



Универзитет у Београду – Грађевински факултет
www.grf.bg.ac.rs

Студијски програм: **ГЕОДЕЗИЈА И ГЕОИНФОРМАТИКА**

Модул: **ГЕОДЕЗИЈА**

Година/Семестар: **I година / 1 семестар**

Назив предмета (шифра): **Рачун изравнања – напредни курс (M2G1RI)**

Наставник: **Бранко Божић**

Наслов предавања: **ОПШТЕ ЛИНЕАРНЕ ХИПОТЕЗЕ**

Датум :

САДРЖАЈ

- Увод
- Нулта хипотеза и алтернативе
- Тест статистике
- Ниво ризика и критична вредност
- Линеарне хипотезе у ГММ
- Рачунање квадратних форми
- Пример

УВОД

GMM (Concepts of networks and deformation analysis - Caspary, W.F. 2000):

$$l + v = A \cdot \hat{x} \quad , \quad K_l = \sigma_0^2 \cdot Q \quad , \quad P = Q^{-1} \quad (1)$$

Pretpostavka o normalnosti raspodele:

$$l \sim N(Ax, K_l) \quad (2)$$

Pitanja:

1. Da li je vector nepoznatih parametara kompletan ?
2. Da li vector nepoznatih parametara sadrži u sebi komponente koje nisu značajne?
3. Da li parametri zadovoljavaju neke poznate uslove ?

PRIMERI: 1. Opažanja su dužine i zenitni uglovi. Da li su modelovani koeficijent refrakcije i aditivna konstanta? 2. Ukoliko su izvedena merenja u dve epohe i ako je došlo do oštećenja neke od tačaka u mreži, da li je došlo do značajnog pomeranja tačke?

