_{Aj} = \frac{1}{2} c \cdot \Delta t_{AjA}$$

- primer: lasersko određivanje rastojanja do satelita (SLR)

Satelitsko merenje dužina

Jednosmerni i dvosmerni režim merenja rastojanja opisano prethodnim jednačinama odnosi se na **impulsni** princip merenja: mernu veličinu predstavlja vreme prostiranja kratkog, jasno definisanog elektromagnetnog **impulsa**.

Pored impulsnog, postoji i **fazni** princip merenja: kao merna veličina koristi se **faza** kontinuirano emitovanog elektromagnetnog talasa.

Jednosmerni fazni režim merenja:

- faza primljenog elektromagnetnog talasa upoređuje se sa fazom referentnog talasa koji se generiše u samom prijemniku.

Dvosmerni fazni režim merenja:

- faza emitovanog talasa upoređuje sa fazom tog istog talasa primljenog nakon odbijanja.

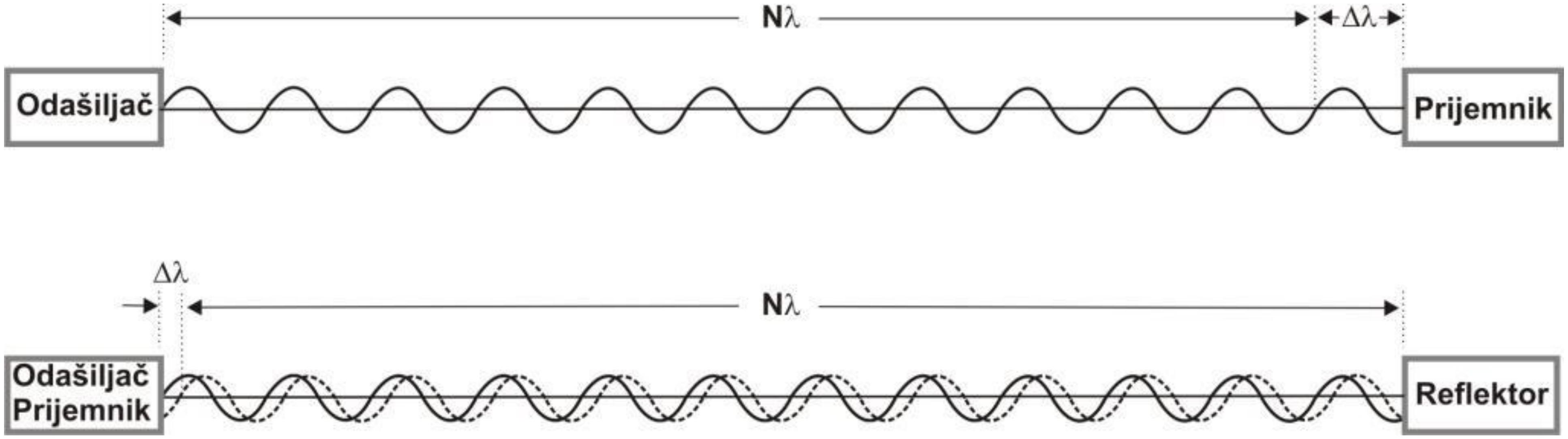
Satelitsko merenje dužina

Jednosmerni fazni režim merenja:

- faza primljenog elektromagnetnog talasa upoređuje se sa fazom referentnog talasa koji se generiše u samom prijemniku.

Dvosmerni fazni režim merenja:

- faza emitovanog talasa upoređuje sa fazom tog istog talasa primljenog nakon odbijanja.



Satelitsko merenje dužina

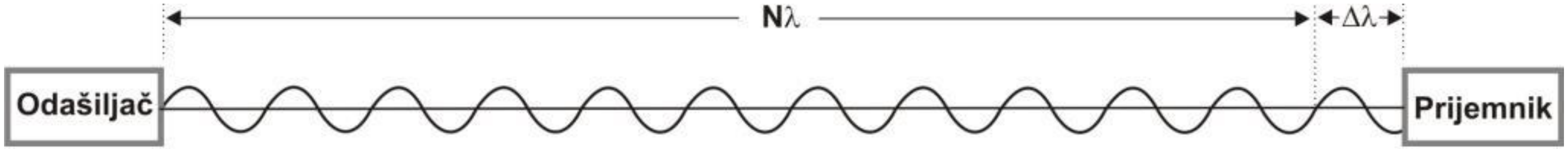
Matematički posmatrano:

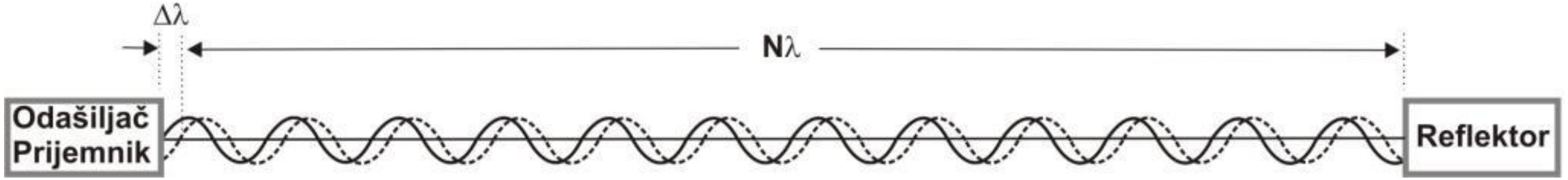
- jednosmerni fazni režim merenja:

$$r_{Aj} = N\lambda + \Delta\lambda$$

- dvosmerni fazni režim merenja:

$$r_{Aj} = (N\lambda + \Delta\lambda)/2$$





Satelitsko merenje dužina

Matematički posmatrano:

- jednosmerni fazni režim merenja:

$$r_{Aj} = N\lambda + \Delta\lambda$$

- dvosmerni fazni režim merenja:

$$r_{Aj} = (N\lambda + \Delta\lambda)/2$$

U oba izraza figuriše celobrojna vrednost talasnih dužina N koju je neophodno odrediti. U tu svrhu upotrebljavaju se različite metode:

- merenje na više frekvencija,
- određivanje približne dužine sa tačnošću boljom od $\lambda/2$,
- korišćenje vremenski promenljivog geometrijskog rasporeda satelita.

Satelitsko merenje dužina

Sinhronizacija časovnika:

$$T = t + \Delta t$$

- T – pokazivanje časovnika,
- t – istiniti trenutak vremena,
- Δt – greška časovnika.

➢ osnovni princip merenja rastojanja:

$$r = c(T_B - T_A)$$

➢ slučaj bez greške pokazivanja časovnika ($\Delta t = 0$):

$$r = c(t_B - t_A)$$

Satelitsko merenje dužina

Sinhronizacija časovnika:

- jednosmerni režim rada:

$$R = c(T_B - T_A) = c(t_B + \Delta t_B - t_A - \Delta t_A)$$

$$R = c\big((t_B - t_A) + \Delta t_B - \Delta t_A\big)$$

$$R = c(t_B - t_A) + \mathrm{c}\Delta t_B - \mathrm{c}\Delta t_A$$

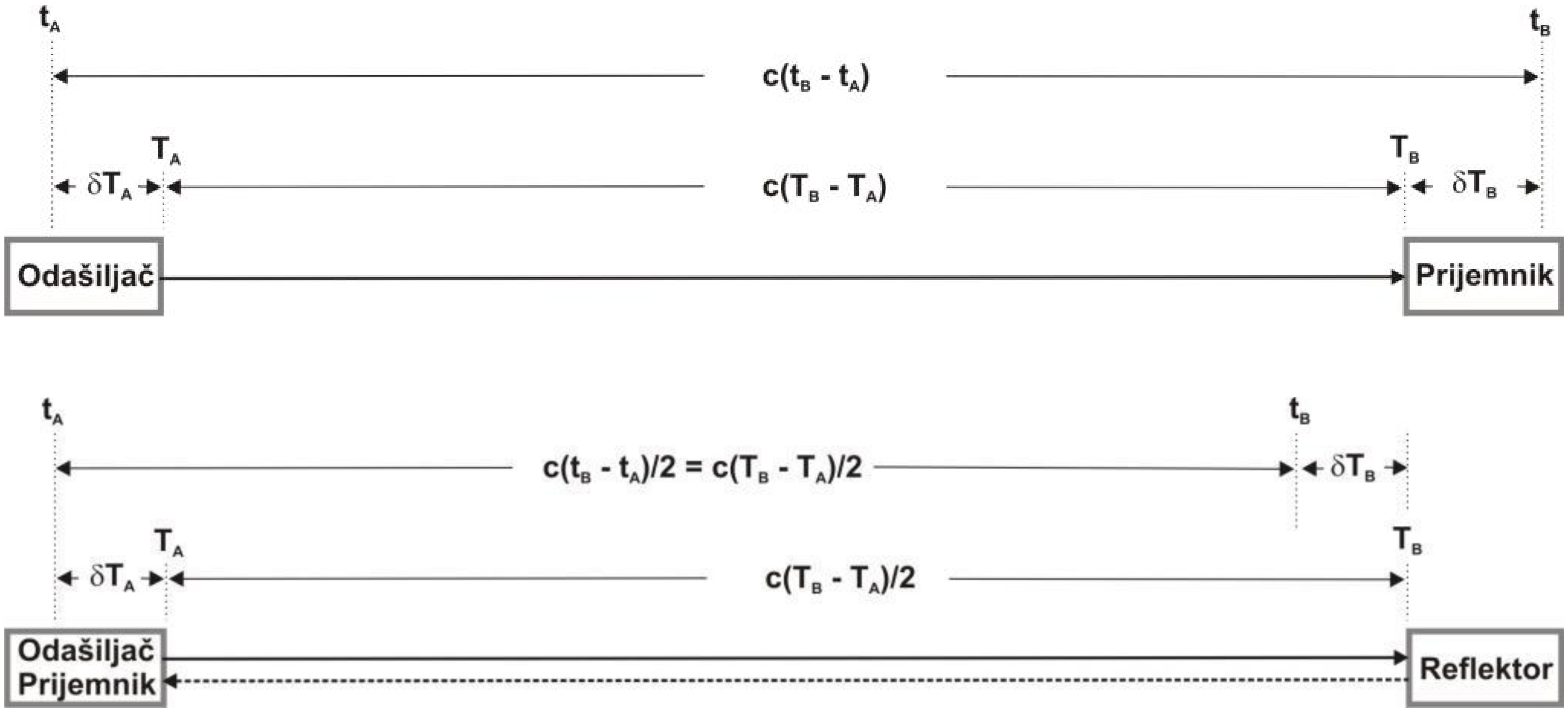
$$R = r + \mathrm{c}\Delta t_B - \mathrm{c}\Delta t_A$$

- dvosmerni fazni režim merenja ($\Delta t_B = \Delta t_A$):

$$R = c(t_B - t_A) = \mathrm{r}$$

Satelitsko merenje dužina

Sinhronizacija časovnika:



Satelitsko merenje dužina

Uticaj atmosfere:

- Impulsni metod:
  - grupna brzina prostiranja - v_{gr}

- Fazni metod:
  - fazna brzina prostiranja - v_{ph}

Primena satelitskog merenja dužina: **TRILATERACIJA** (prostorni lučni presek)

$$r_R^S = \sqrt{(X_R - X^S)^2 + (Y_R - Y^S)^2 + (Z_R - Z^S)^2}$$

Satelitsko merenje dužina

Trilateracija:

- prostorni lučni presek

- osnovna jednačina veze:

$$r_R^S = \sqrt{(X_R - X^S)^2 + (Y_R - Y^S)^2 + (Z_R - Z^S)^2}$$

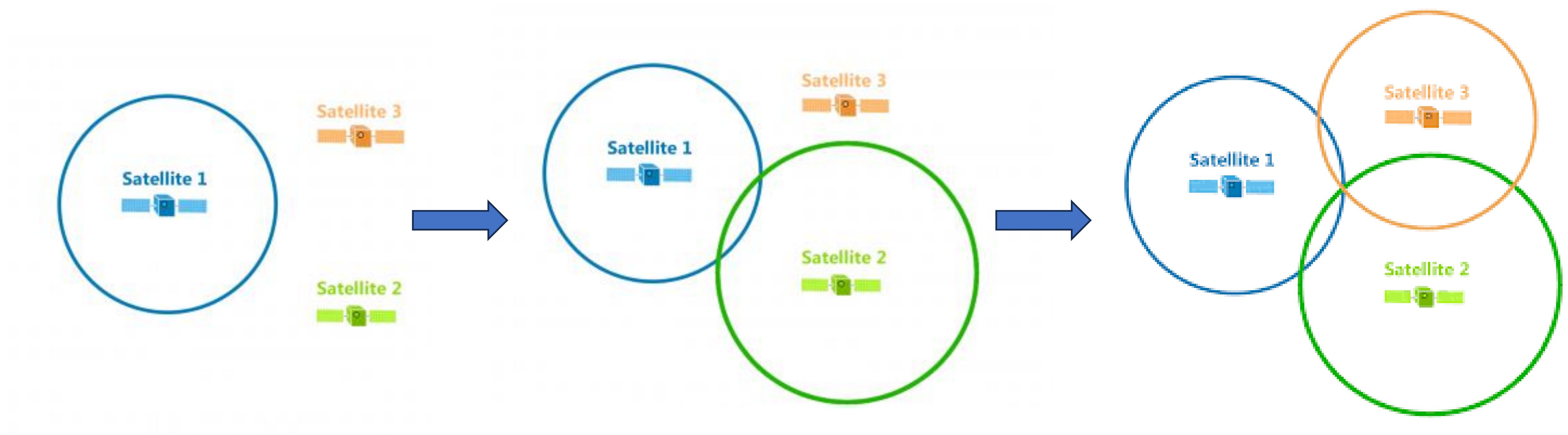
  - poznato: $(X, Y, Z)^S$
  - nepoznato: $(X, Y, Z)_R$
  - mereno: r_R^S

- broj nepoznatih veličina → 3
- broj merenih veličina → 3
- broj merenih veličina $>$ 3 → MNK

Satelitsko merenje dužina

Trilateracija:

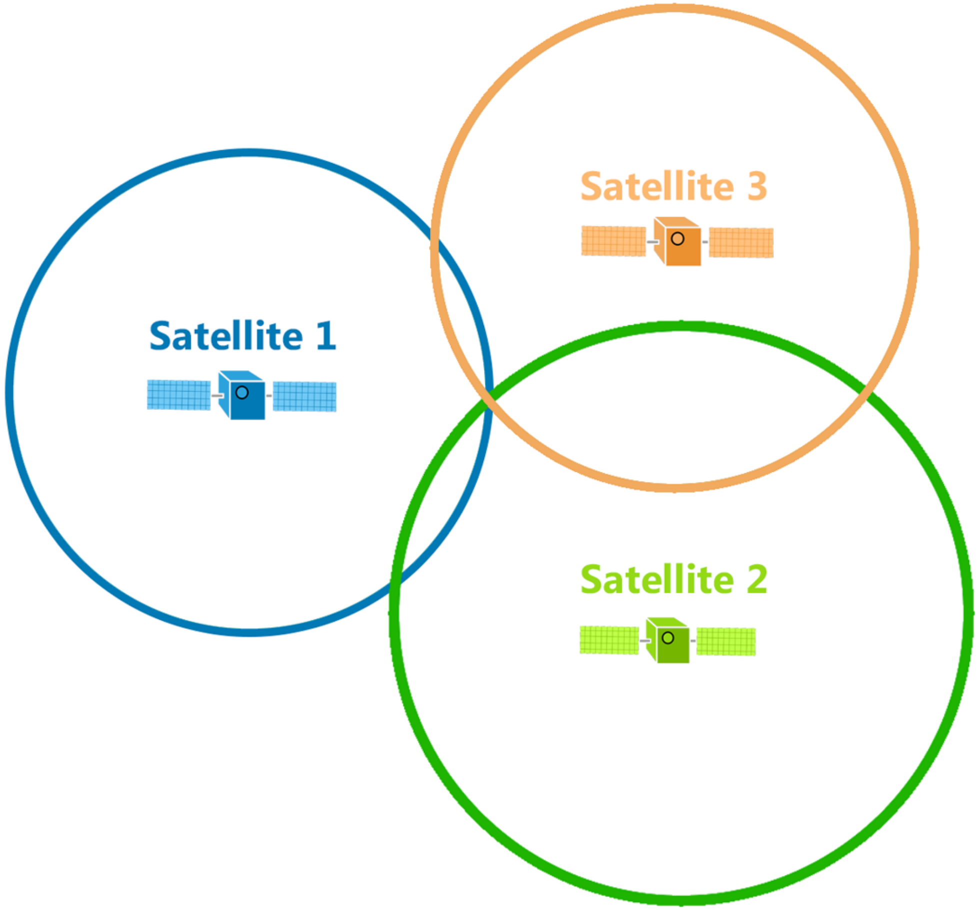
- geometrijska interpretacija:

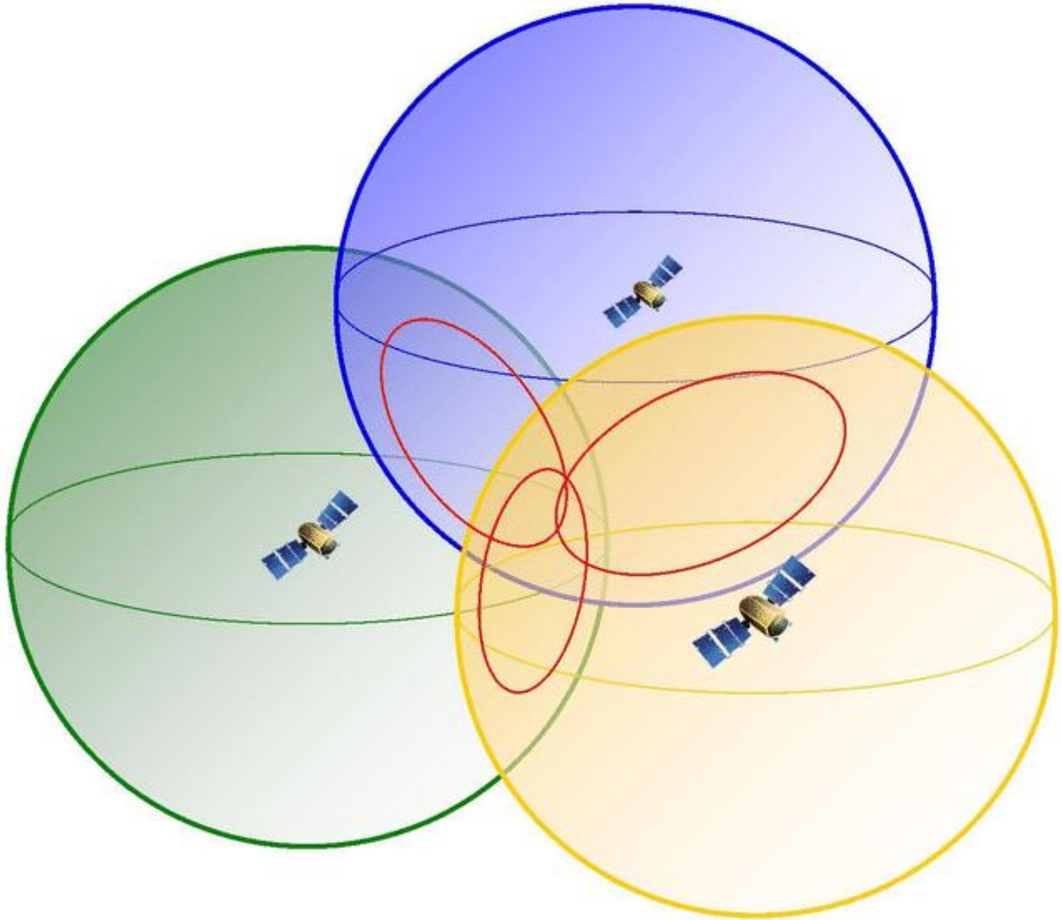


Satelitsko merenje dužina

Trilateracija:

- geometrijska interpretacija:





Satelitsko merenje dužina

Trilateracija:

- osnovni problem → sinhronizacija časovnika δt

- osnovna jednačina veze:

$$R_R^S = r_R^S + u = \sqrt{(X_R - X^S)^2 + (Y_R - Y^S)^2 + (Z_R - Z^S)^2} + c\delta t$$

  - poznato: $(X, Y, Z)^S$
  - nepoznato: $(X, Y, Z)_R, u$
  - mereno: R_R^S (pseudodužina)

- broj nepoznatih veličina → 4
- broj merenih veličina → 4
- broj merenih veličina $>$ 4 → MNK

Satelitsko merenje dužina

Trilateracija:

- prostorni lučni presek
- pozicije satelita → poznate veličine
- jednačina veze:

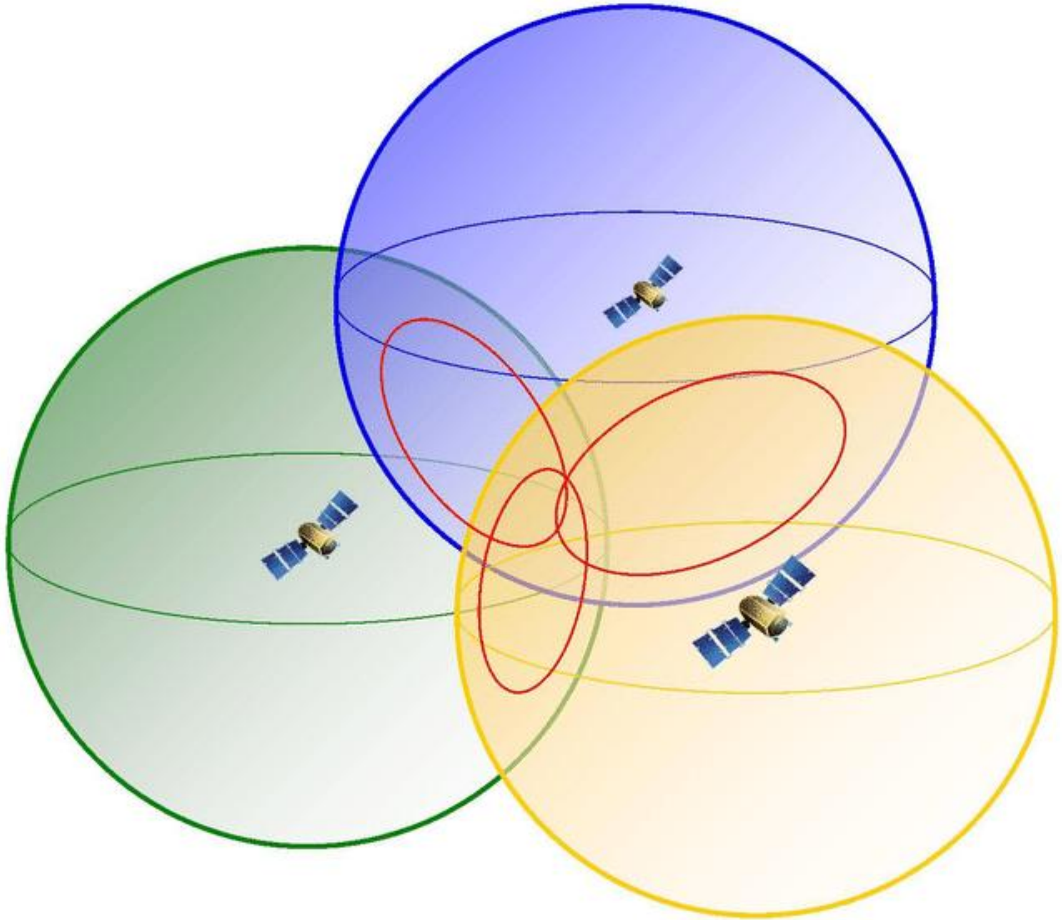
$$R_R^S = r_R^S + u = \sqrt{(X_R - X^S)^2 + (Y_R - Y^S)^2 + (Z_R - Z^S)^2} + c\delta t$$

- minimalni broj satelita → 4
- merene veličine → R_R^S (**pseudodužine**)

Satelitsko merenje dužina

Trilateracija:

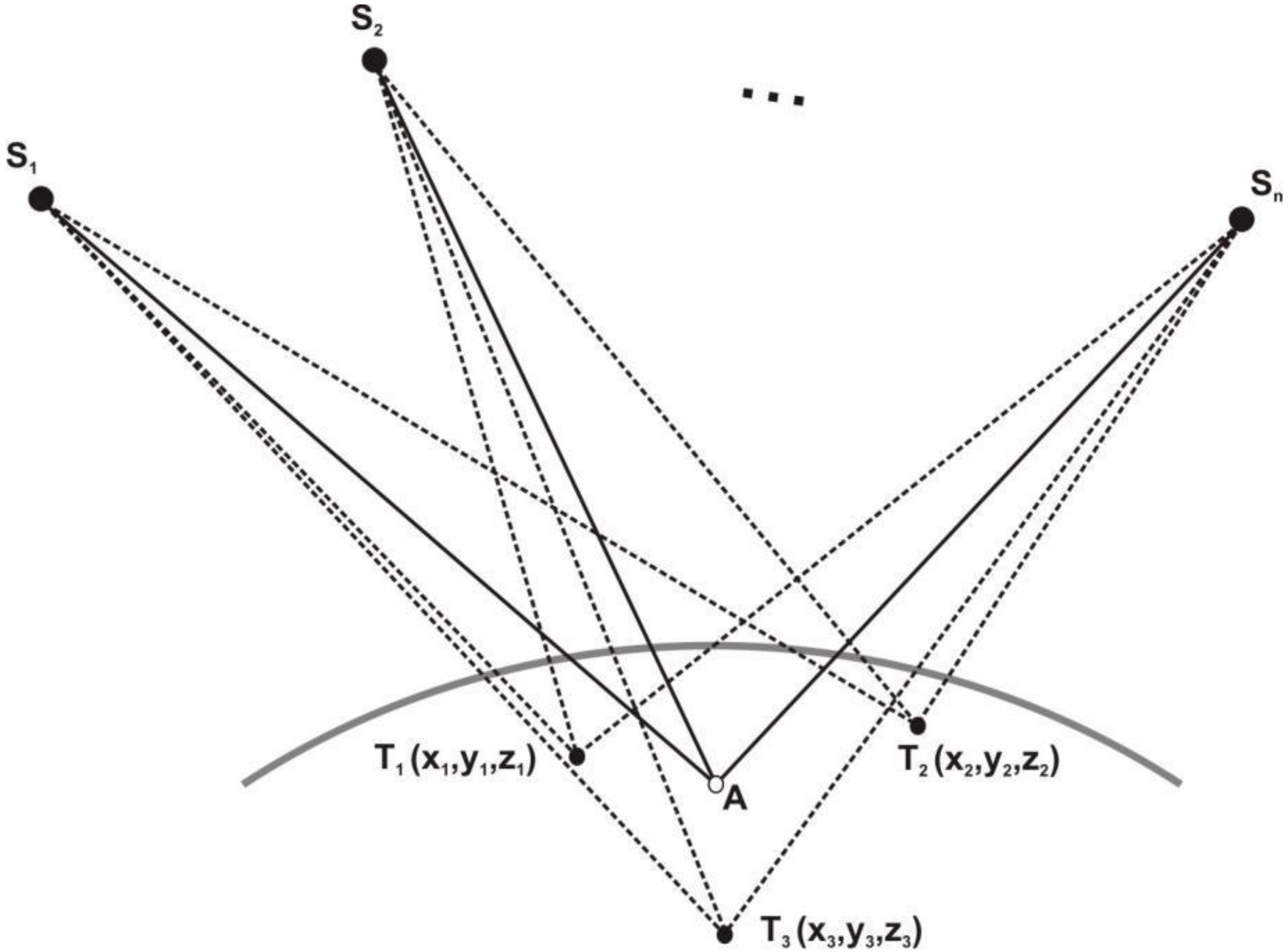
- geometrijska interpretacija:



Satelitsko merenje dužina

Trilateracija:

- pozicije satelita → nepoznate veličine
  - simultana opažanja sa tri stanice sa poznatim koordinatama
    - $T_j = T_1, T_2, T_3$
  - opažanja sa stanice A čije se koordinate određuju
  - opažanja prema 3 satelita
    - $S_i = S_1, S_2, S_3$



Satelitsko merenje dužina

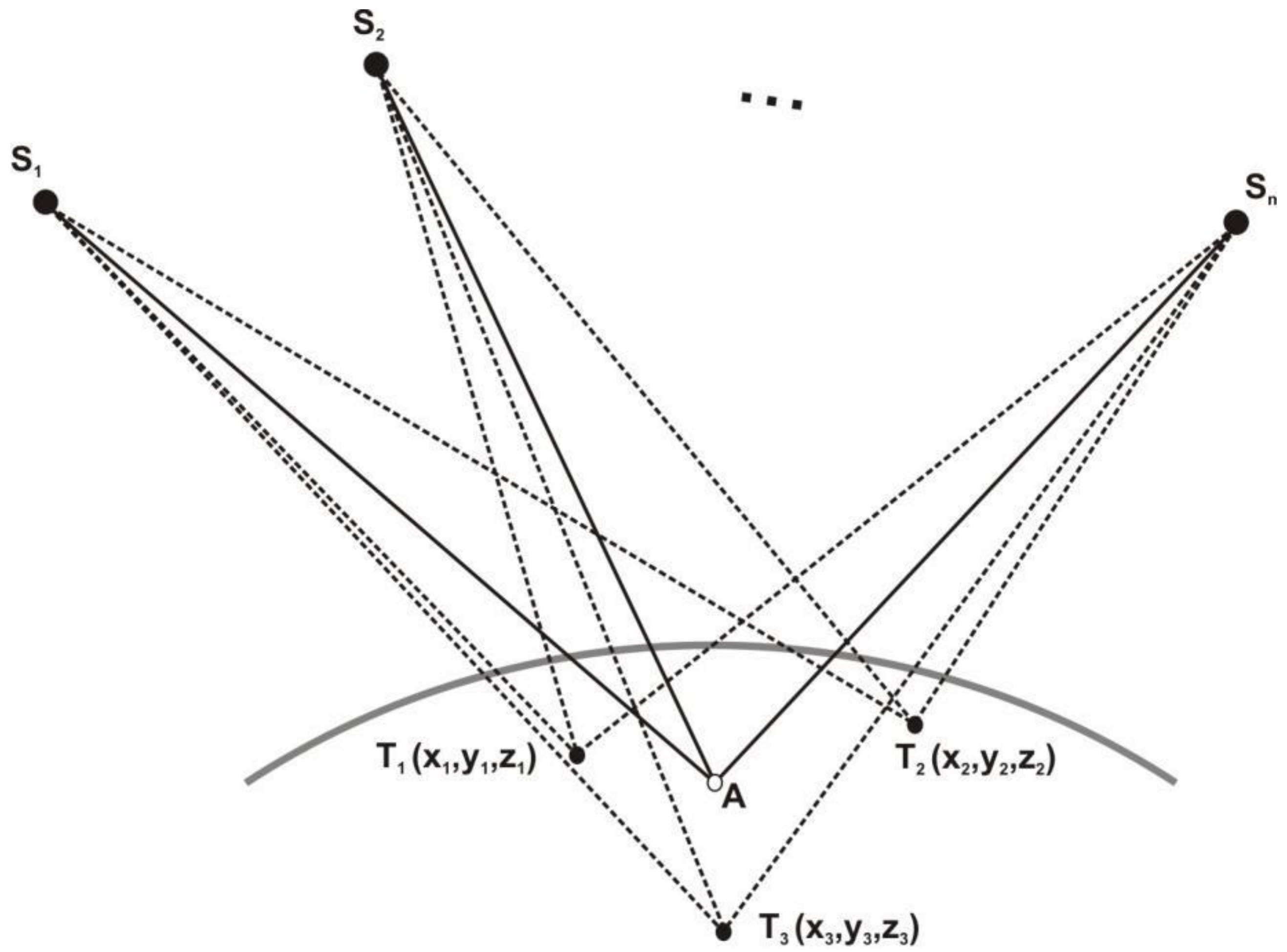
Trilateracija:

- pozicije satelita → nepoznate veličine

  1. Određivanje položaja satelita na osnovu koordinata poznatih stanica i merenih dužina do satelita

  2. Određivanje položaja stanice A na osnovu merenja dužina do satelita i sračunatih koordinata satelita

- primer sistema:
  - SECOR sistem



Satelitsko merenje promene dužina

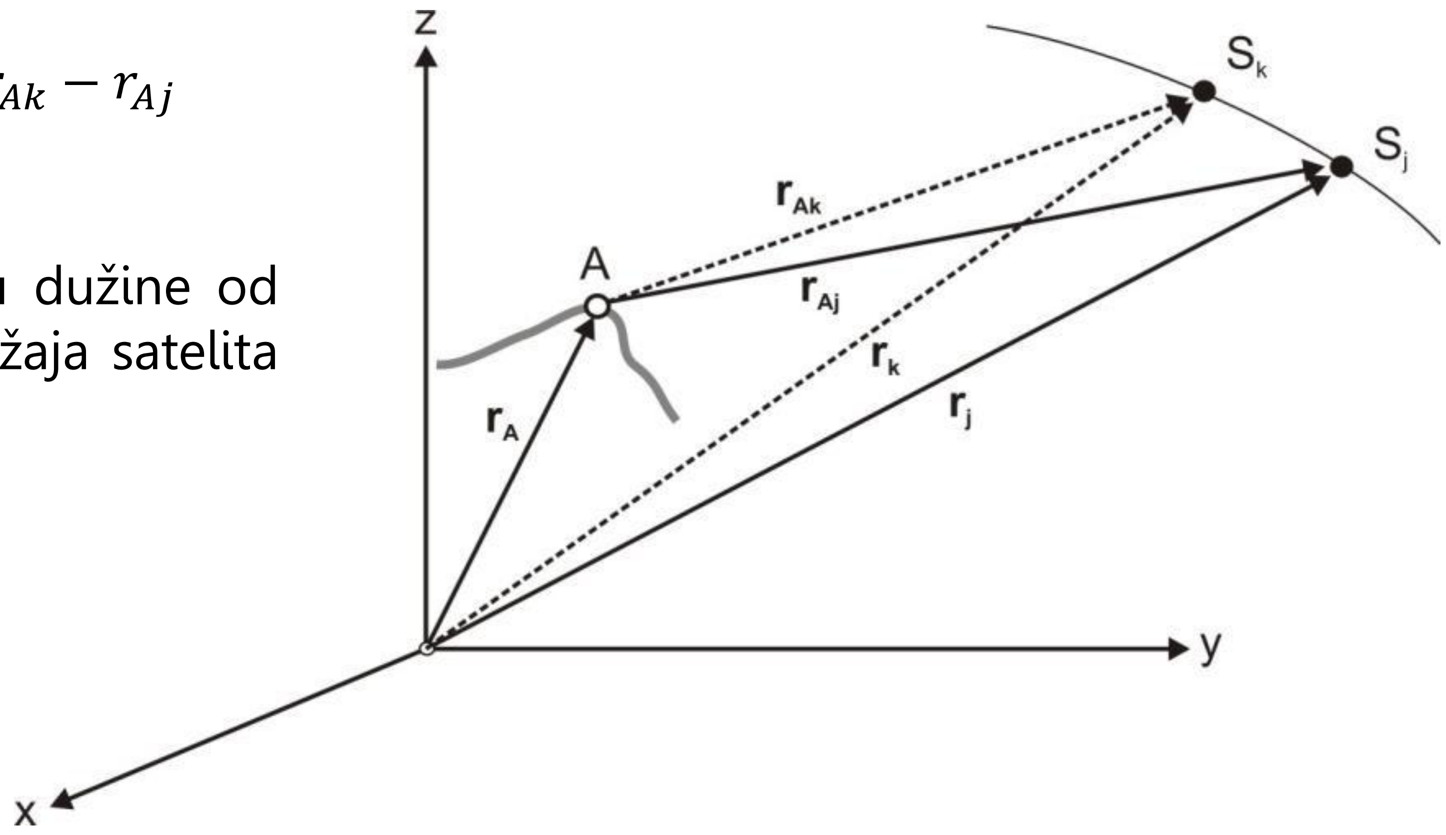
Osnovni princip:

- jednačina opažanja:

$$r_{Ajk} = |\vec{\mathbf{r}}_{Ak}| - |\vec{\mathbf{r}}_{Aj}|$$

$$r_{Ajk} = |\vec{\mathbf{r}}_k - \vec{\mathbf{r}}_A| - |\vec{\mathbf{r}}_j - \vec{\mathbf{r}}_A| = r_{Ak} - r_{Aj}$$

- promena dužine označava razliku dužine od stanice A do dva uzastopna položaja satelita S_k i S_j duž njegove orbite



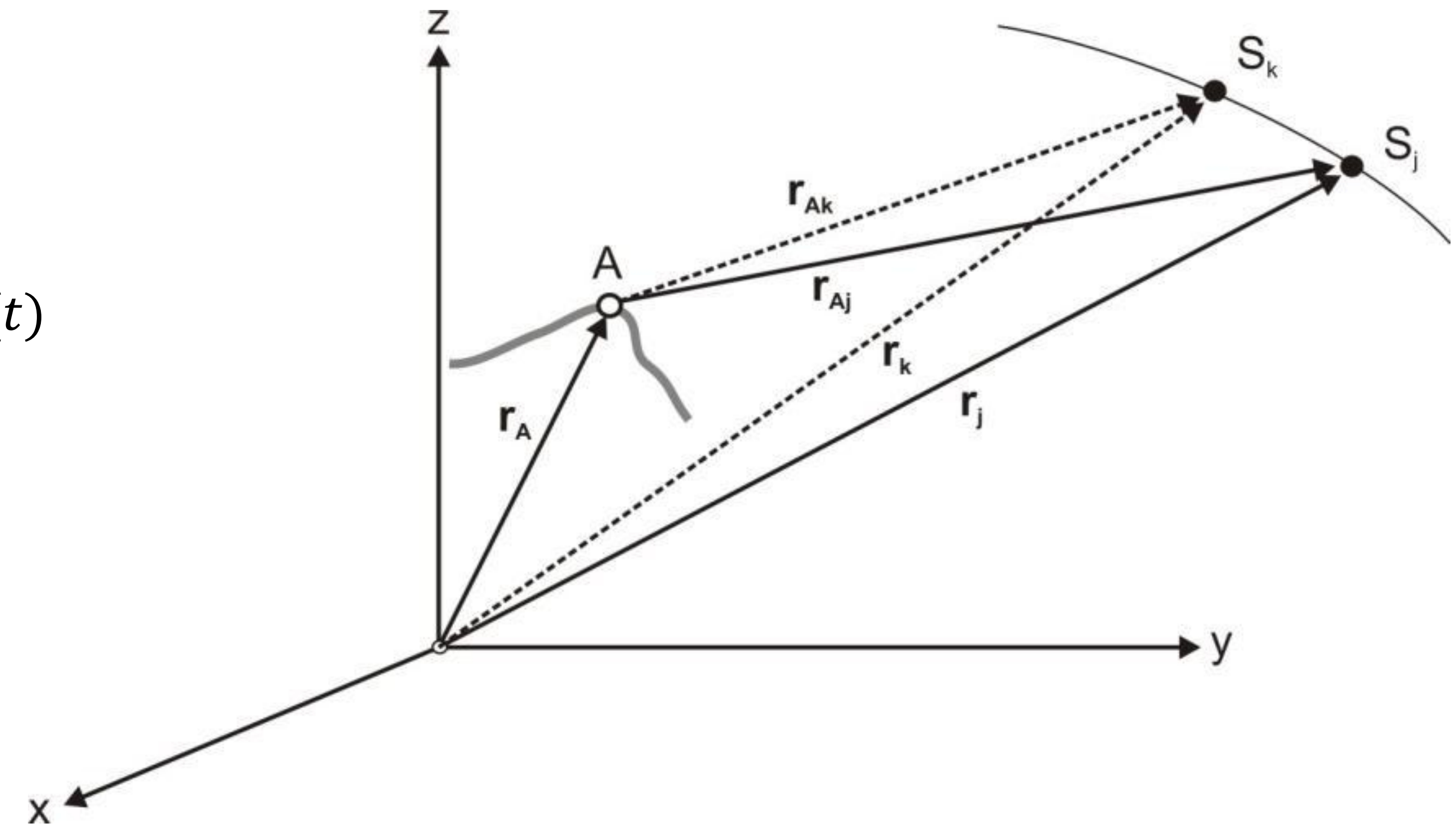
Satelitsko merenje promene dužina

Osnovni princip:

- frekvencijski pomak (Doplerov pomak):

$$f_r(t) - f_S = \frac{f_s}{c}\frac{ds}{dt}$$

- emitovana frekvencija → f_S
- registrovana frekvencija → $f_r(t)$

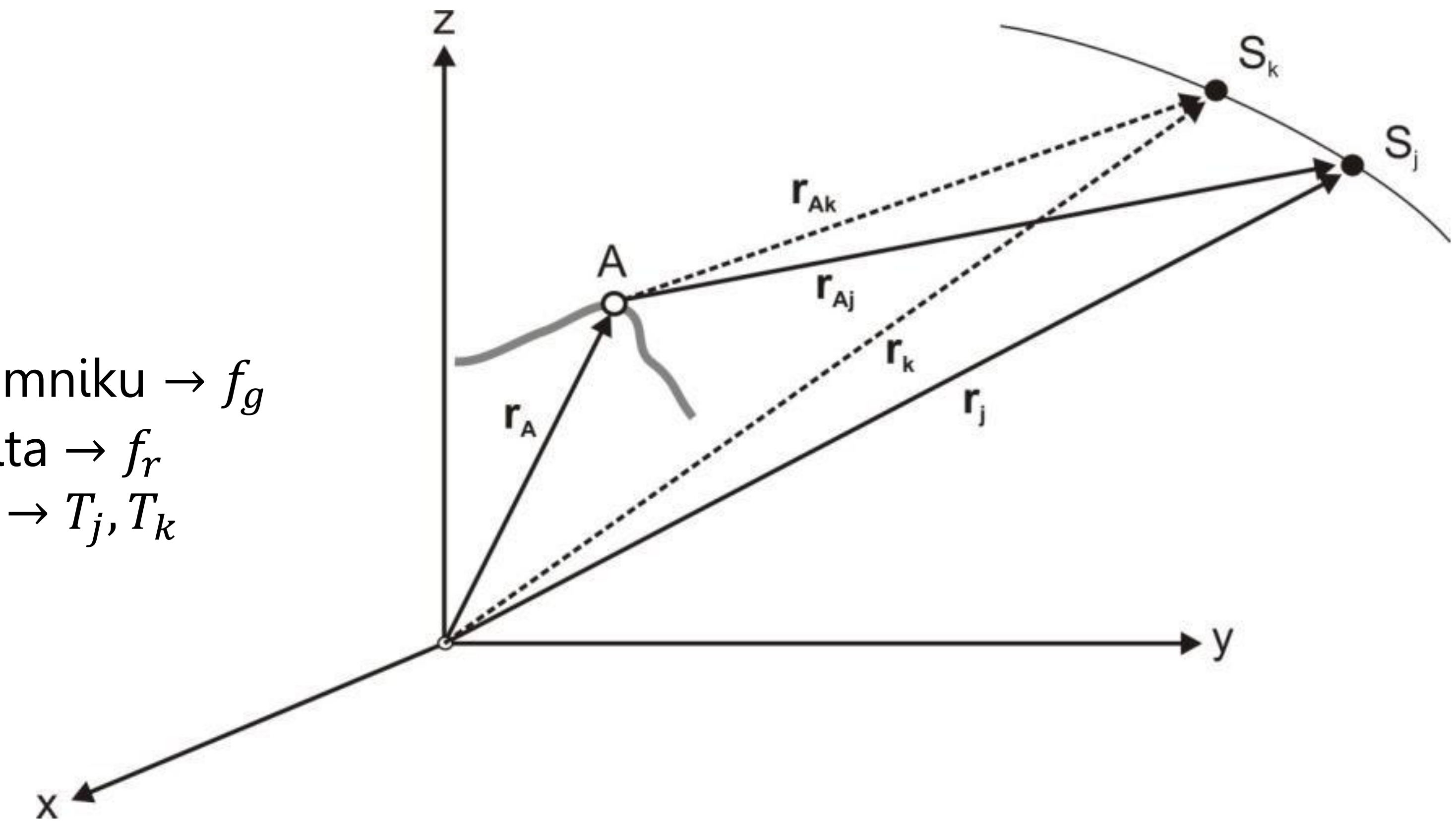


Satelitsko merenje promene dužina

Jednačina opažanja:

- direktno merena veličina → Doplerov broj N_{jk}:

$$N_{jk} = \int_{T_j}^{T_k} (f_g - f_r) dT$$



- frekvencija generisana u prijemniku → f_g
- frekvencija primljena sa satelita → f_r
- trenutak prijema signala → T → T_j, T_k

Satelitsko merenje promene dužina

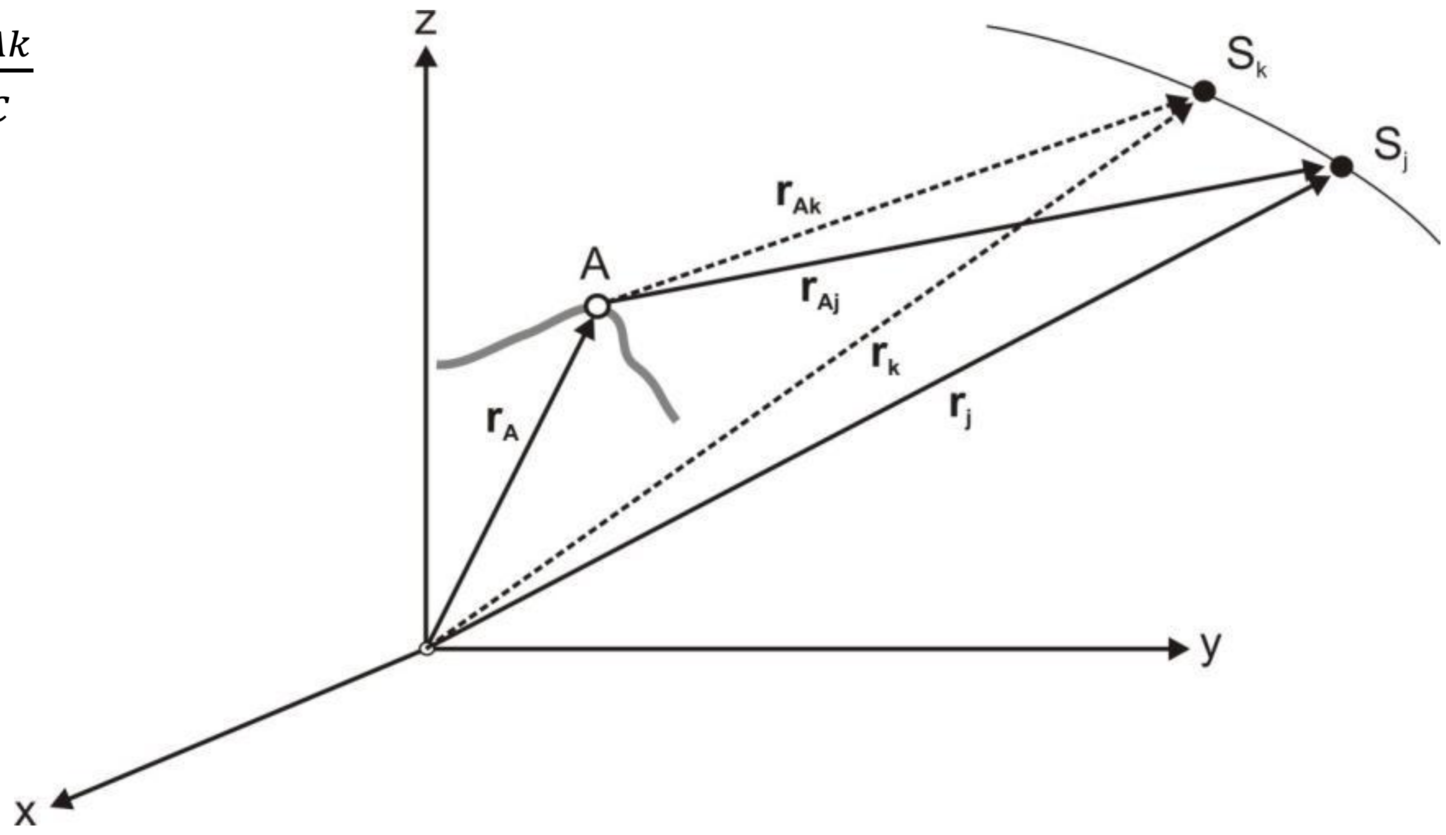
Jednačina opažanja:

- važi veza između trenutka prijema i emitovanja signala:

$$T_j = t_j + \frac{r_{Aj}}{c}, \qquad T_k = t_k + \frac{r_{Ak}}{c}$$

sledi:

$$N_{jk} = \int_{t_j + r_{Aj}/c}^{t_k + r_{Ak}/c} \left(f_g - f_r\right) dT$$



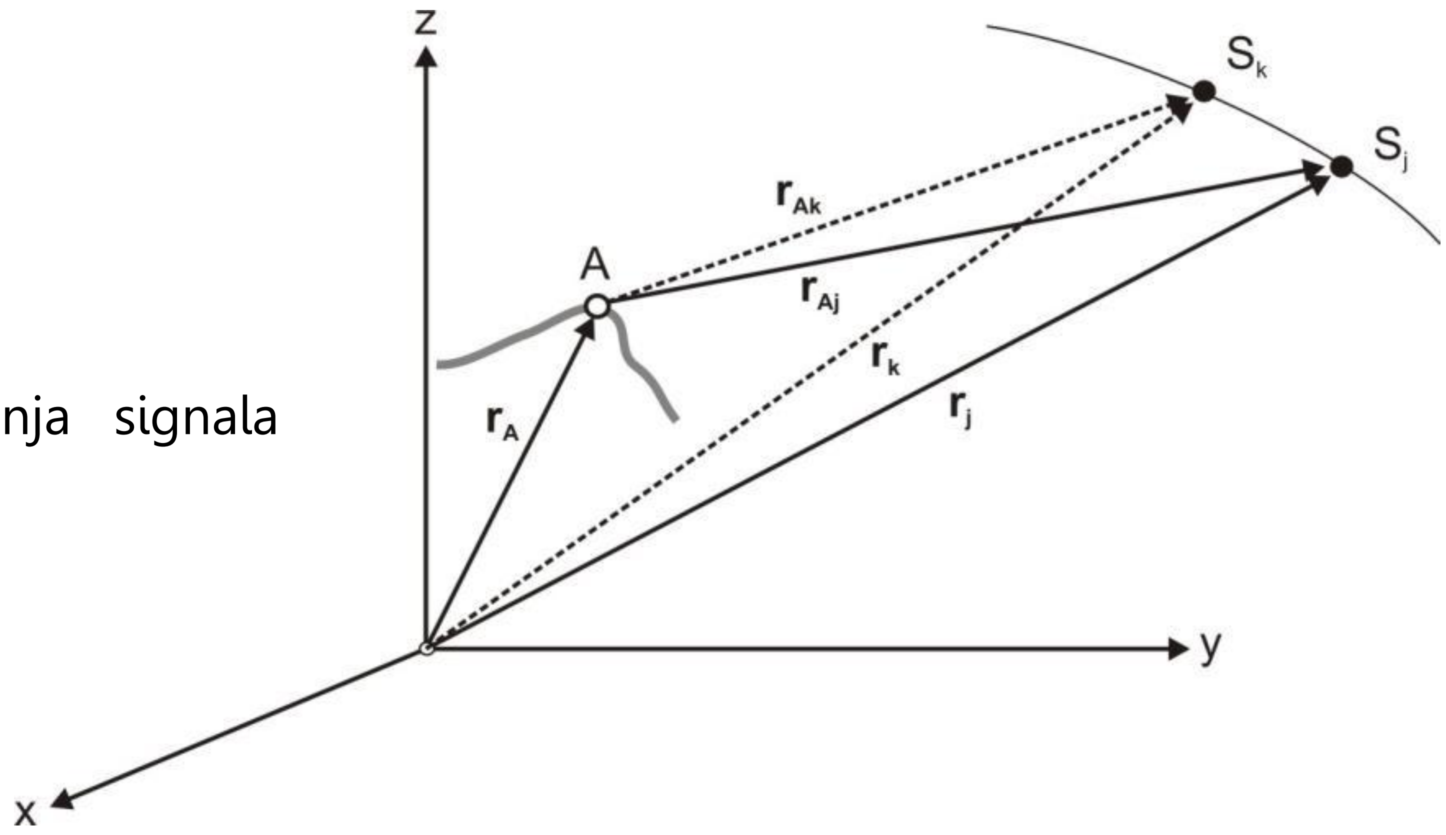
Satelitsko merenje promene dužina

Jednačina opažanja:

- broj ciklusa emitovanih sa satelita u intervalu (t_j, t_k) jednak je broju ciklusa primljenih u prijemniku u intervalu (T_j, T_k):

$$\int_{t_j}^{t_k} f_S\,dt = \int_{t_j + r_{Aj}/c}^{t_k + r_{Ak}/c} f_r\,dt$$

gde je f_S frekvencija emitovanja signala satelita.

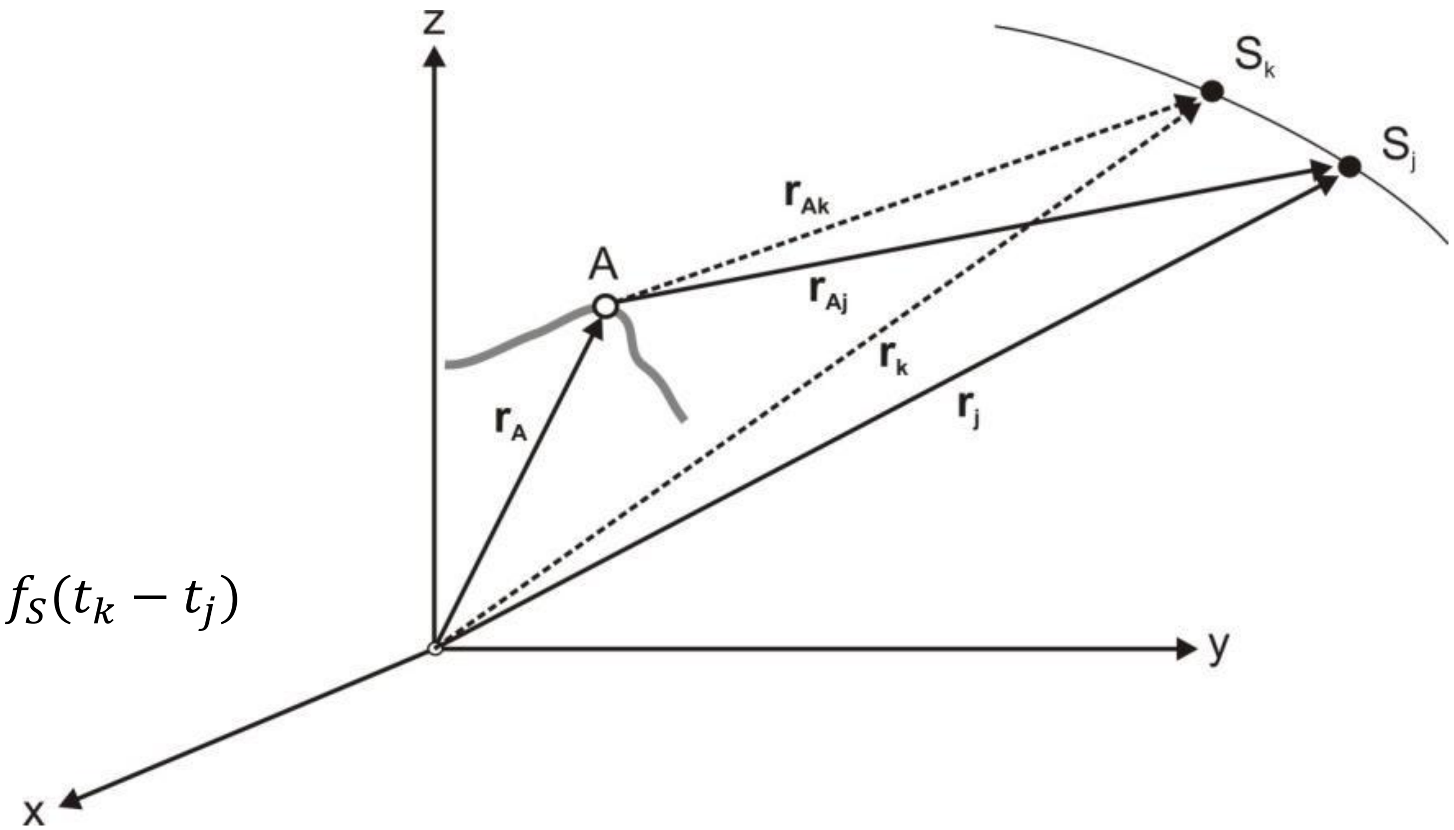


Satelitsko merenje promene dužina

Jednačina opažanja:

➢ Dalje sledi rešenje za N_{jk}:

$$N_{jk} = \int_{t_j+r_{Aj}/c}^{t_k+r_{Ak}/c} \left(f_g - f_r\right) dT$$
$$= \int_{t_j+r_{Aj}/c}^{t_k+r_{Ak}/c} f_g dT - \int_{t_j+r_{Aj}/c}^{t_k+r_{Ak}/c} f_r dT$$
$$= \int_{t_j+r_{Aj}/c}^{t_k+r_{Ak}/c} f_g dT - \int_{t_j}^{t_k} f_S dT$$
$$= f_g \left(t_k + r_{Ak}/c - \left(t_j + r_{Aj}/c\right)\right) - f_S(t_k - t_j)$$



Satelitsko merenje promene dužina

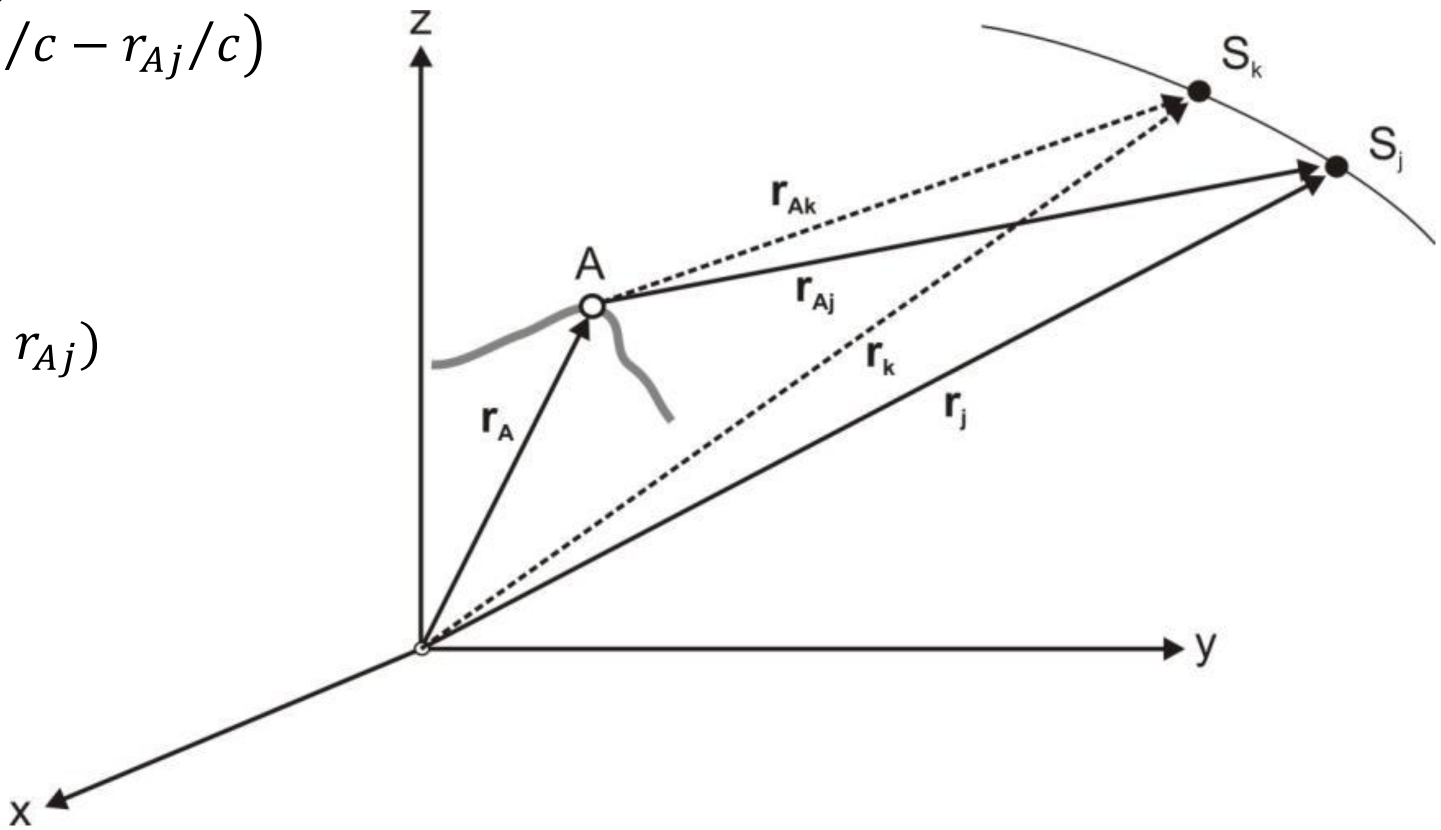
Jednačina opažanja:

- Dalje sledi rešenje za N_{jk}:

$$N_{jk} = f_g\left(\left(t_k - t_j\right) + r_{Ak}/c - r_{Aj}/c\right) - f_S(t_k - t_j)$$
$$= f_g\left(t_k - t_j\right) - f_S\left(t_k - t_j\right) + f_g\left(r_{Ak}/c - r_{Aj}/c\right)$$

odnosno:

$$N_{jk} = \left(f_g - f_S\right)\left(t_k - t_j\right) + \frac{f_g}{c}(r_{Ak} - r_{Aj})$$



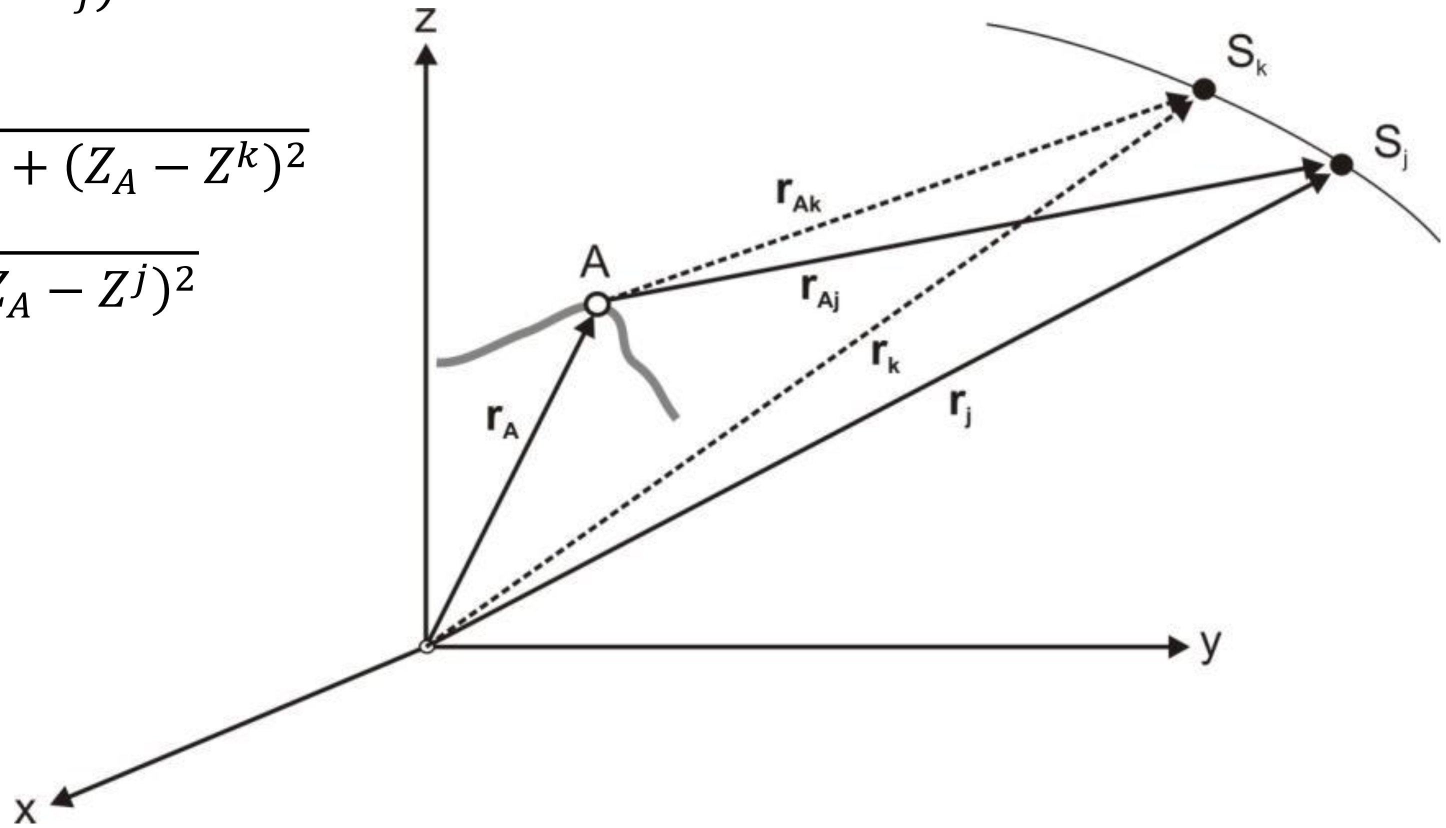
Satelitsko merenje promene dužina

Jednačina opažanja:

- Dalje sledi rešenje za N_{jk} u razvijenom obliku:

$$N_{jk} = \frac{f_g}{c} r_{Ak} - \frac{f_g}{c} r_{Aj} + (f_g - f_S)(t_k - t_j)$$

$$N_{jk} = \frac{f_g}{c}\sqrt{(X_A - X^k)^2 + (Y_A - Y^k)^2 + (Z_A - Z^k)^2}$$
$$- \frac{f_g}{c}\sqrt{(X_A - X^j)^2 + (Y_A - Y^j)^2 + (Z_A - Z^j)^2}$$
$$+ (f_g - f_S)(t_k - t_j)$$



Satelitsko merenje promene dužina

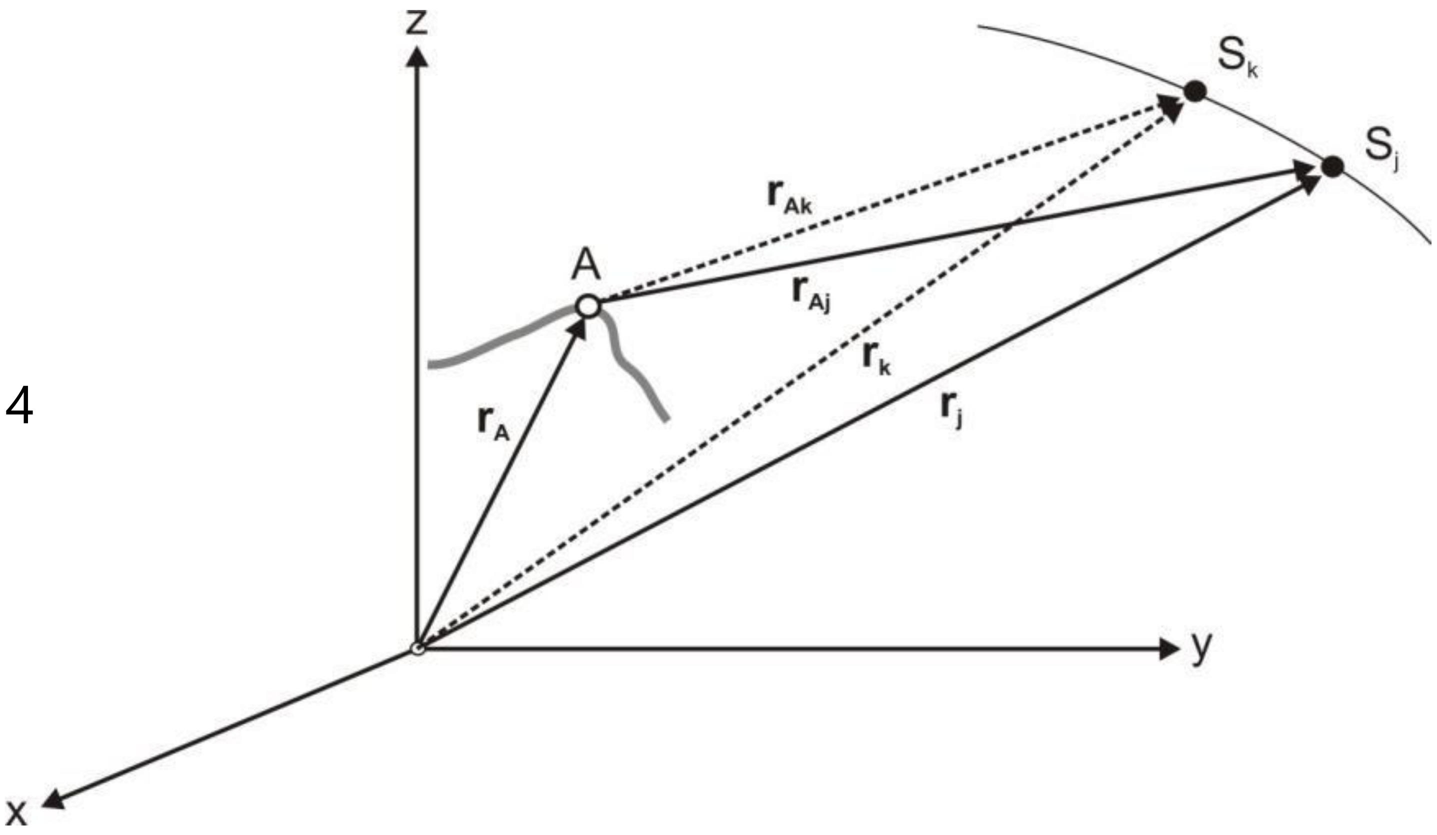
Sumarno:

- direktno merena veličina → Doplerov broj N_{jk}:

- poznate veličine: $(X, Y, Z)^S$ u trenucima vremena t_j i t_k

- nepoznate veličine:
  - koordinate tačaka → $(X, Y, Z)_A$
  - razlika frekvencija → $\left(f_g - f_S\right)$

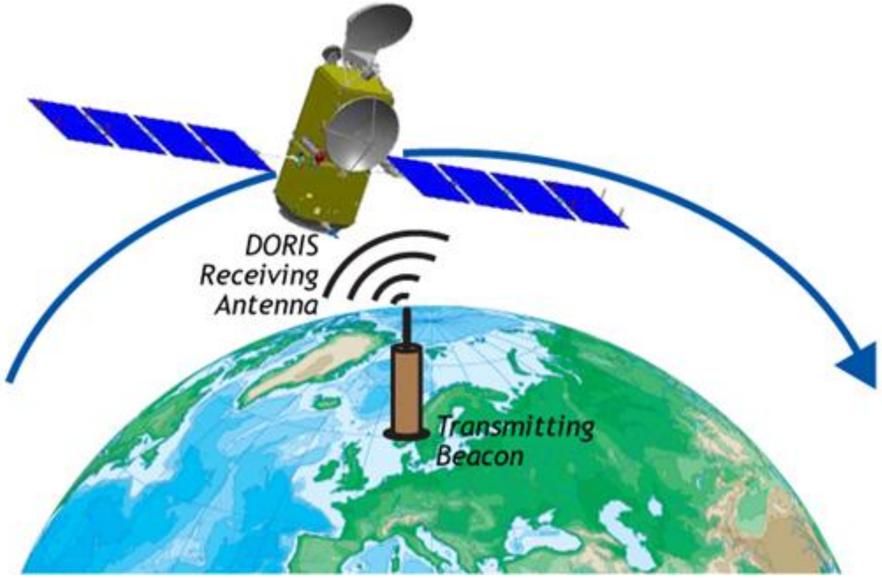
- minimalni broj merenih veličina → 4

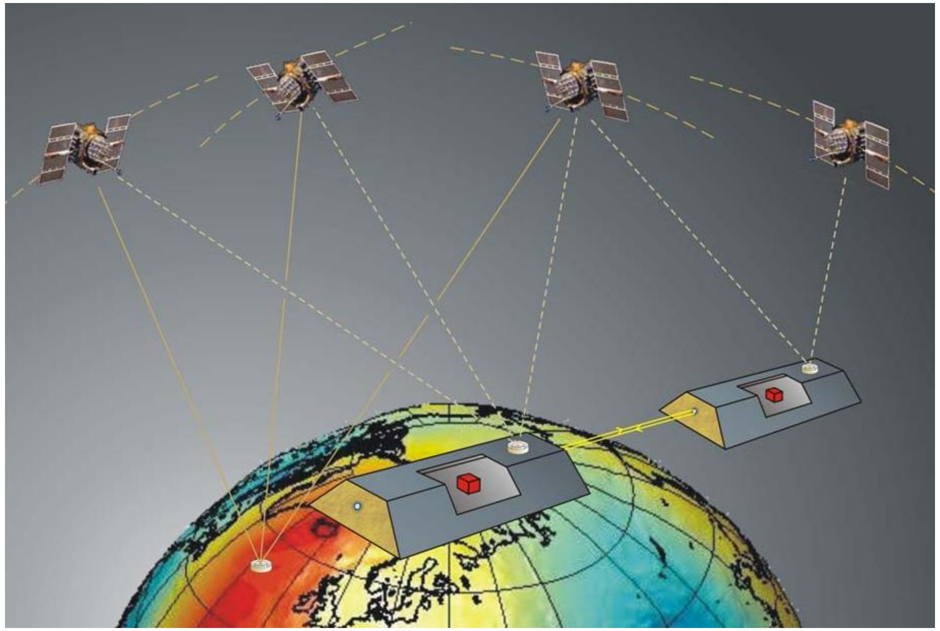


Satelitsko merenje promene dužina

Sumarno:

- geometrijski:
  - hiperbolične površi za svako mereno N,
- primena metode:
  - određivanje orbitalnih elemenata satelita,
  - satelitski sistem TRANSIT,
  - francuski sistem DORIS,
  - merenje brzine promene rastojanja do satelita – satelitsko praćenje satelita (SST), u cilju određivanja gravitacionog polja Zemlje.



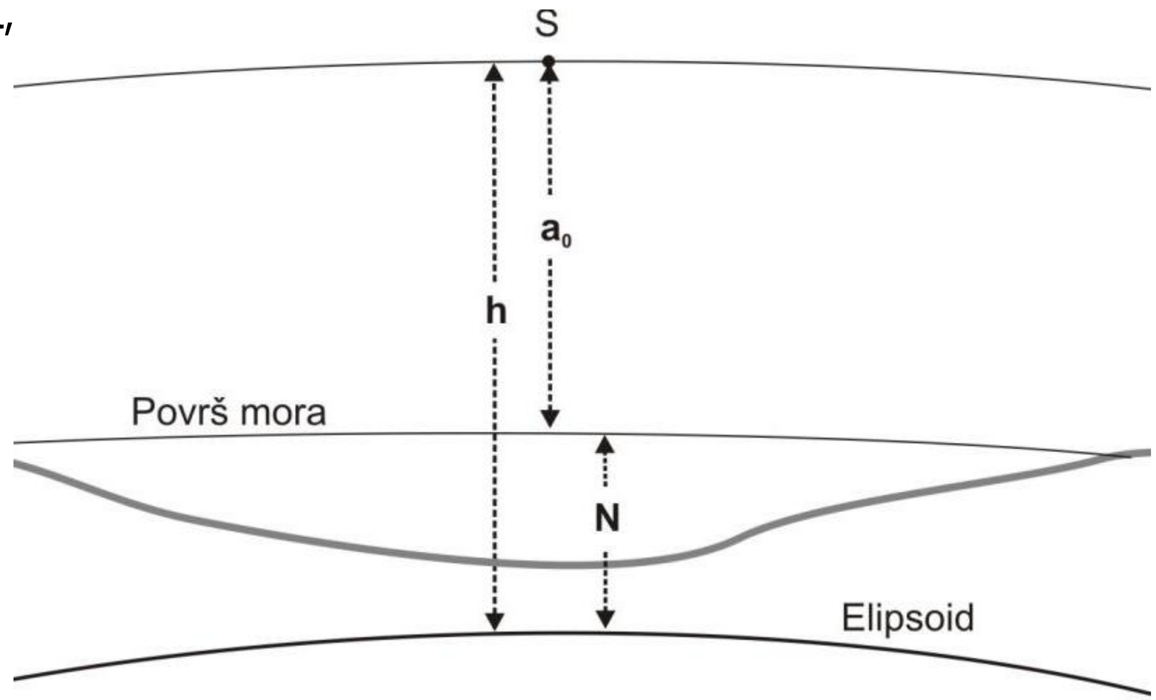


Altimetrijska merenja

Satelitska altimetrija predstavlja jednu posebnu formu dvosmernog režima merenja dužina u kojoj se koristi radarsko elektromagnetno zračenje.

- satelitski uređaj → altimetar,
- vertikalno emitovanje kratkih radarskih impulsa,
- odbijanje impulsa od morske i okeanske površi,
- jednačina veze:

$$a_0 = \frac{1}{2} c \Delta t$$



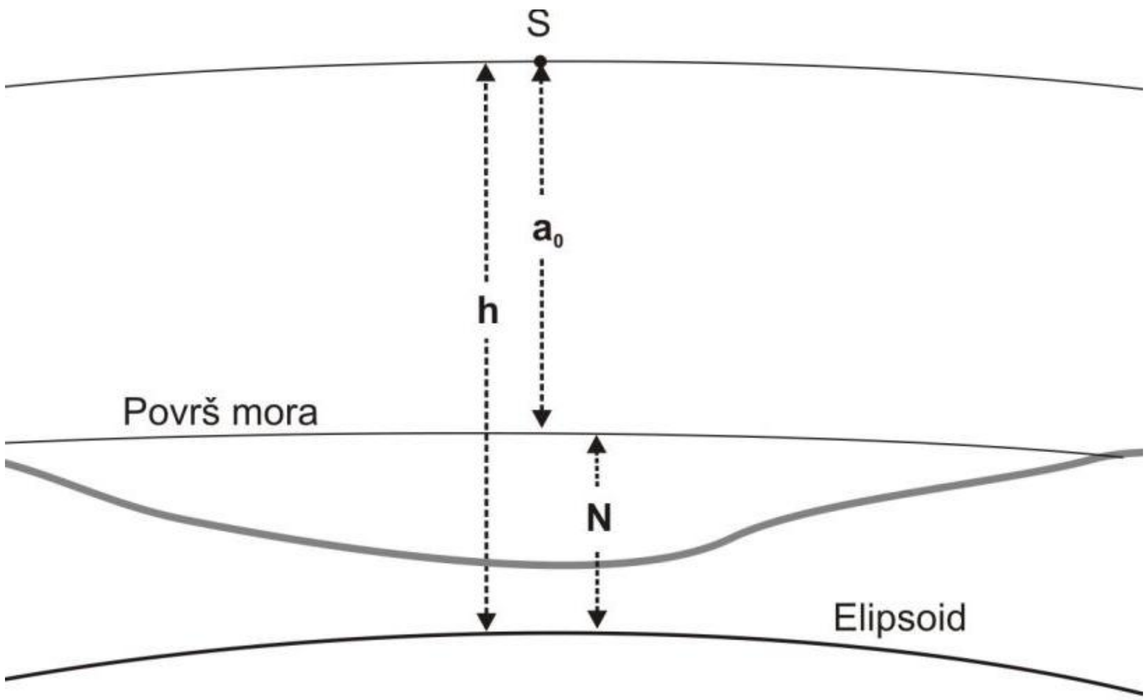
Altimetrijska merenja

Satelitska altimetrija predstavlja jednu posebnu formu dvosmernog režima merenja dužina u kojoj se koristi radarsko elektromagnetno zračenje.

- poznata satelitska orbita → poznato h,
- na osnovu merene veličine i poznate visine:

$$N = h - a_0$$

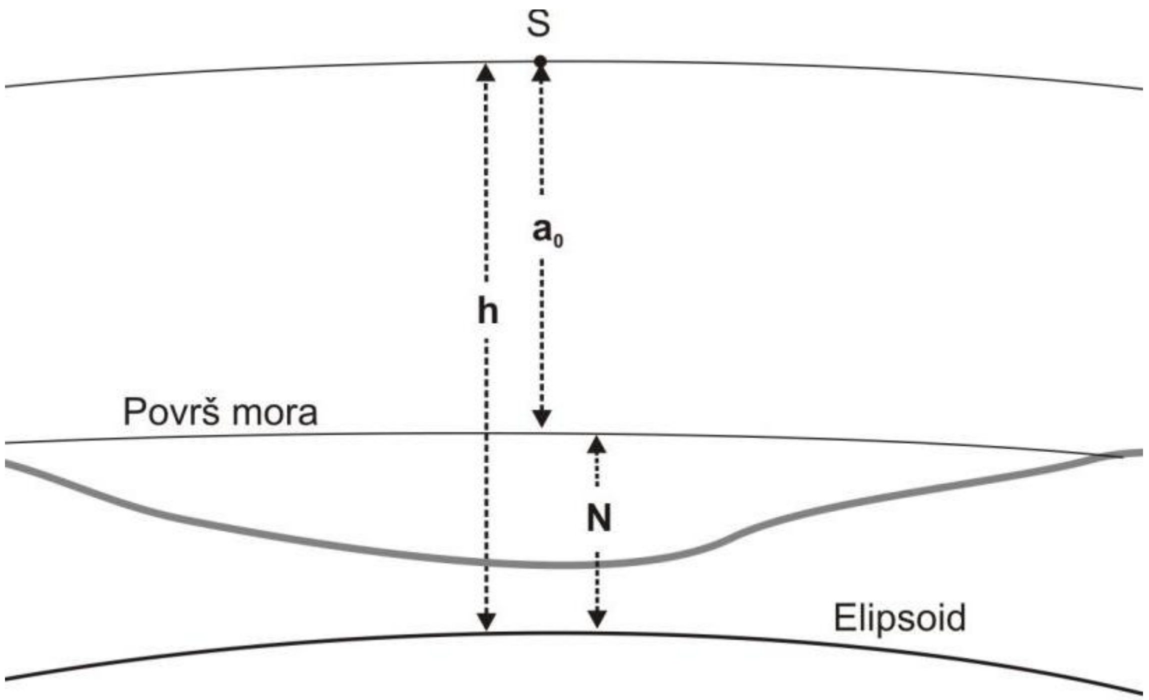
- veličina N – undulacija geoida.



Altimetrijska merenja

Satelitska altimetrija predstavlja jednu posebnu formu dvosmernog režima merenja dužina u kojoj se koristi radarsko elektromagnetno zračenje.

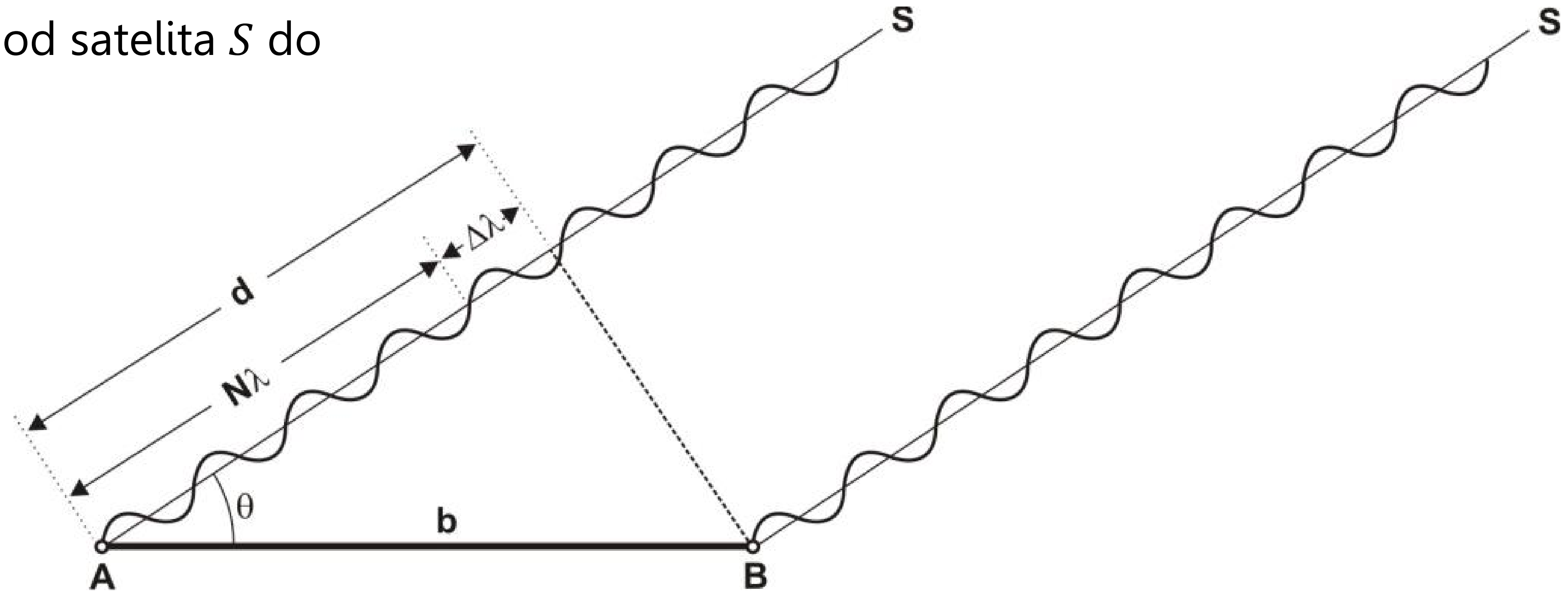
- problem:
  - trenutni nivo mora umesto srednjeg nivoa mora,
  - topografija morske površi,
  - uticaj atmosfere,
  - uticaj greške satelitske orbite.
- koncept: kosmos-Zemlja,
- prvi sateliti:
  - GEOS-3, SEASAT-1,
- ostali sateliti:
  - GEOSAT, ERS-1, ERS-2, TOPEX/POSEIDON GFO, JASON, ENVISAT



Interferometrijska merenja

Osnovni princip:

- baza b definisana antenama A i B,
- kontinuirani prijem signala,
- pretpostavka → visina leta satelita ≫ dužine baze,
- paralelnost pravaca od satelita S do antena A i B.



Interferometrijska merenja

Osnovni princip:

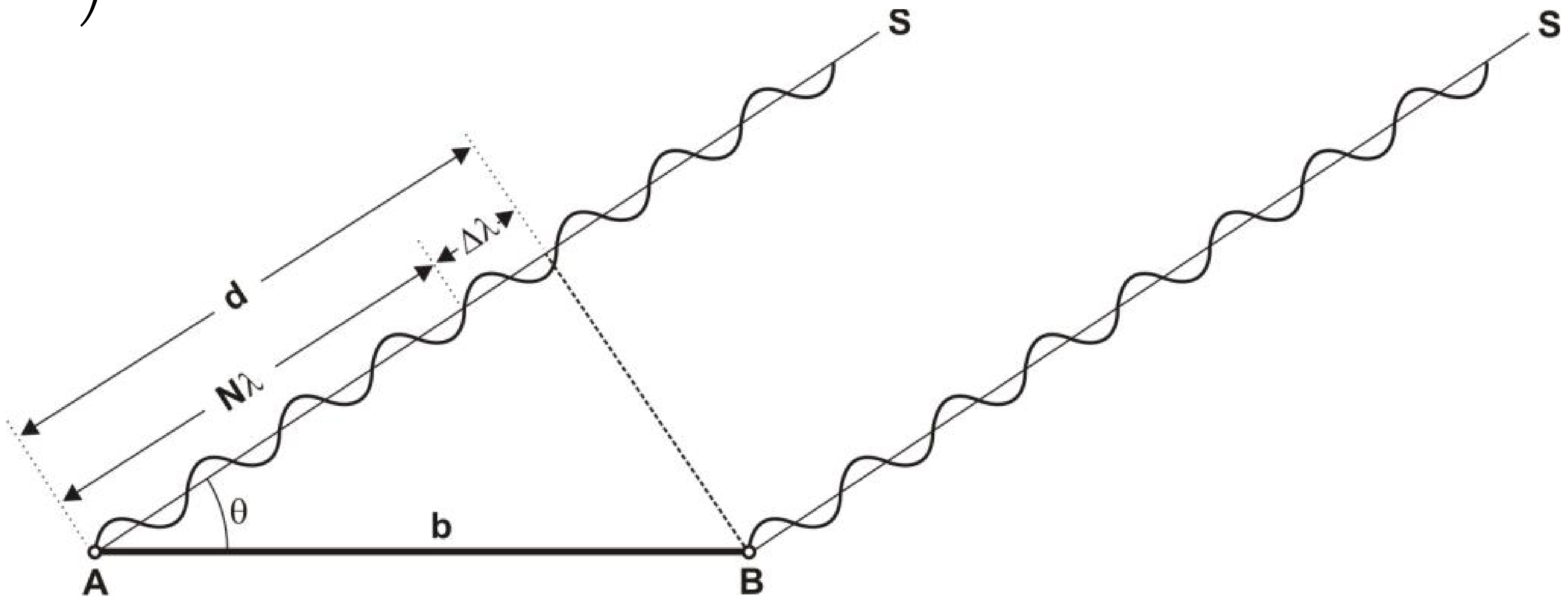
- razlika u pređenim rastojanjima do antena A i $B \rightarrow d$,

- fazna merenja → mogućnost određivanja fazne razlike $\Delta\varphi$:

$$d = N\lambda + \Delta\lambda = \left(\frac{\Delta\varphi}{2\pi} + N\right)\lambda$$

- takođe važi:

$$\cos\theta = d/b$$



Interferometrijska merenja

Osnovni princip:

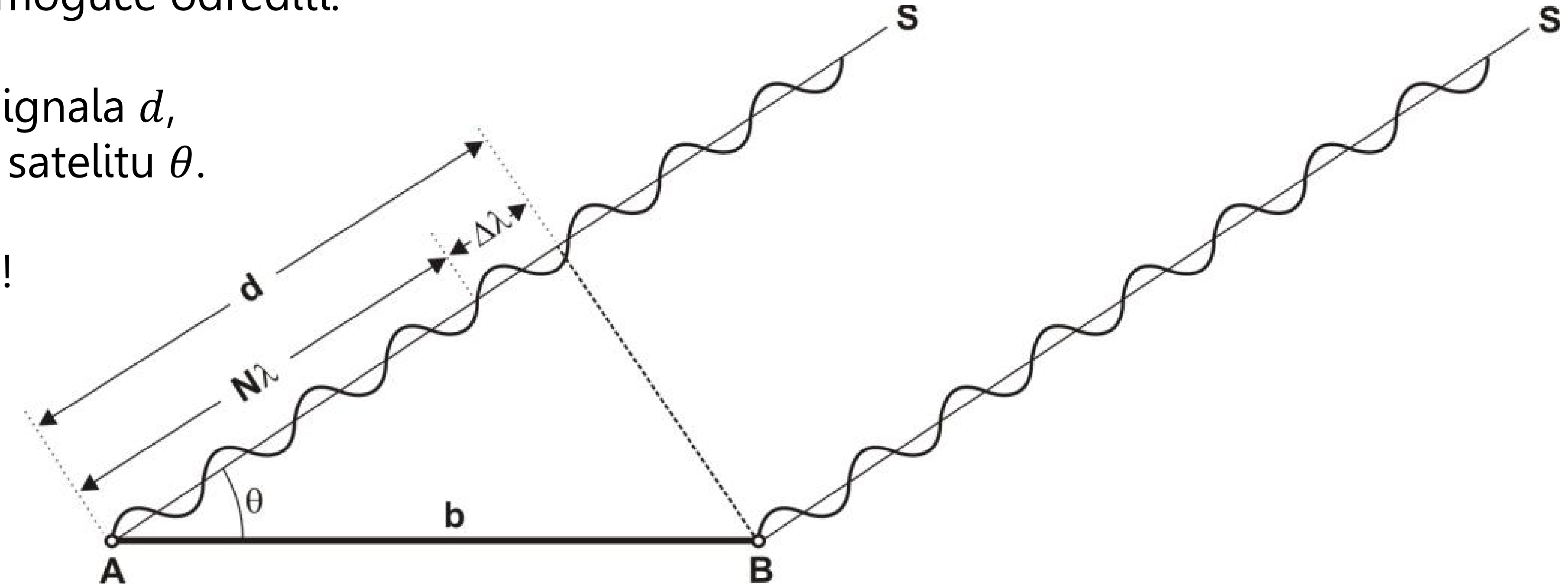
- finalni matematički izraz:

$$d = b\cos\theta = N\lambda + \Delta\lambda = \left(\frac{\Delta\varphi}{2\pi} + N\right)\lambda$$

na osnovu koga je moguće odrediti:

- dužinu baze b,
- razliku puteva signala d,
- ugao pravca ka satelitu θ.

* **fazna neodređenost**!



Interferometrijska merenja

Modifikacije u određenim primenama:

- veliko rastojanje između antena (dužina baze b) → antene nije moguće povezati kablom već je neophodno korišćenje atomskih časovnika za precizno merenje fazne razlike; primer: dugobazisna radiointerferometrija (Very-long-baseline interferometry – VLBI) gde rastojanje može iznositi više hiljada kilometara;

- VLBI opažanje veštačkih Zemljinih satelita → ne može se smatrati da je izvor zračenja beskonačno udaljen → pravci do antena nisu paralelni; posledica: mora se obračunati geometrijska korekcija kojom se uzima u obzir zakrivljenost talasnog fronta;

Interferometrijska merenja

Modifikacije u određenim primenama:

- VLBI opažanje prirodnih izvoza zračenja (kvazara) → interferometrijski metod više ne podrazumeva merenje fazne razlike već upotrebu tehnike korelacije: signali sa kvazara se primaju u obe antene pri čemu je neophodno da se precizno registruje vreme, da bi se nakon toga te dve vremenske serije signala međusobno korelisale pomeranjem jedne u odnosu na drugu sve dok se ne dobije maksimalni koeficijent korelacije; vremenski pomak do poklapanja predstavlja vreme kašnjenja jednog signala u odnosu na drugi τ:

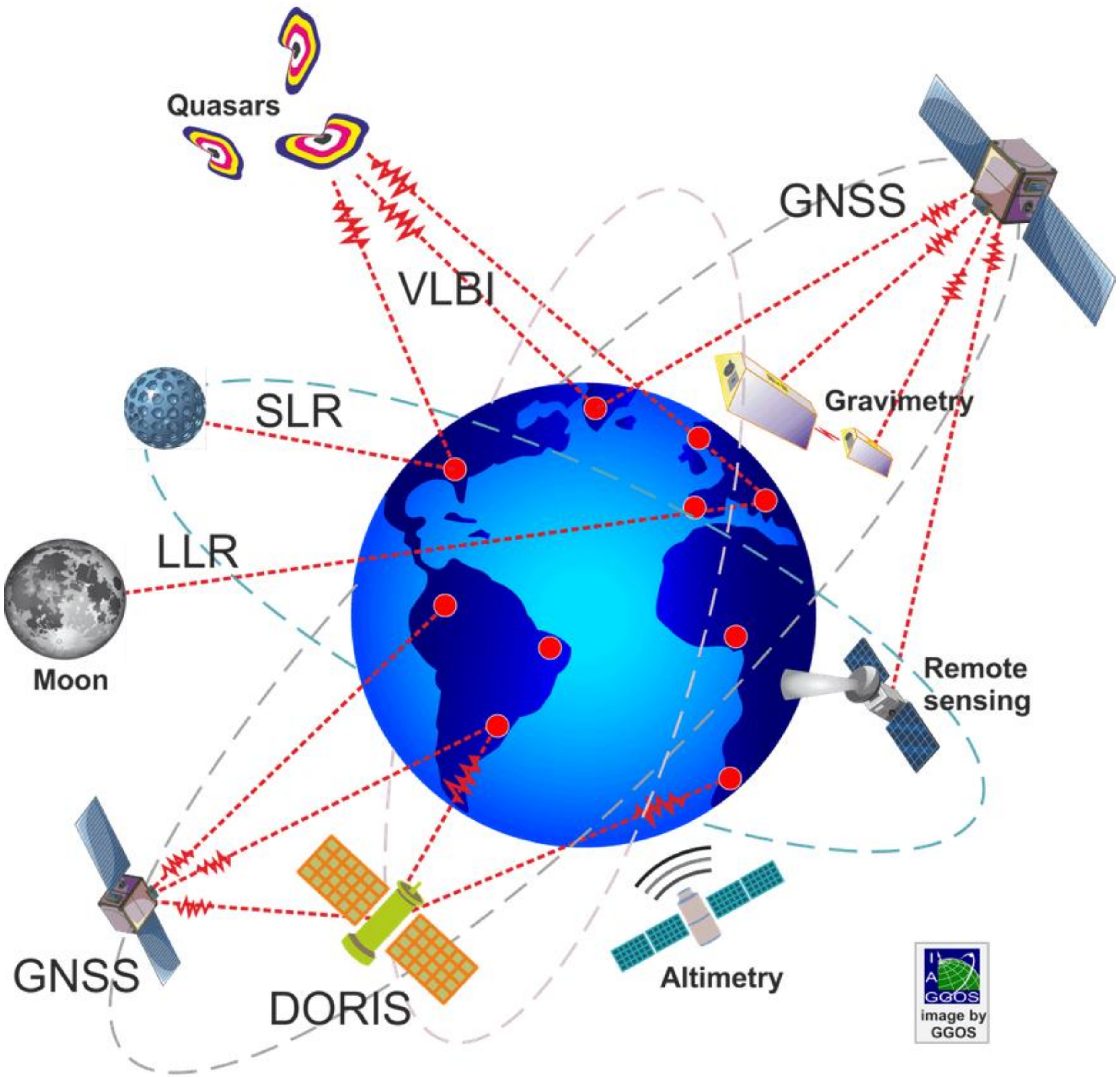
$$d = b\cos\theta = c \cdot \tau$$

PREDAVANJE 5

Satelitski sistemi i metode

Satelitski sistemi i metode

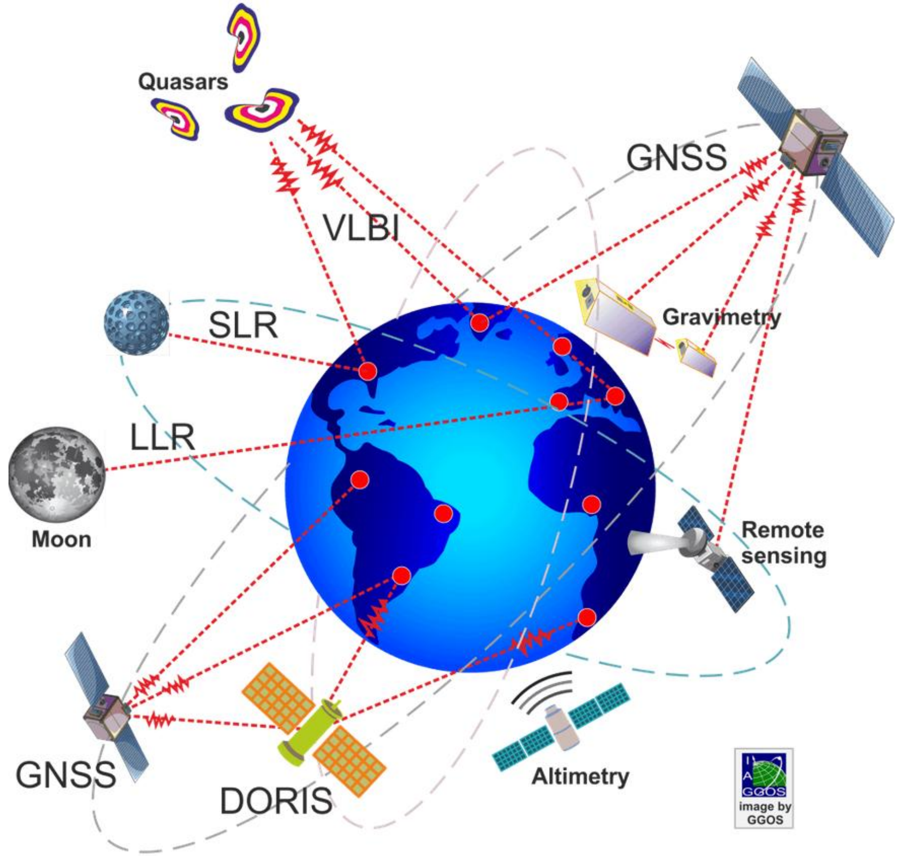
1. Globalni navigacioni satelitski sistemi
2. Lasersko merenje rastojanja
3. Satelitska altimetrija
4. Praćenje satelita
5. Satelitska gradiometrija



Globalni navigacioni satelitski sistemi

Definicija: „**Global Navigation Satellite System** is a space-based radio positioning system that includes one or more satellite constellations, augmented as necessary to support the intended operation, and that provides 24-hour three-dimensional position, velocity, and time information to suitably equipped users anywhere on, or near, the surface of the earth (and sometimes off earth)."

Termin **globalni navigacioni satelitski sistem** podrazumeva satelitsku konstelaciju koja omogućava pozicioniranja u realnom vremenu bilo gde na fizičkoj površini Zemlje, kontinuirano dostupnu u svim vremenskim uslovima, veoma preciznu, pouzdanu i ekonomičnu.

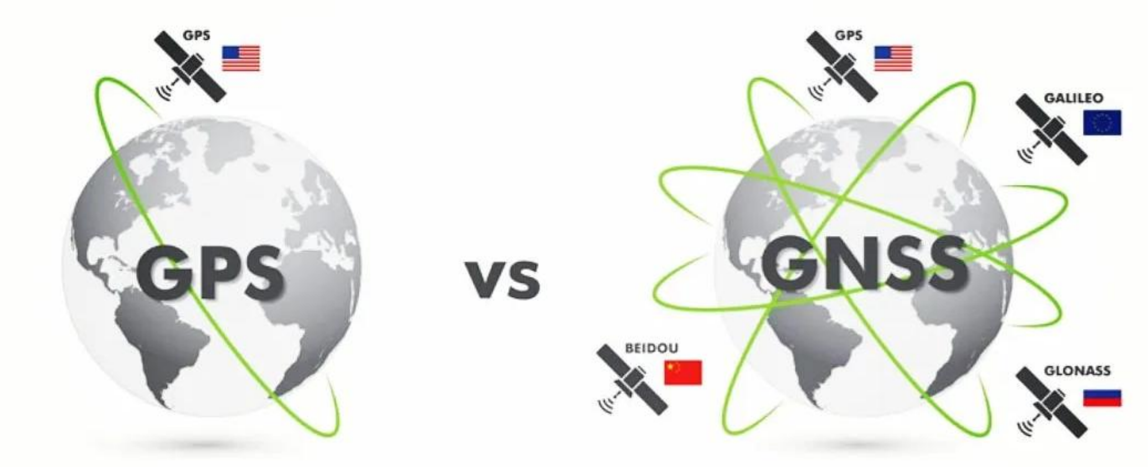


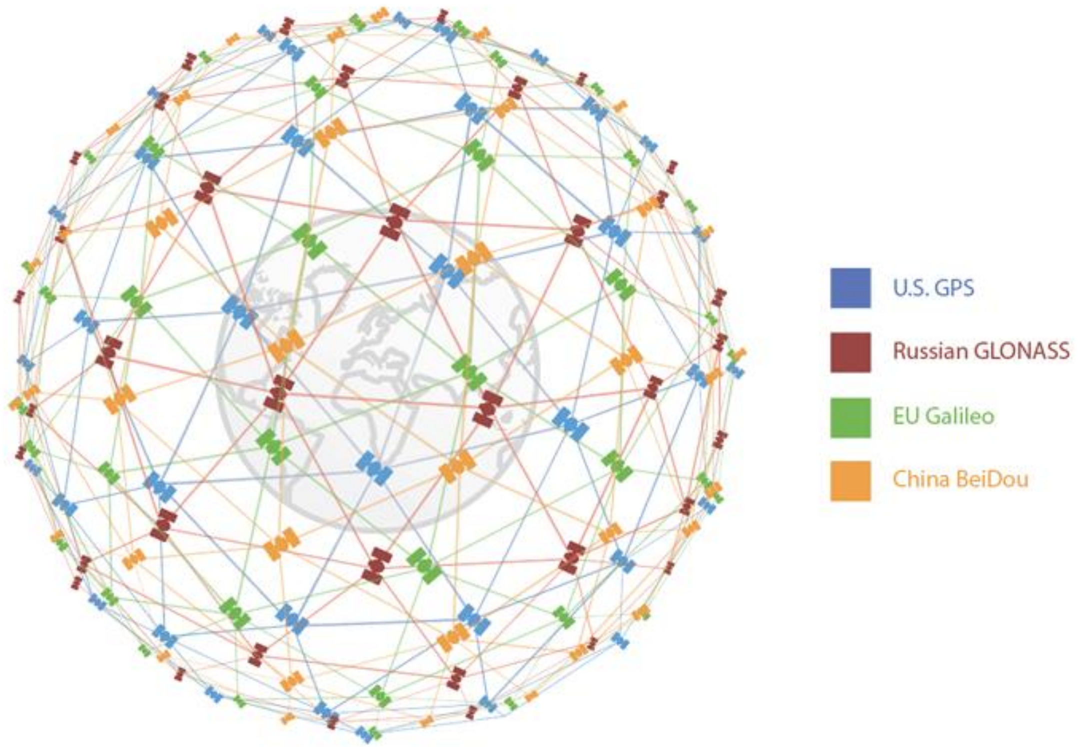
Prvi potpuno uspostavljen sistem: Navigation Satellite Timing and Ranging Global Positioning System – **NAVSTAR GPS** (17.07.1995. godine)

Globalni navigacioni satelitski sistemi

Ostali globalni sistemi za pozicioniranje:

- Globalnaya Navigationnaya Sputnikovaya Sistema – GLONASS (SSSR),
  Full Operational Capability (FOC) – 2011. godina
- GALILEO (Evropska Unija i Evropska Svemirska Agencija),
  FOC - 2018. godina
- BEIDOU ili COMPASS (Kina)
  FOC – 2020. godina

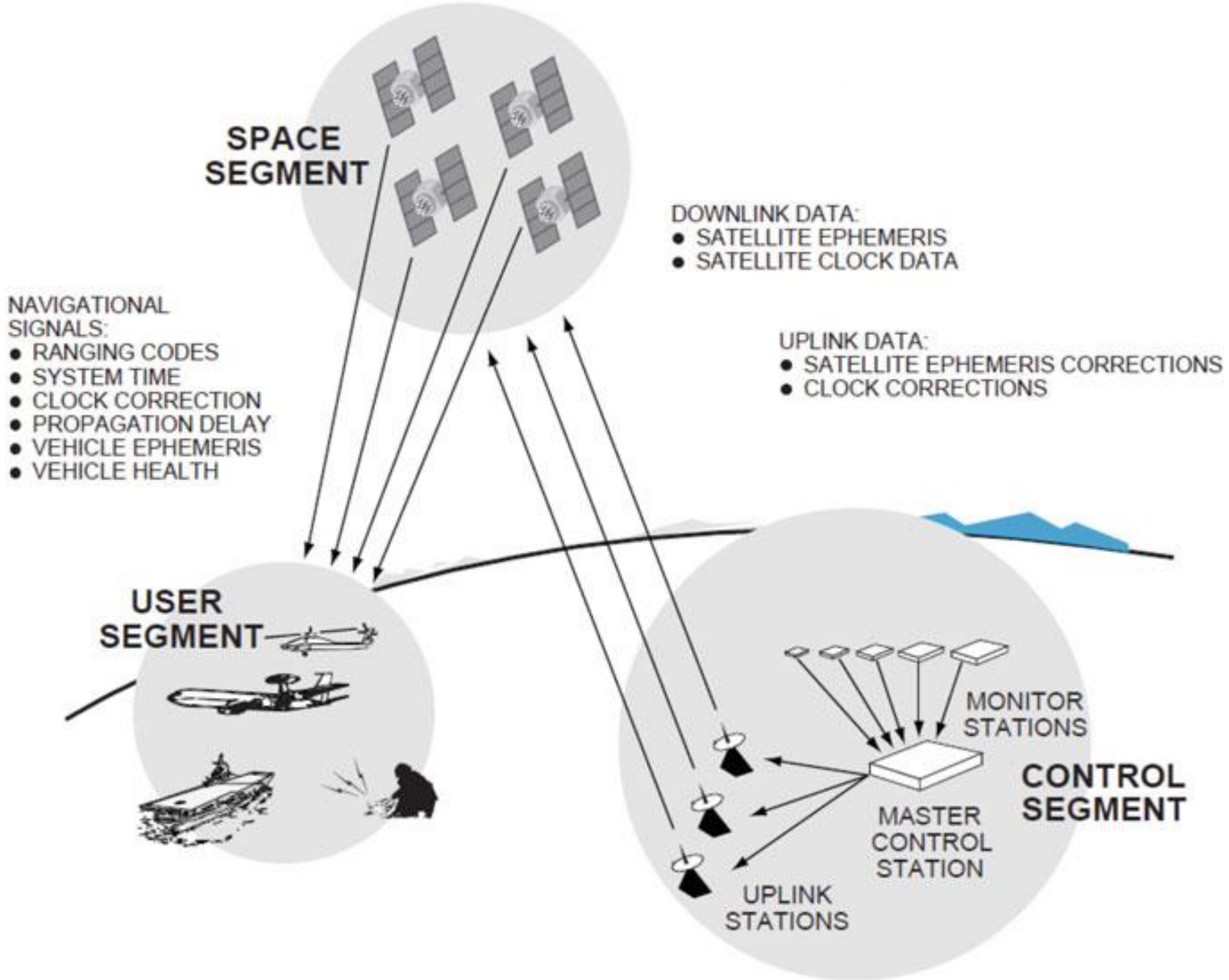




Arhitektura sistema

Osnovna arhitektura sistema za globalno pozicioniranje:

- kosmički segment,
- kontrolni segment,
- korisnički segment.

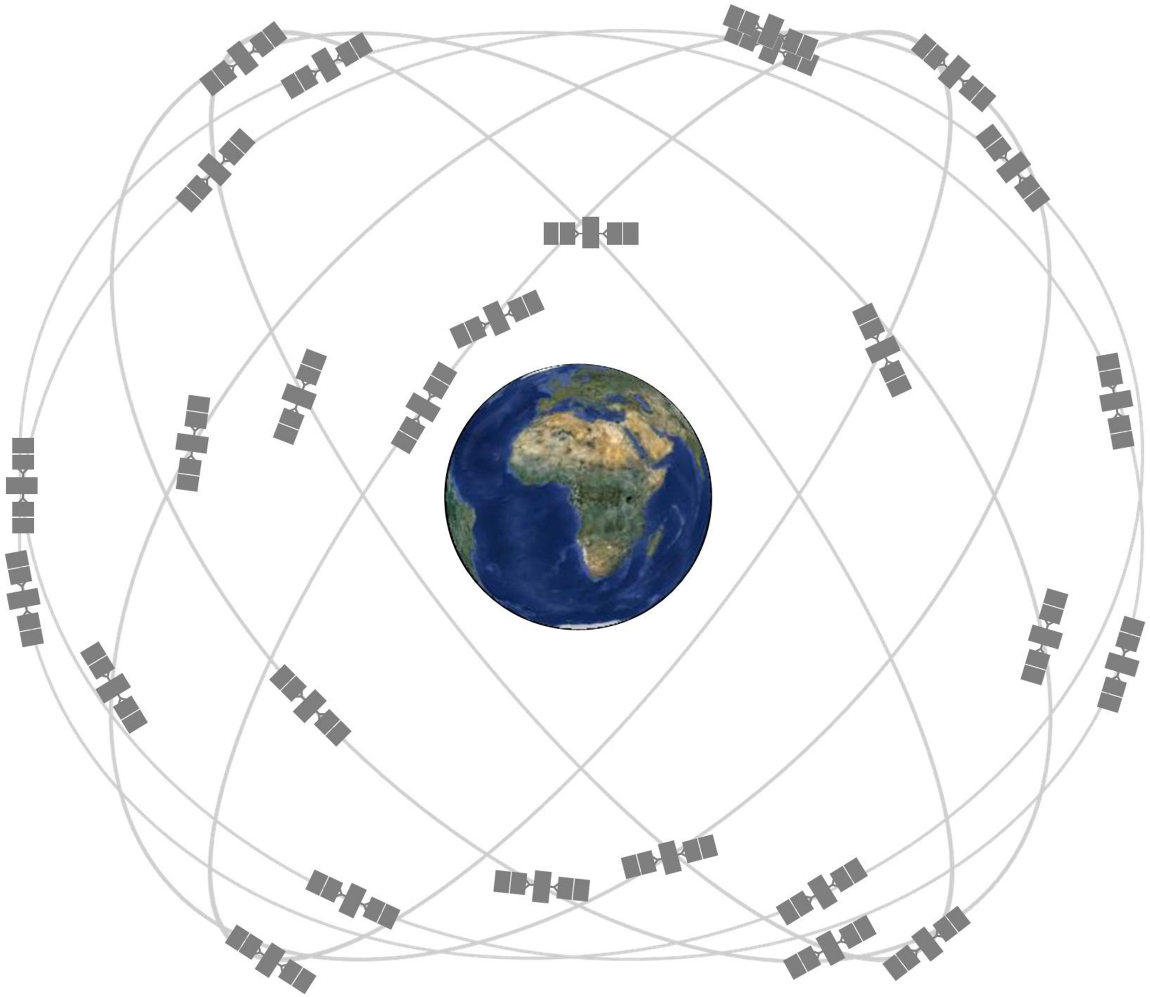


Arhitektura sistema NAVSTAR GPS

<u>Kosmički segment</u>:

- broj satelita - 24,
- broj orbitalnih ravni - 6,
- nagib orbitalnih ravni - 55°,
- visina orbita - 20200 km,
- poluprečnik orbita - 26560 km,
- period obilaska oko Zemlje - 12 časova (11h 58min 2s),

satelitska konstelacija →

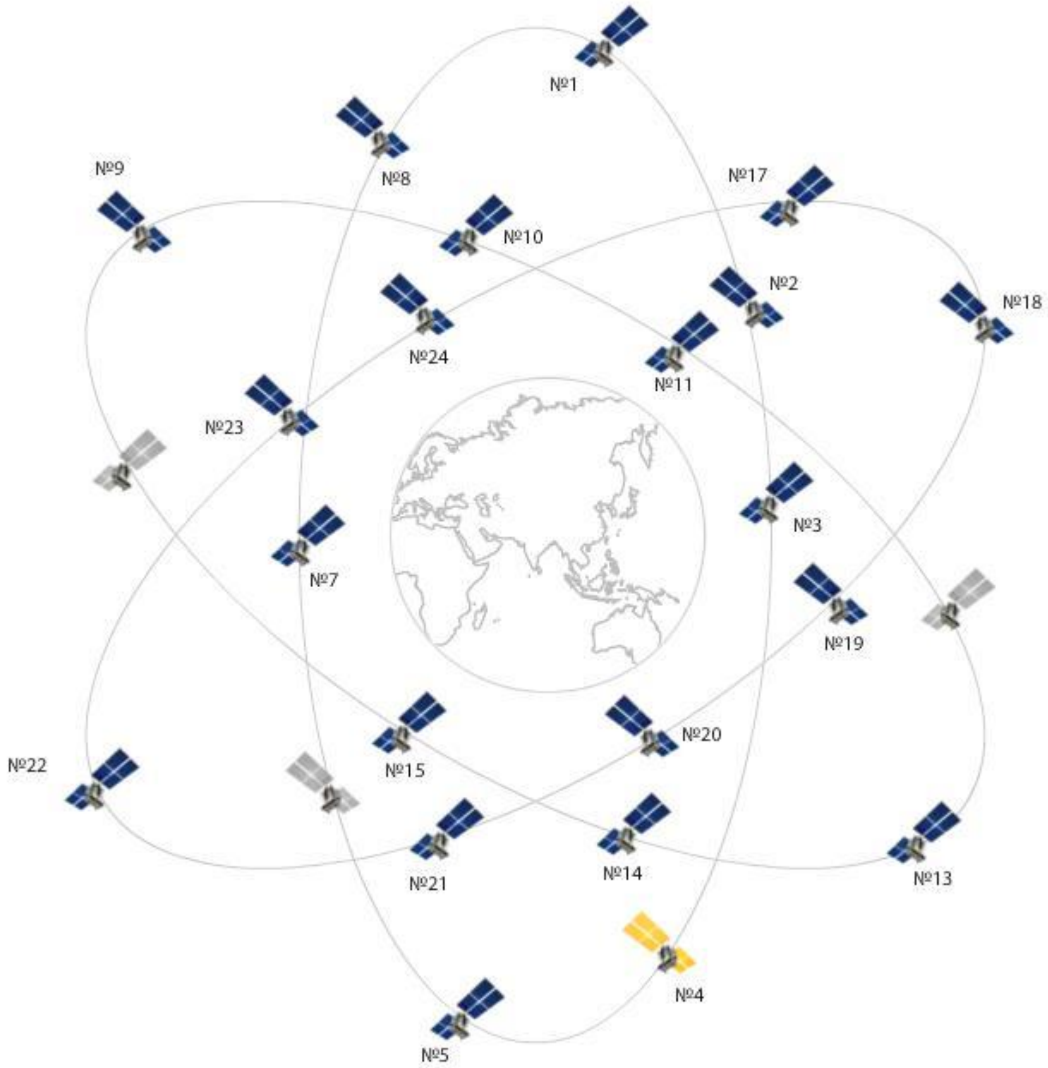


Arhitektura sistema GLONASS

Kosmički segment:

- broj satelita - 24,
- broj orbitalnih ravni - 3,
- nagib orbitalnih ravni - 64.8°,
- visina orbita - 19100 km,
- poluprečnik orbita - 25510 km,
- period obilaska oko Zemlje - 11h 15min,

satelitska konstelacija →

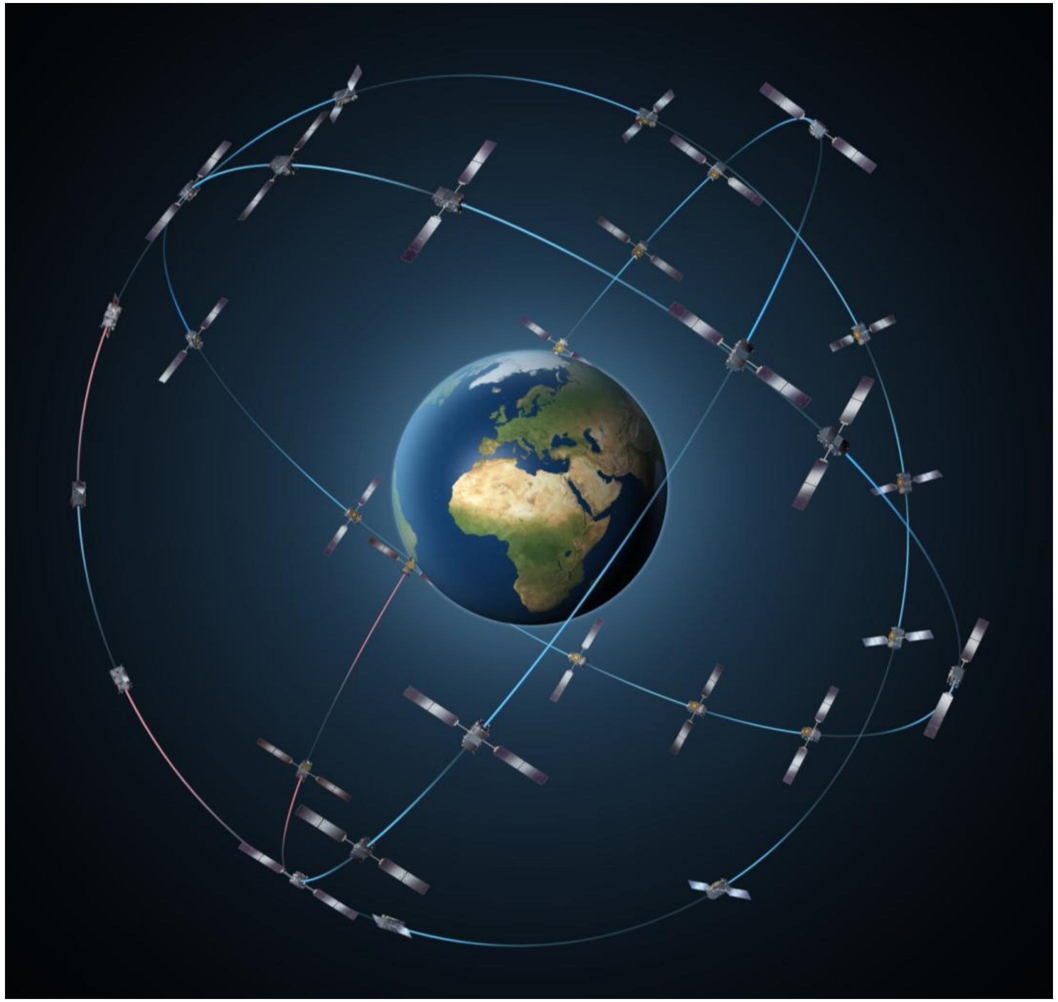


Arhitektura sistema GALILEO

Kosmički segment:

- broj satelita - 24,
- broj orbitalnih ravni - 3,
- nagib orbitalnih ravni - 56°,
- visina orbita - 23222 km,
- poluprečnik orbita - 29600 km,
- period obilaska oko Zemlje - 14h 04min 42s,

satelitska konstelacija →

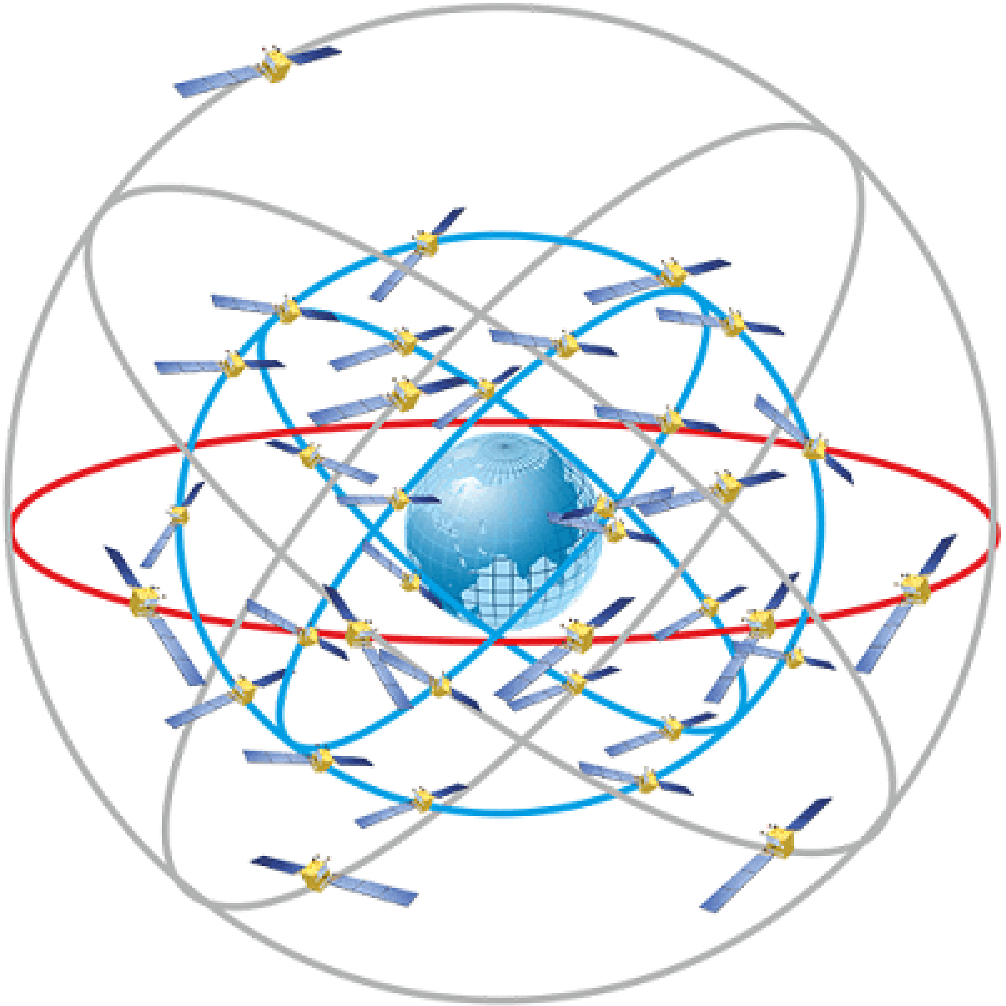


Arhitektura sistema BEIDOU

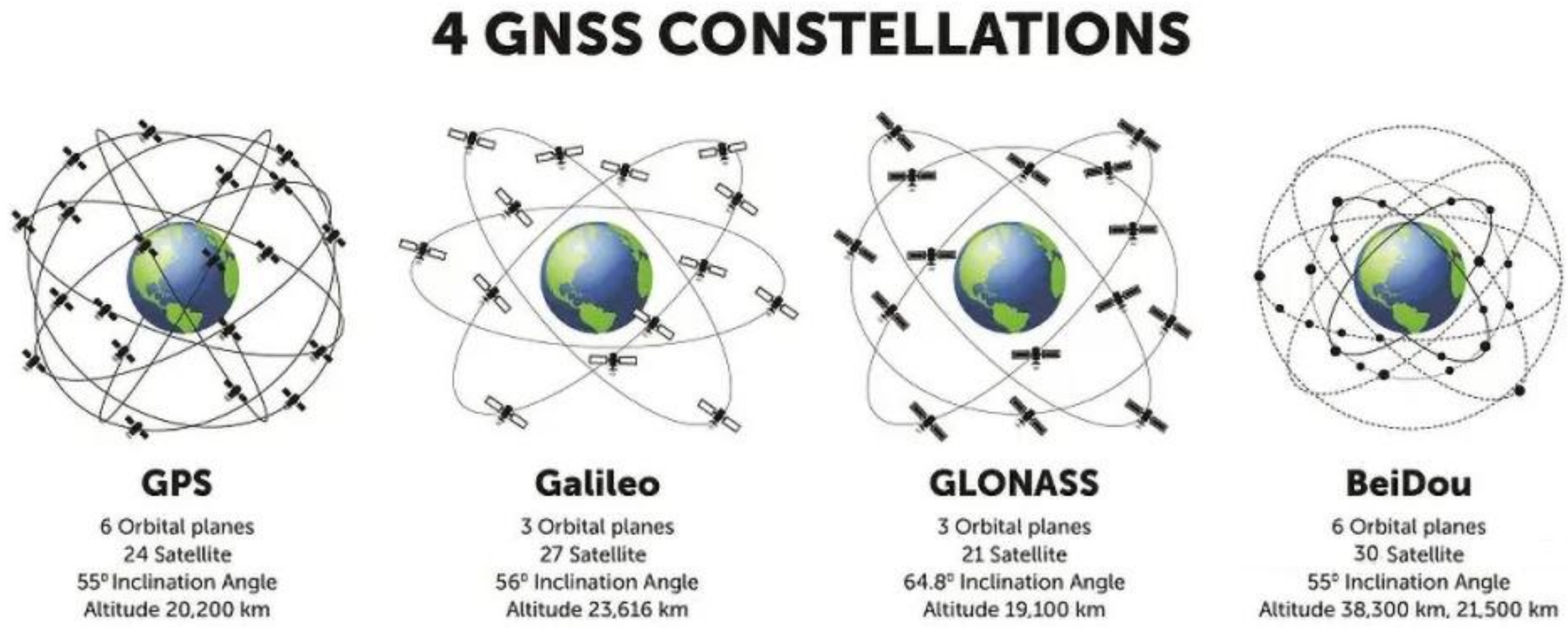
<u>Kosmički segment</u>:

- broj satelita – 30 (3 GEO, 3 IGSO, 24 MEO),
  - GEO: 80°E, 110.5°E, 150°E
- broj orbitalnih ravni – 7 (1 GEO, 3 IGSO, 3 MEO),
- nagib orbitalnih ravni - 55° (MEO i IGSO), 0° (GSO),
- period obilaska (MEO): 12h 53min 24s,
- visina orbita:
  - GEO i IGSO: 35800 km,
  - MEO: 21500 km

satelitska konstelacija →



GNSS konstelacije



Referentni sistemi i vremenske skale

- NAVSTAR GPS: World Geodetic System 1984 (WGS84) GPS Time (GPST)
- GLONASS: Glonass Reference Frame (PZ-90) Glonass Time (GLNT)
- GALILEO: Galileo Reference Frame (GTRF) Galileo System Time (GST)
- BEIDOU: Beidou Reference Frame (CGCS2000) BeiDou System Time (BDT)

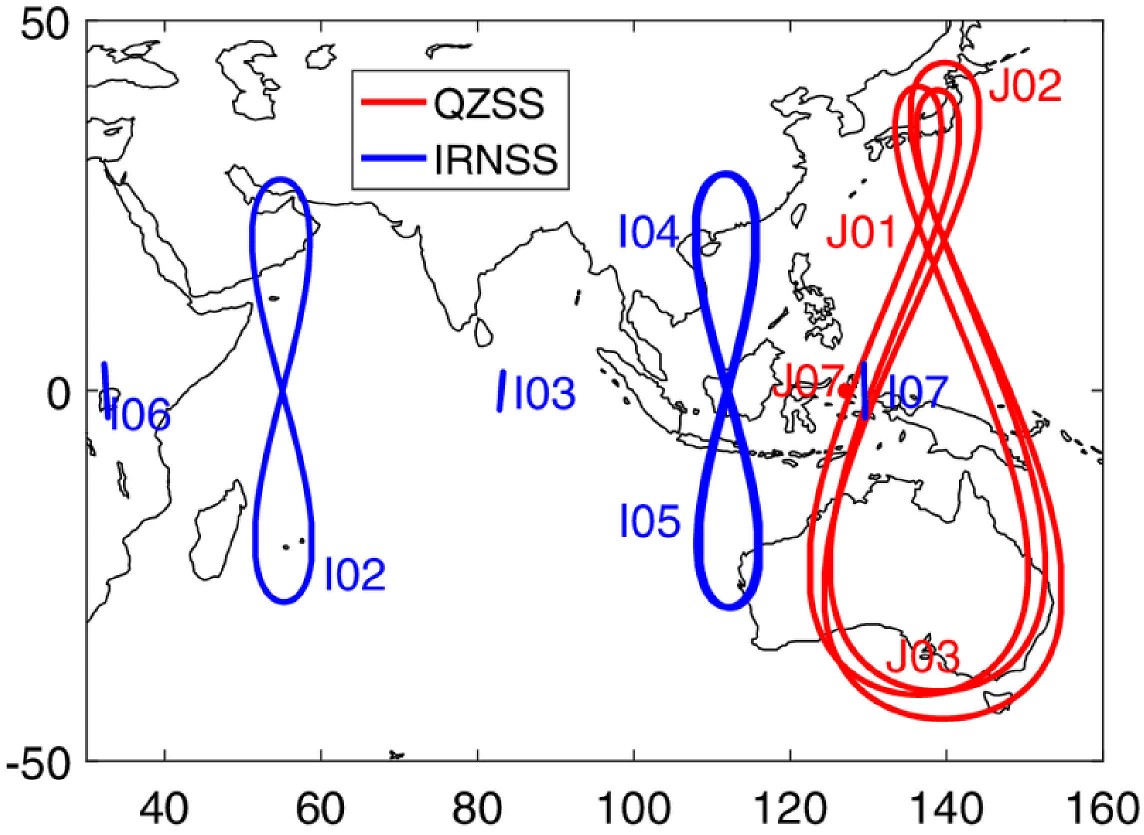
GNSS	Reference frame
GPS	World Geodetic System 1984 (WGS84)
GLONASS	Parametry Zemli 1990 (PZ-90)
Galileo	Galileo Terrestrial Reference Frame (GTRF)
BeiDou	China Geodetic Coordinate System 2000 (CGCS2000)
QZSS	Japanese Geodetic System (JGS)
IRNSS	World Geodetic System 1984 (WGS84)

UTC – GPST	$0\,\mathrm{h} - n + 19\,\mathrm{s} + C_0$	GPS Time (GPST) is steered to UTC(USNO), C_0 is required to be less than 1 µs but is typically less than 20 ns
UTC – GLST	$-3\,\mathrm{h} + 0\,\mathrm{s} + C_1$	GLONASST (GLONASS Time) is steered to UTC(SU) including leap seconds. C_1 is required to be less than 1 ms. Note that GLONASST is offset from UTC by –3 hours corresponding to the offset of Moscow local time from the Greenwich meridian.
UTC – GST	$0\,\mathrm{h} - n + 19\,\mathrm{s} + C_2$	Galileo Time (GST) is steered to a set of European Union UTC(k) realization and C_2 is nominally less than 50 ns.
UTC – BDT	$0\,\mathrm{h} - n + 33\,\mathrm{s} + C_3$	BeiDou Time (BDT) is steered to UTC(NTSC) and C_3 is specified to be maintained less than 100 ns.

Regionalni navigacioni satelitski sistemi

Regionalni sistemi:

- ➢ Quasi-Zenith Satellite System – QZSS (Japan),
- ➢ Indian Regional Navigation Satellite System – IRNSS (Indija) (operativno ime NAVIC - Navigation with Indian Constellation).



Regionalni navigacioni satelitski sistemi

Koncept kosmičkog segmenta kod RNSS:

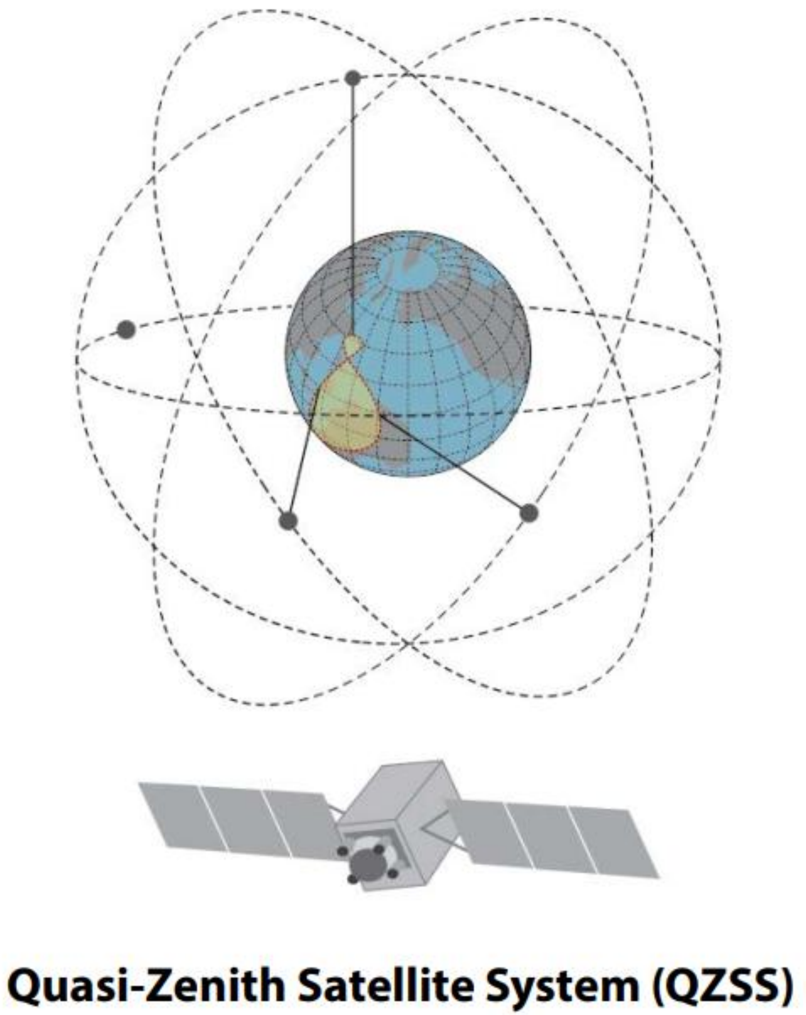
- satelitske orbite:
  - geostacionirane orbite (Geostationary Orbit - GEO);
  - nagnute geosinhrone orbite (Inclined Geosynchronous Orbit - IGEO);
  - jako eliptične orbite (Highly Elliptical Orbit - HEO);
- period obilaska:
  - period rotacije Zemlje,
  - poluperiod rotacije Zemlje.

Sistem QZSS

<u>Kosmički segment</u>:

- broj satelita – 4 (1 GEO, 3 IGSO),
  - GEO: 80°E, 110.5°E, 150°E
- broj orbitalnih ravni – 4,
- nagib orbitalnih ravni - 43°,
- period obilaska: 23h 56min.

satelitska konstelacija →



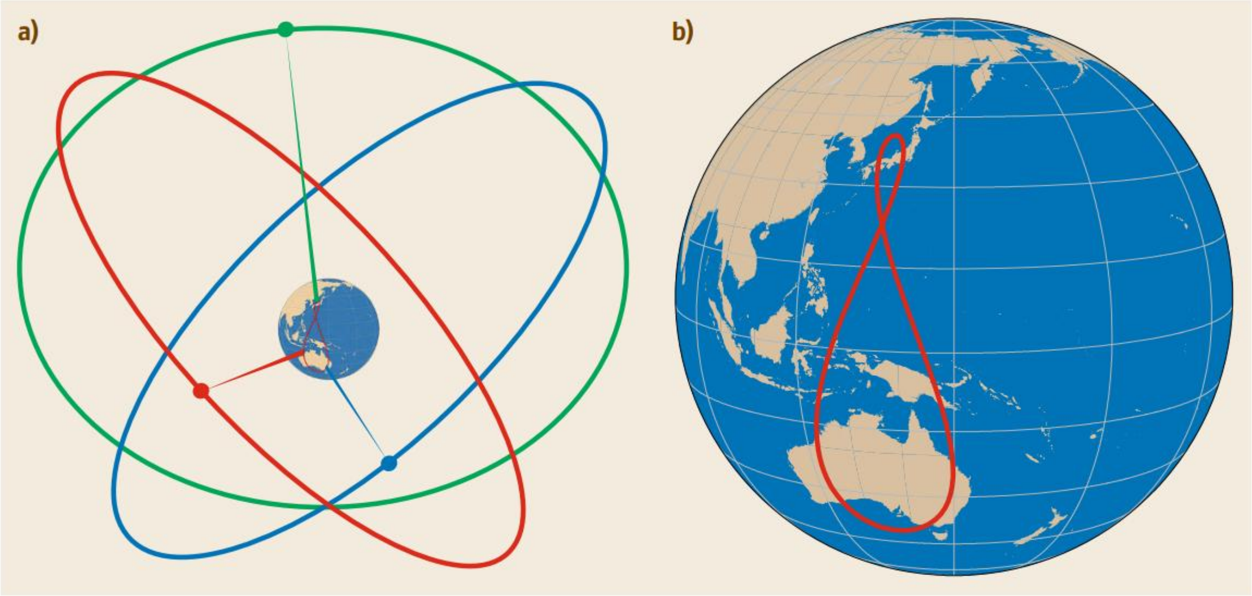
Sistem QZSS

Kosmički segment:

- broj satelita – 4 (1 GEO, 3 IGSO),
  - GEO: 80°E, 110.5°E, 150°E
- broj orbitalnih ravni – 4,
- nagib orbitalnih ravni - 43°,
- period obilaska: 23h 56min.

Element	Value
Semimajor axis a	42 164 km (average)
Eccentricity e	0.075 ± 0.015
Orbital inclination i	$43° \pm 4°$
Argument of perigee ω	$270° \pm 2°$
Central long. of ground track $\bar{\lambda}$	$135° \pm 5°$ East
RAAN spacing $\Delta\Omega$	120°

satelitska konstelacija →



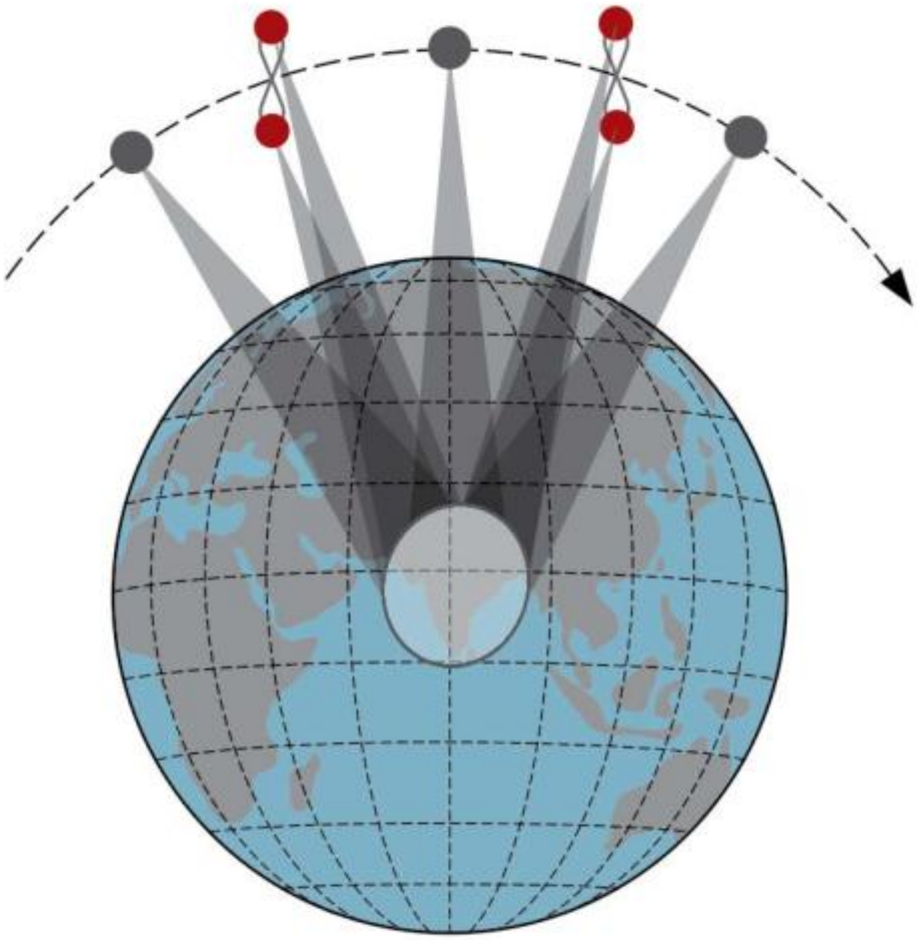
Sistem IRNSS (NAVIC)

Kosmički segment:

- broj satelita – 8 (3 GEO, 5 IGSO),
- nagib orbitalnih ravni - <5° (GEO), 29° (GSO),

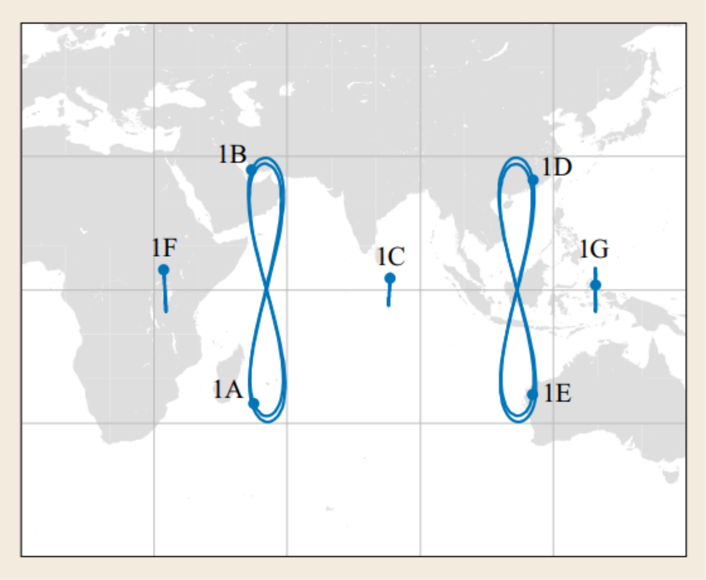
Satellite	Long.	Inclin.	Launched
IRNSS-1A	55.0°	29° ± 2°	1 July 2013
IRNSS-1B	55.0°	29° ± 2°	4 April 2014
IRNSS-1C	83.0°	< 5°	15 October 2014
IRNSS-1D	111.75°	29° ± 2°	28 March 2015
IRNSS-1E	111.75°	29° ± 2°	20 January 2016
IRNSS-1F	32.5°	< 5°	10 March 2016
IRNSS-1G	129.5°	< 5°	28 April 2016
IRNSS-1I	55.0°	29° ± 2°	12 April 2018

satelitska konstelacija →

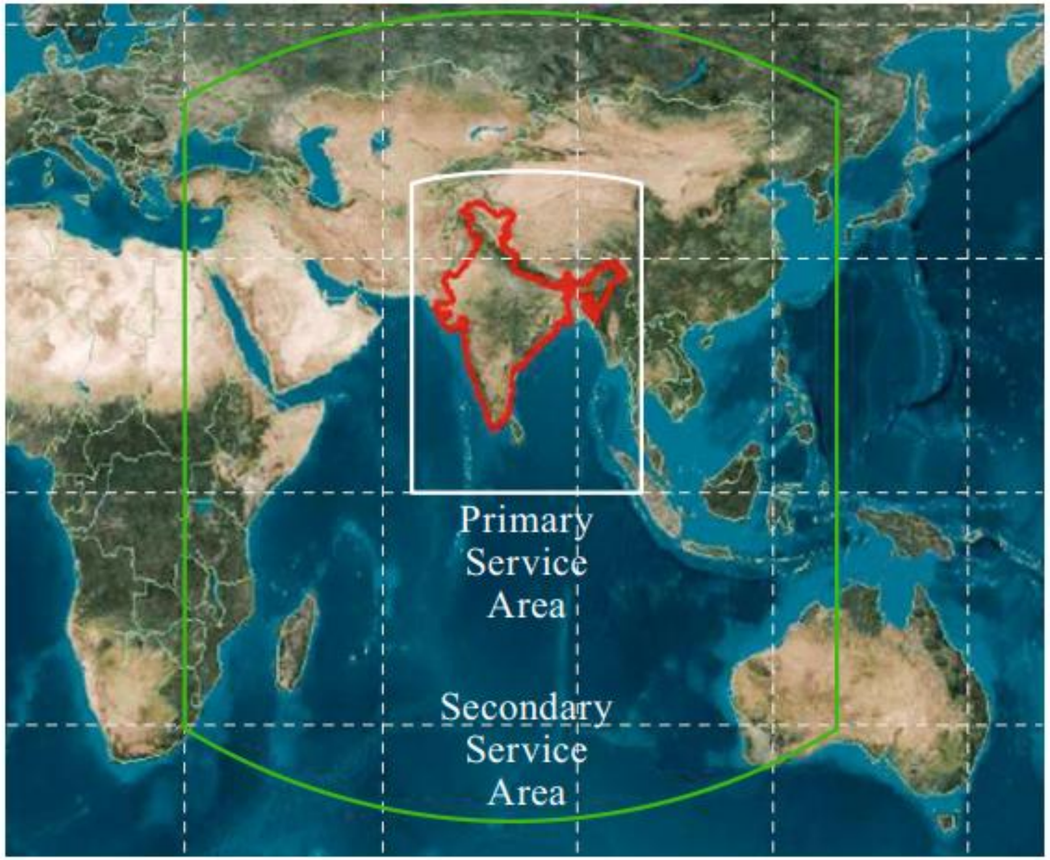


Sistem IRNSS (NAVIC)

Trag kretanja satelita:



Pokrivenost:

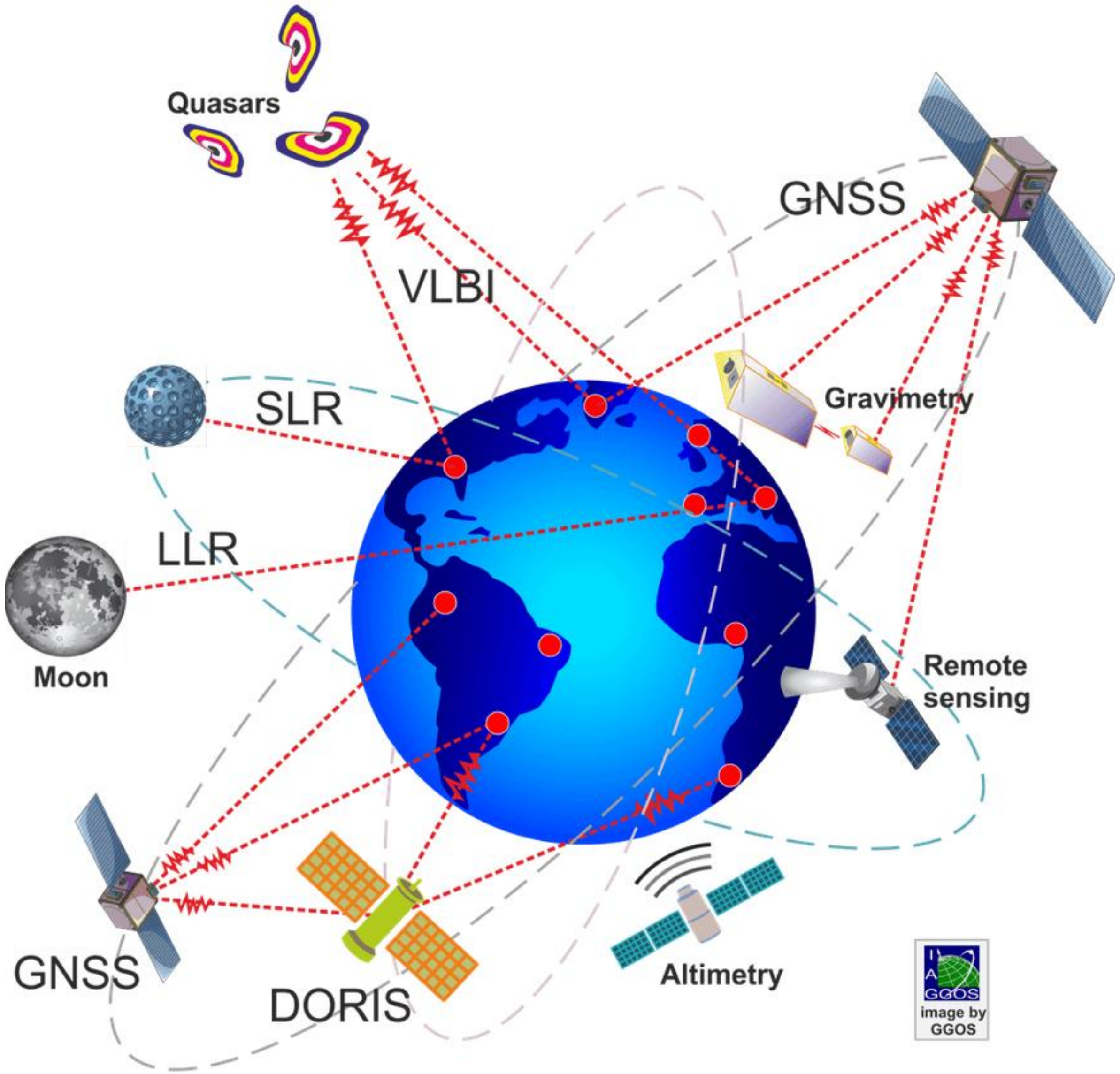


Lasersko merenje rastojanja

Lasersko merenje rastojanja:

- Lasersko merenje rastojanja do satelita (Satellite Laser Ranging - SLR),

- Lasersko merenje rastojanja do Meseca (Lunar Laser Ranging - LLR),

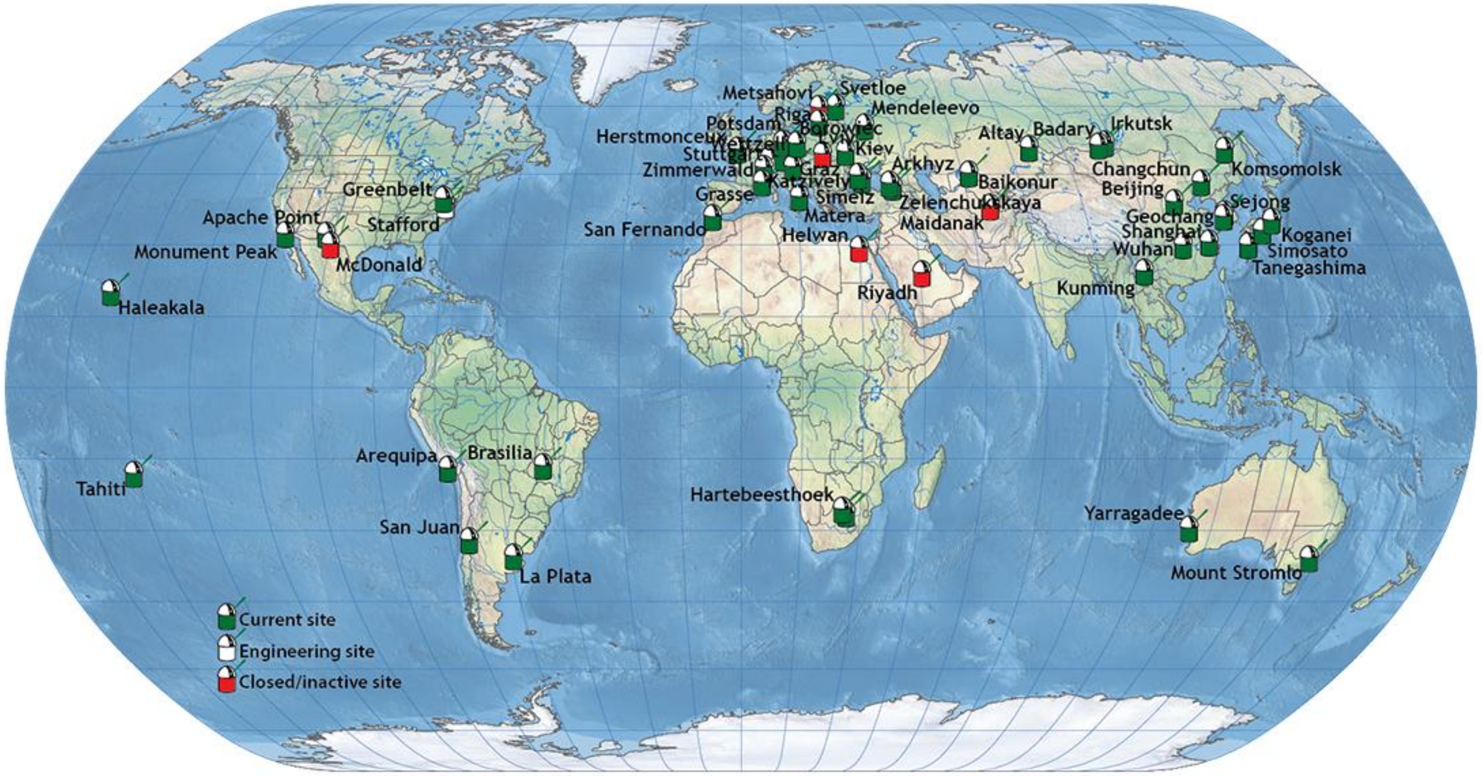


Lasersko merenje rastojanja

SLR/LLR mreža:

- Oko 40 SLR stanica i 4 LLR stanica,
- Sateliti za praćenje (oko 120) na visinama od 250 km do 35000 km i postavljeni reflektori na površini meseca,

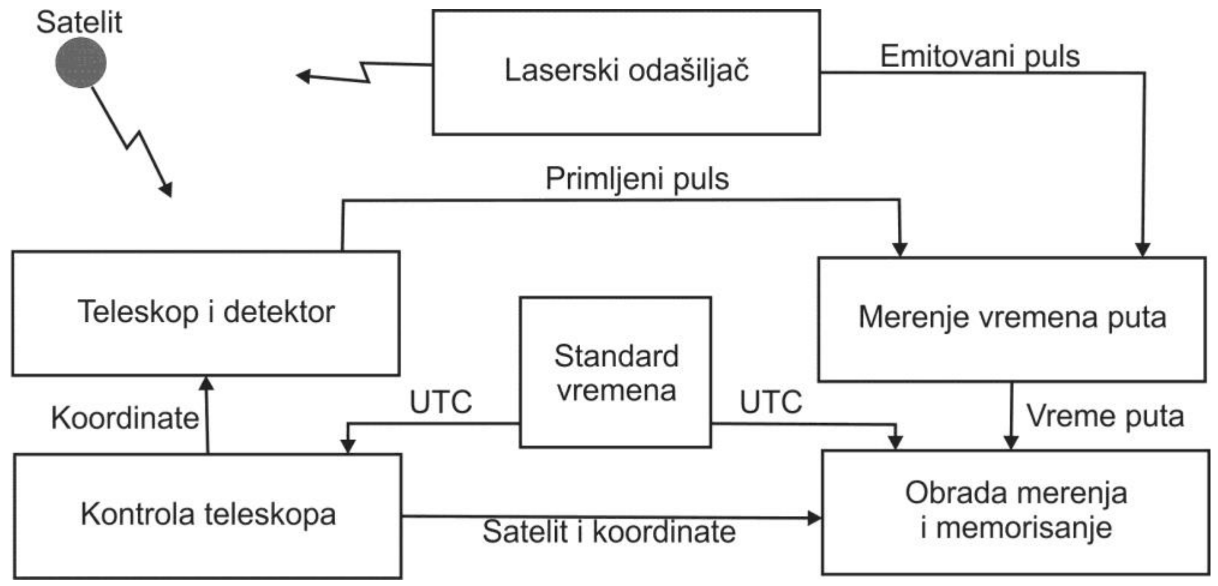
Međunarodna služba:
International Laser Ranging Service (ILRS)

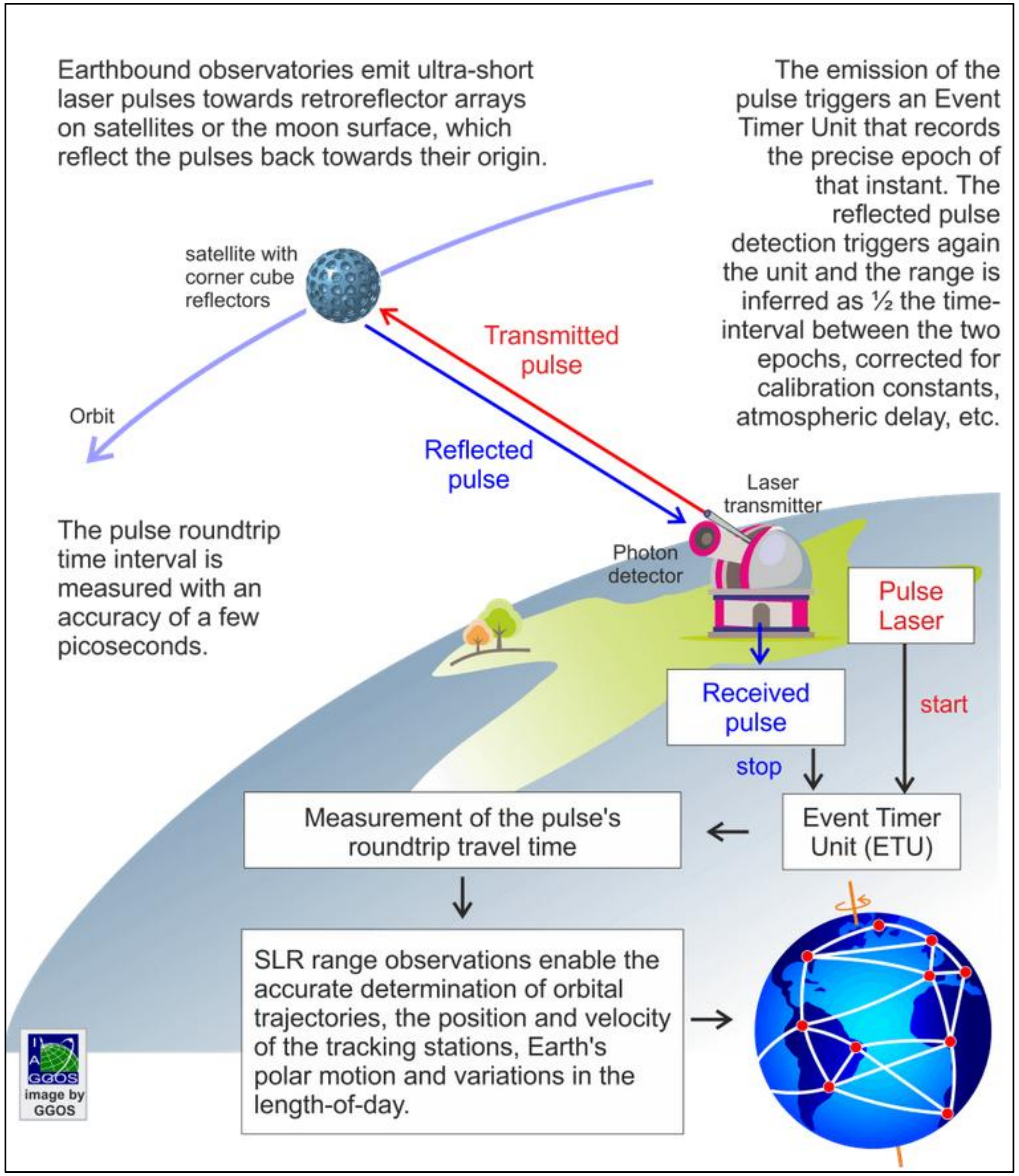


Lasersko merenje rastojanja

Lasersko merenje rastojanja do satelita:

- Merni sistem:
  - generator i odašiljač laserskih impulsa,
  - detektor i analizator povratnih impulsa,
  - elektronski brojač za merenje proteklog vremena.





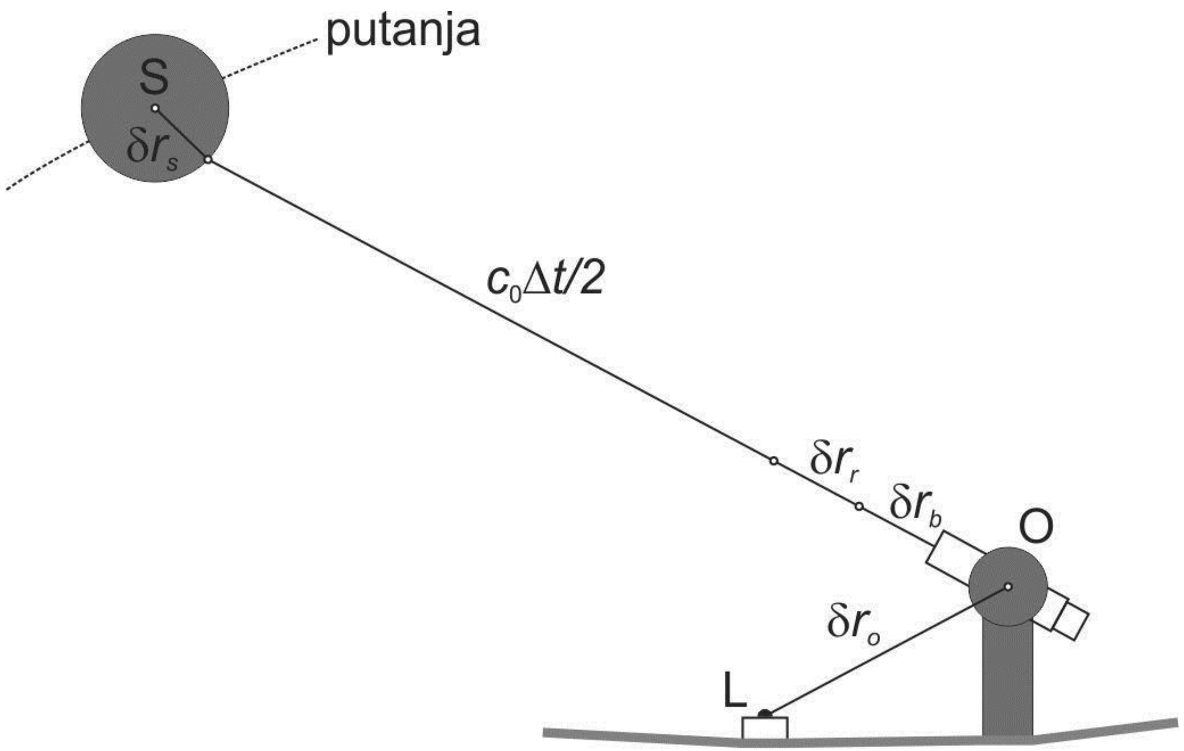
Lasersko merenje rastojanja

Lasersko merenje rastojanja do satelita:

- Osnovna jednačina:

$$r = c_0 \frac{\Delta t}{2} + \delta r_0 + \delta r_s + \delta r_b + \delta r_r + \varepsilon$$

- δr_0 - ekscentricitet na stanici,
- δr_s - ekscentricitet u satelitu,
- δr_b - kašnjenje impulsa pri kretanju kroz laserski sistem,
- δr_r - korekcija za atmosfersku refrakciju,
- ε - slučajna greška merenja i ostali nemodelirani efekti.



Lasersko merenje rastojanja

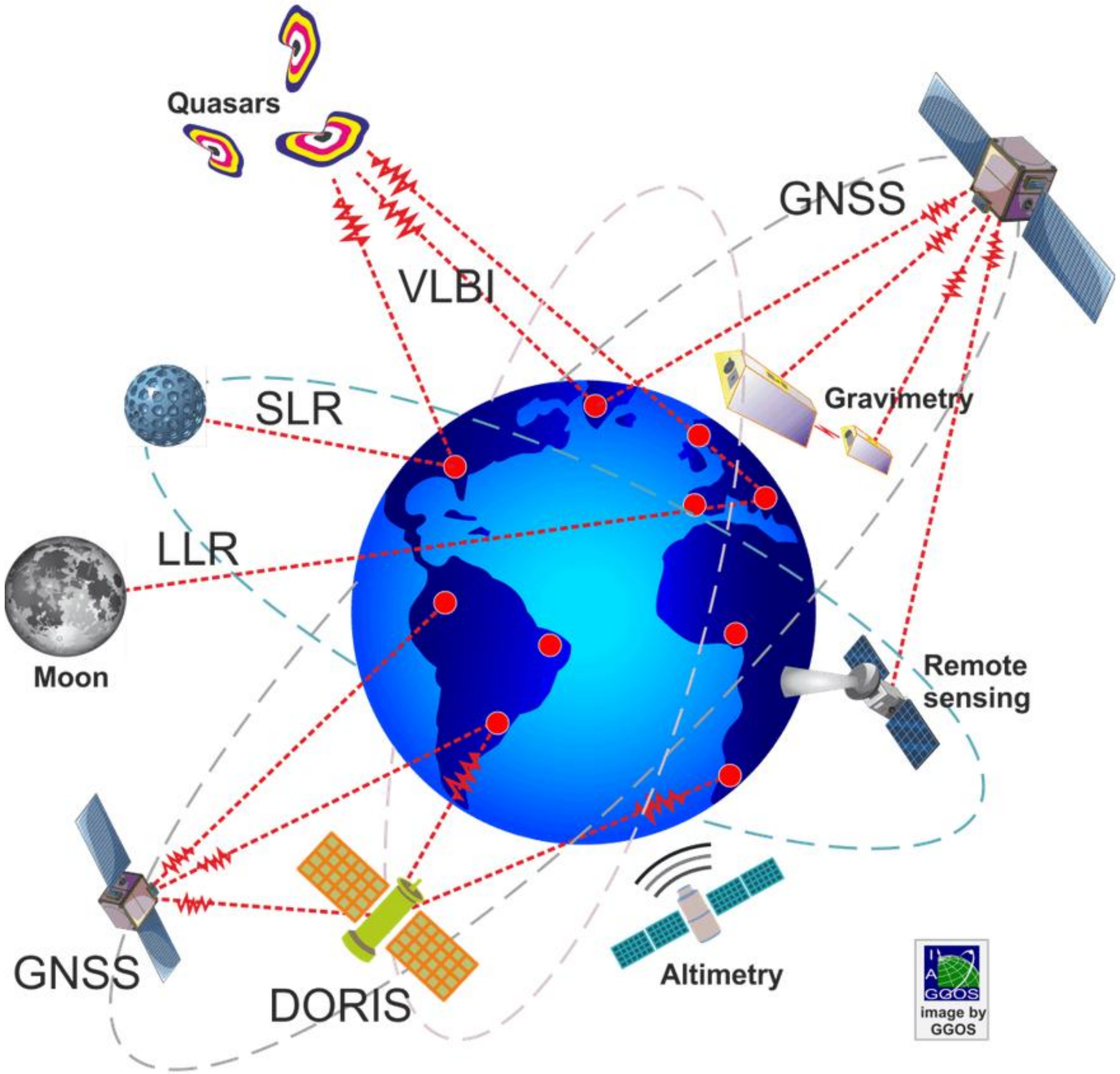
Oblasti primene:

- mogućnost pružanja nezavisne kontrole drugih geodetskih tehnika,
- određivanje apsolutnih geocentričnih koordinata ili komponenata baznih linija,
- određivanje komponenata kretanja pola,
- određivanje parametara Zemljine rotacije,
- određivanje komponenata Zemljinog gravitacionog polja,
- određivanje parametara okeanskih plima i plima Zemljine kore,
- određivanje pomeranja tektonskih ploča,
- određivanje i korekcija satelitskih putanja,
- realizacija koordinatnog početka i razmere terestričkih referentnih sistema,
- određivanja putanje Meseca,
- utvrđivanja ukupne mase sistema Zemlja-Mesec, itd.

Satelitska altimetrija

Satelitska altimetrija (Satellite Altimetry):

- početak merenja – 1970-ih godina,
- postupak Kosmos-Zemlja,
- impulsna metoda merenja dvostrukog rastojanja,
- misija TOPEX/POSEIDON,
- veliki značaj u oblastima:
  - geofizike,
  - okeanografije.



Satelitska altimetrija

Satelitska altimetrija (Satellite Altimetry):

- merena veličina:

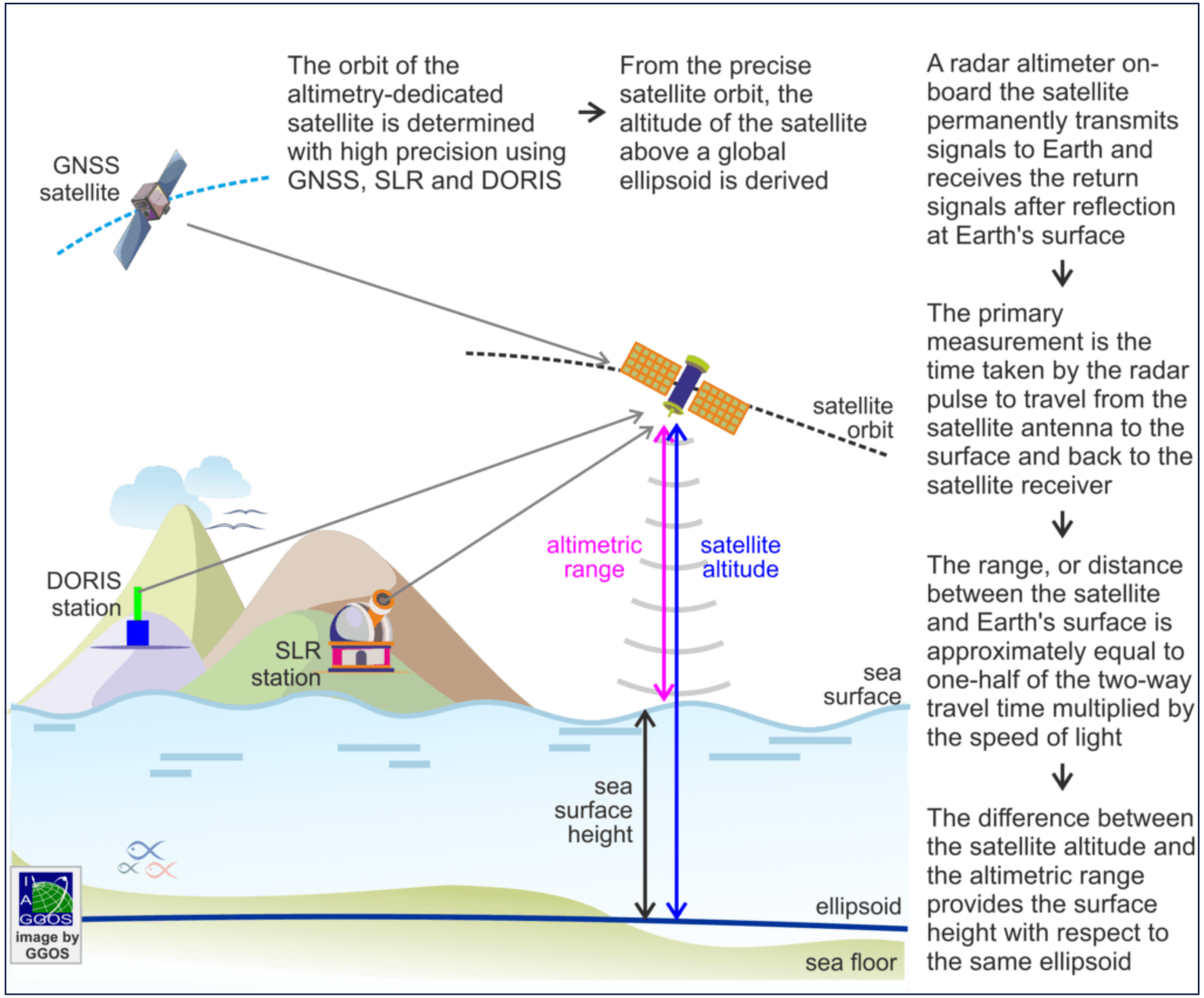
$$a = c_0 \frac{\Delta t}{2}$$

- osnovna jednačina:

$$h = N + H_{sr} + a$$

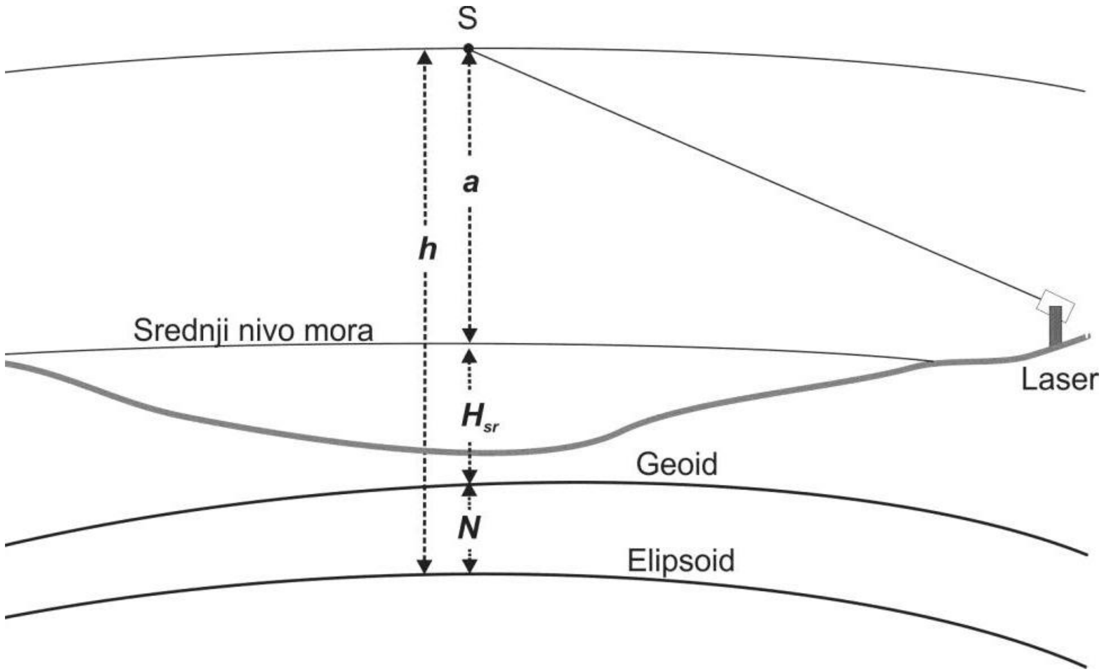
- prečnik stope:

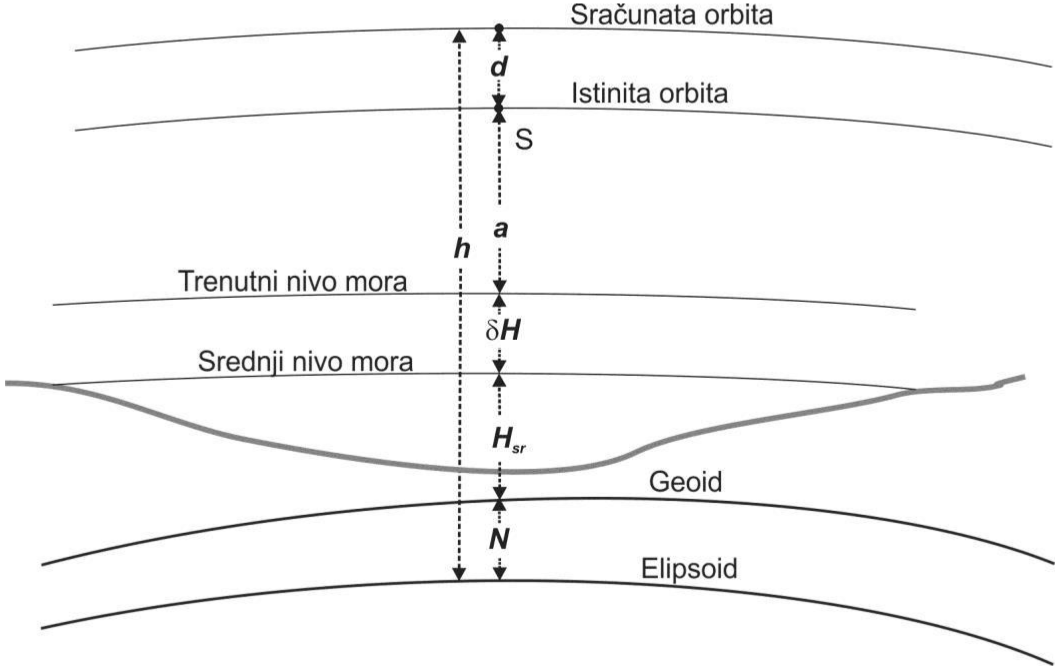
$$R = \sqrt{2c_0\left(\tau + \frac{2h_w}{c_0}\right)h}$$



Satelitska altimetrija

Satelitska altimetrija (Satellite Altimetry):





$$h = N + H_{sr} + a$$

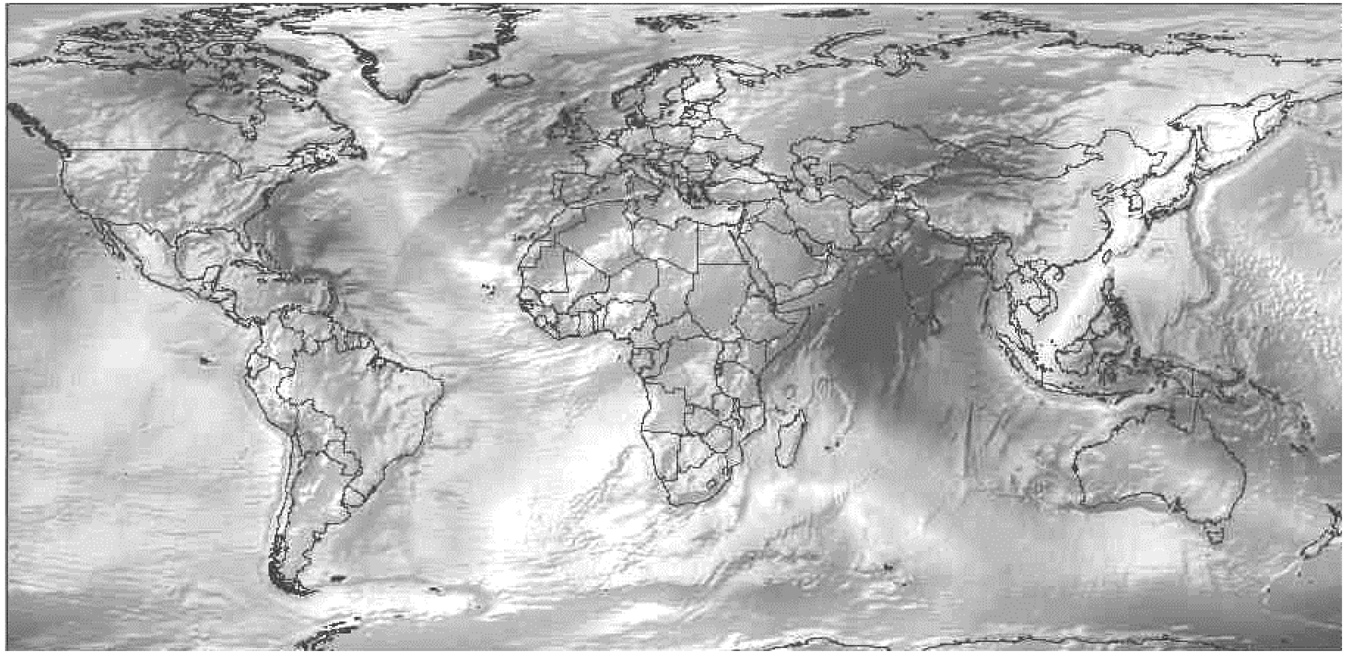
$$h = N + H_{sr} + \delta H + a + d$$

Satelitska altimetrija

TOPEX/POSEIDON:

- NASA-e (National Aeronautics and Space Administration) i CNES-a (France Space Agency),
- satelit lansiran 1992. godine (visina leta 1340 km sa inklinacijom od 66°),
- dva altimetra (13.6 GHz i 5.3 GHz),
- istraživanje okeana,
- tačnost merenja: 2 cm,
- stopa radarskog snopa: 3-5 km.

srednji nivo mora →



Satelitska altimetrija

Oblasti primene (geodezija, geofizika i okeanografija):

- mogućnost istraživanja okeanskih područja,
- određivanje srednjeg nivoa mora,
- određivanje varijacija nivoa mora,
- istraživanje okeanskih plima,
- kontinuirano praćenje varijabilnosti površine okeana,
- mogućnost povezivanja različitih vertikalnih datuma,
- ispitivanja stanja i kretanja vodenih masa, njihove cirkulacije i smerova podvodnih struja,
- praćenje promena debljine i visine ledenih pokrivača, itd.

Satelitsko određivanje gravitacionog polja

Satellite-based gravity field observations.

SATELIT – senzor Zemljinog gravitacionog polja.

Specijalizovane satelitske misije za određivanje Zemljinog gravitacionog polja:

- što niža visina leta satelita (po mogućstvu 200 – 500 km),
- neprekidno 3D praćenje satelita duž što većeg orbitalnog luka,
- razdvajanje gravitacionih i negravitacionih uticaja na kretanje satelita.

Dva osnovna koncepta:

- satelitsko praćenje satelita - merenje rastojanja i promene rastojanja između satelita,
- satelitska gradiometrija - merenje razlika sila privlačenja u samom satelitu.

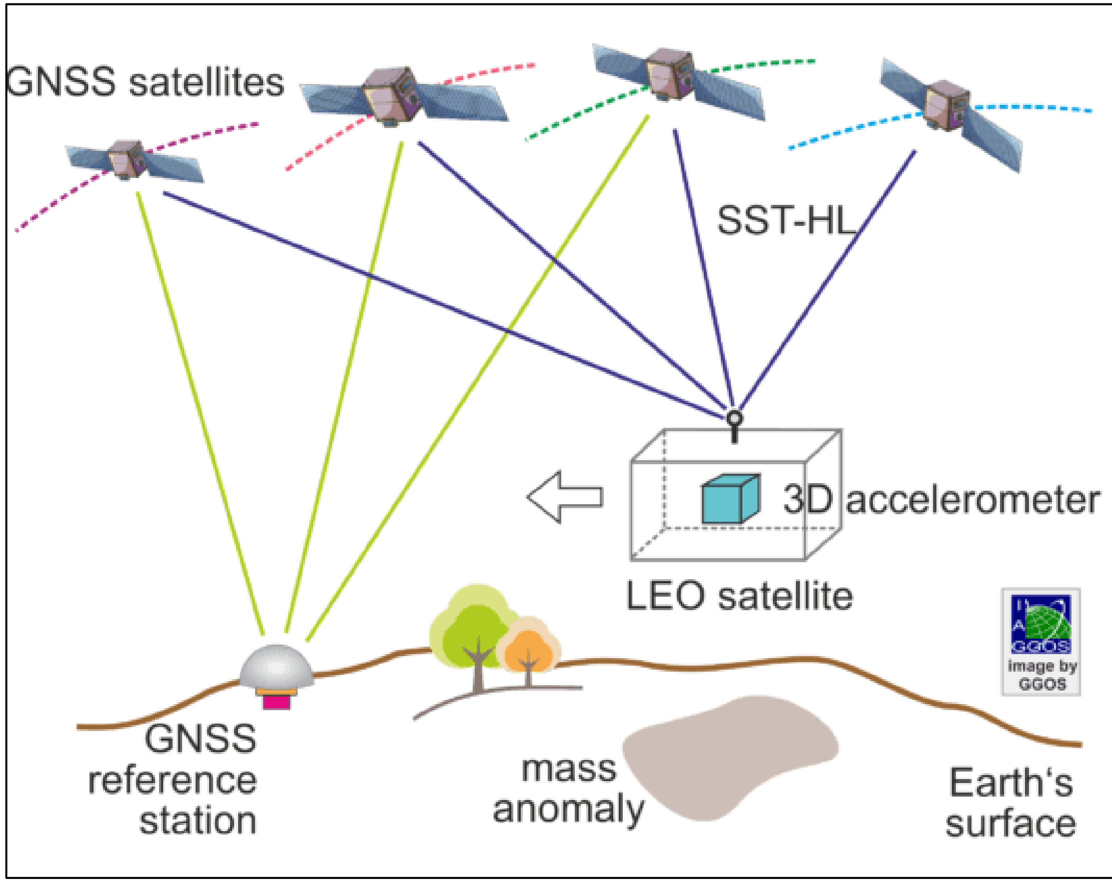
Praćenje satelita

Satelitsko praćenje satelita (Satellite-to-Satellite Tracking – SSL):

- konfiguracija:
  - HL konfiguracija (High-Low) sastoji se od satelita sa velikom visinom leta (geostacionarni sateliti, GPS, GLONASS ili GALILEO), i niskoletećeg satelita (LEO) između kojih se mere promene rastojanja;
  - LL konfiguraciju (Low-Low) čine dva niskoleteća LEO satelita smeštena u istu orbitu, na međusobnom rastojanju od nekoliko stotina kilometara,
- satelit na niskoj orbiti - senzor Zemljinog gravitacionog polja,
- poželjna što niža visina leta satelita.

Praćenje satelita

Satelitsko praćenje satelita (Satellite-to-Satellite Tracking – SSL):

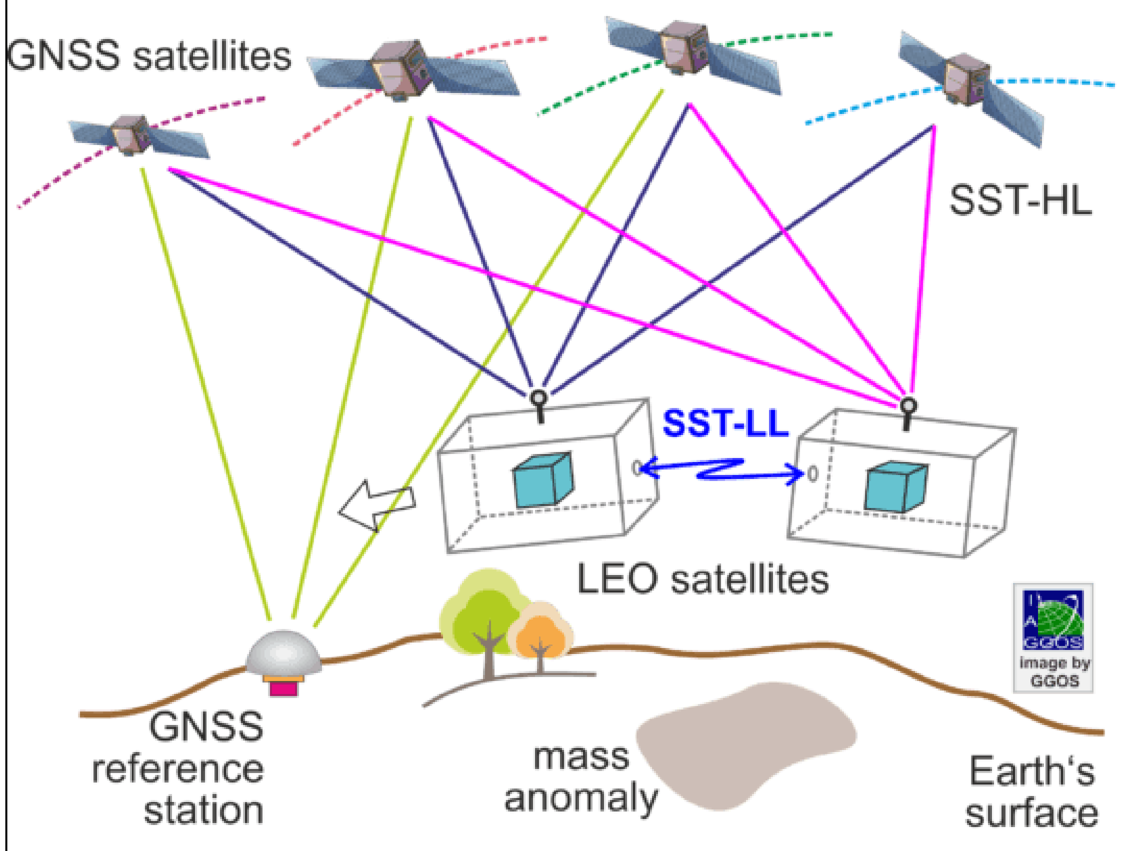


Satellite-to-satellite tracking in the high-low (SST-HL) mode: measurement of accelerations of one low Earth orbiting (LEO) satellite.

The orbit of the satellite is determined using GNSS positioning. The differences with respect to a reference (unperturbed) orbit allow the determination of gravity field at a spatial resolution of 400 km for the static component and about 4,000 km for monthly solutions. The accelerometer records the non-gravitational forces.

Praćenje satelita

Satelitsko praćenje satelita (Satellite-to-Satellite Tracking – SSL):



Satellite-to-satellite tracking in the low-low (SST-LL) mode: measurement of acceleration differences between two low Earth orbiting (LEO) satellites.

The orbits of the two satellites are determined using GNSS. The distance between the two satellites is measured with the highest possible accuracy. The acceleration differences between the two satellites allow the determination of the gravity field with a spatial resolution of about 170 km for the static component and about 300 km for monthly solutions.

Praćenje satelita

Satelitsko praćenje satelita (Satellite-to-Satellite Tracking – SSL):

- vektor $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1$ predstavlja vektor relativnog položaja između satelita S_1 i S_2,
- merena veličina → relativna radijalna brzina (promena dužine r vektora $\vec{\mathbf{r}}$):

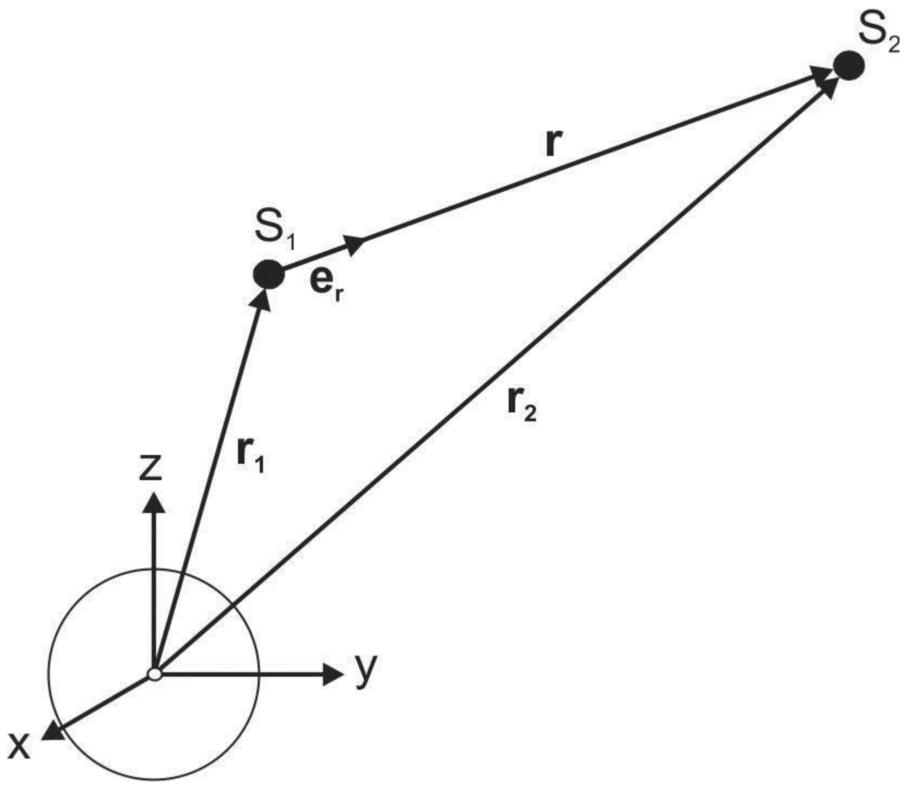
$$\dot{r} = \dot{\vec{\mathbf{r}}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_r = \dot{\vec{\mathbf{r}}} \frac{\vec{\mathbf{r}}}{r}$$

- izvedena veličina (veza između $\ddot{r}$ i $\ddot{\vec{\mathbf{r}}}$):

$$\ddot{r} = \ddot{\vec{\mathbf{r}}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_r + \dot{\vec{\mathbf{r}}} \cdot \dot{\vec{\mathbf{e}}}_r$$

$$= \ddot{\vec{\mathbf{r}}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_r + \dot{\vec{\mathbf{r}}} \frac{\dot{\vec{\mathbf{r}}} - \dot{r}\vec{\mathbf{e}}_r}{r}$$

$$= \ddot{\vec{\mathbf{r}}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_r + \frac{\dot{\vec{\mathbf{r}}}^2 - \dot{r}^2}{r}$$



Praćenje satelita

Satelitsko praćenje satelita (Satellite-to-Satellite Tracking – SSL) u HL konfiguraciji:

- testiranja tokom 60-ih godina,
- specijalizovana satelitska misija CHAMP početkom 21. veka (The Challenging Mini-Satellite Payload for Geophysical Research and Application) pod pokroviteljstvom GFZ (GeoForschungsZentrum) u Potsdamu:
  - CHAMP satelit lansiran 2000. godine,
  - visina leta 450 km, inklinacija 87.3°,
  - snimanje globalnog gravitacionog i magnetnog polja, i profilisanje jonosfere i troposfere.

Praćenje satelita

Satelitsko praćenje satelita (Satellite-to-Satellite Tracking – SSL) u LL konfiguraciji:

- testiranja tokom 70-ih godina,
- specijalizovana satelitska misija GRACE početkom 21. veka (Gravity Recovery and Climate Experiment) pod pokroviteljstvom NASE-e i DLR-a (engl. German Aerospace Center):
  - 2 GRACE satelita lansiran 2002. godine,
  - visina leta 500 km, inklinacija 89°,
  - rastojanje između satelita 220 km,
  - snimanju gravitacionog polja Zemlje i određivanje troposferskih i jonosferskih parametara.

Satelitska gradiometrija

Osnovni koncept satelitske gradiometrije (Satellite Gravity Gradiometry - SGG):

- upotreba posebnog uređaja – gradiometra, koji meri promenu ubrzanja sile privlačenja u prostoru,
- imajući u vidu da je ubrzanje dato prvim izvodima potencijala $V(x, y, z)$ sile Zemljinog privlačenja po koordinatnim osama, gradiometrom se određuju drugi izvodi potencijala:

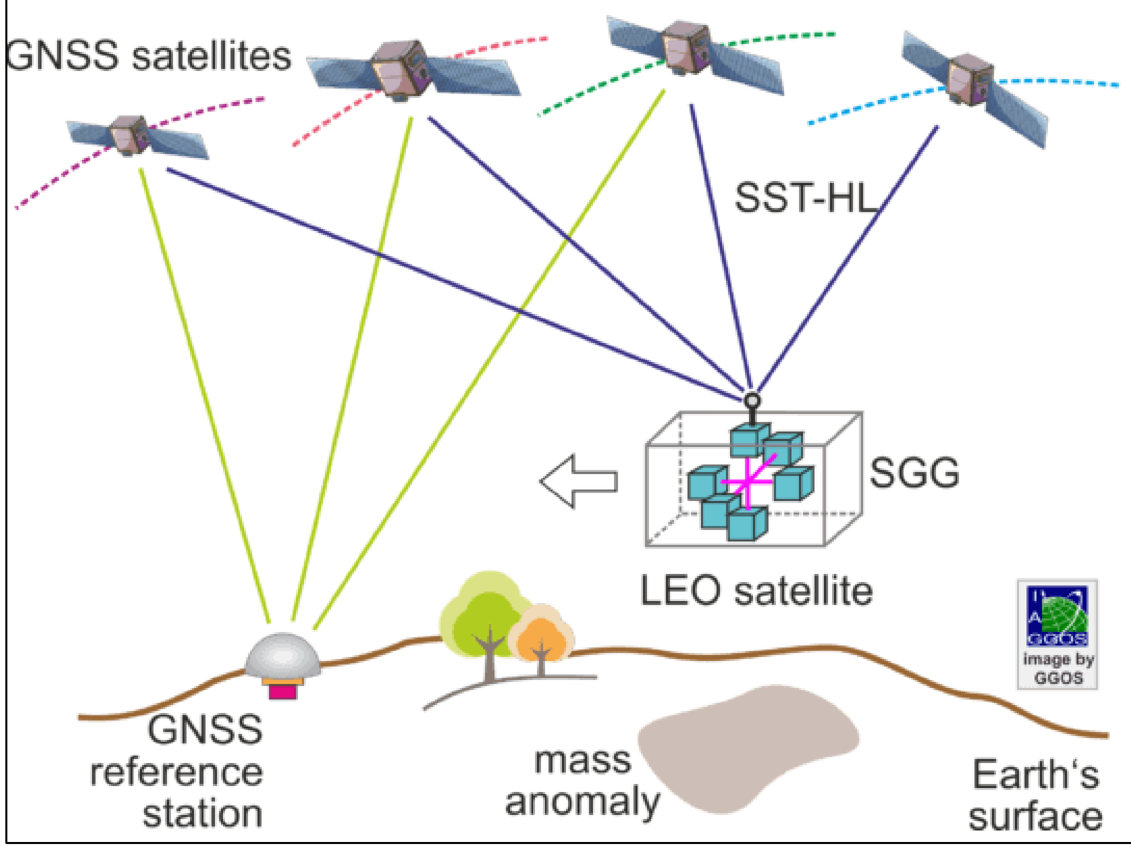
$$V_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial i \partial j}$$

odnosno komponente Etvešovog tenzora:

$$V" = \begin{bmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{yx} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{zx} & V_{zy} & V_{zz} \end{bmatrix}$$

Satelitska gradiometrija

Satelitska gradiometrija (Satellite Gravity Gradiometry - SGG):



Satellite gravity gradiometry (SGG): in-situ measurement of acceleration gradients within one low Earth orbiting (LEO) satellite.

The satellite orbit is determined using GNSS. The gravity gradients are measured in all three components. This differential measurement allows a spatial resolution of 80 - 100 km for the static gravity field.

Satelitska gradiometrija

Satelitska gradiometrija (Satellite Gravity Gradiometry - SGG):

- specijalizovana satelitska misija evropske kosmičke agencije (ESA) 2009. godine:
  - misija GOCE (Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer) je misija zasnovana na tehnici fuzije senzora, odnosno kombinaciji preciznog određivanja orbite uz pomoć GPS satelitskog praćenja u HL konfiguraciji, i satelitske gradiometrije,
  - polarna heliosinhrona orbita sa inklinacijom od 96.7° i visinom leta od 270 km,
  - ciljevi misije: određivanju geoida sa tačnošću od 1 cm, gravitacionih anomalija sa tačnošću od 1 mGal, i postizanju prostorne rezolucije od 70 km.

Naziv predmeta:

SATELITSKA GEODEZIJA

Nivo studija: Osnovne akademske studije
Studijski program: Geodezija
Semestar: V

Predmetni nastavnik:
dr Dušan Petković, mast. inž. geodez.

Građevinski fakultet, Univerzitet u Beogradu
Katedra za geodeziju i geoinformatiku

Školska godina: 2025/2026.