Матрица датумских услова

$$\hat{x} \sim N(x, K_{\hat{x}})$$

$$K_{\hat{x}} = s_0^2 (N + R^T R)^{-1} N (N + R^T R)^{-1} \quad (3)$$

$$v \sim N(0, K_v),$$

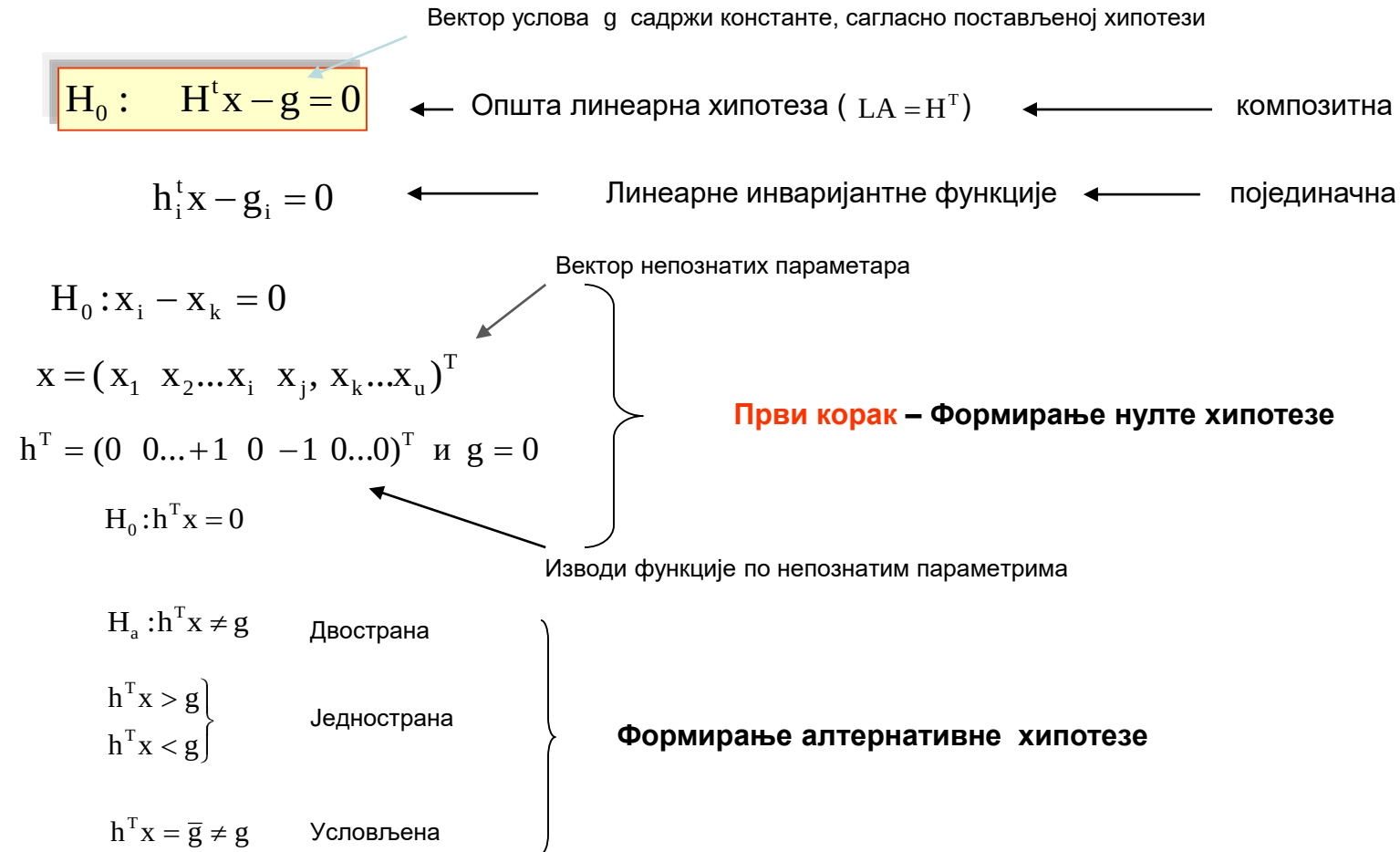
$$K_v = K_l - A K_{\hat{x}} A^t$$

$$l + v = N(Ax, K_{l+v}),$$

$$K_{l+v} = A K_{\hat{x}} A^T$$

(4)

НУЛТА ХИПОТЕЗА И АЛТЕРНАТИВЕ



ТЕСТ СТАТИСТИКЕ

Други корак у процедури тестирања хипотеза јесте **дефинисање тест статистике** као функције реализованих мерења. Тест статистика се бира тако да у случају да је H_0 истинито, особине расподеле су познате.

При тестирању линеарних хипотеза у ГММ, користе се четири основне тест статистике:

$$\textcircled{1} \quad T_1 = (y_i - \eta_i) / \sigma_{y_i} \sim N(0,1) \quad (5) \quad y \sim N(\eta, K_y) \text{ i } z \sim N(\xi, K_\xi)$$

$$\textcircled{2} \quad T_2 = (y_i - \eta_i) / s_{y_i} \sim t_{\alpha, f_y} \quad (6)$$

$$\textcircled{3} \quad T_3 = (y - \eta)^T K_y^{-1} (y - \eta) \sim \chi_{\alpha, f_y}^2 \quad (7)$$

$$\textcircled{4} \quad T_4 = \frac{(y - \eta)^T K_y^{-1} (y - \eta) / f_y}{(z - \xi)^T K_z^{-1} (z - \xi) / f_z} \sim F(f_y, f_z) \quad (8)$$

$$\text{са } f_y = r(K_y) \text{ i } f_z = r(K_z)$$

НИВО РИЗИКА И КРИТИЧНА ВРЕДНОСТ

Трећи корак - избор нивоа ризика

Избор је потпуно слободан.

Не постоји добар и лош ниво ризика, тј. нема неког јасног правила који би се лако могао применити.

Типичне вредности за α су : $\alpha = 10\%$, $\alpha = 5\%$, $\alpha = 1\%$ и $\alpha = 0,1\%$, али и било која друга вредност у овом распону неби била погрешна.

Четврти корак - одређивање критичне вредности тест статистике

Одређује се из таблица или графова расподела тест статистике.

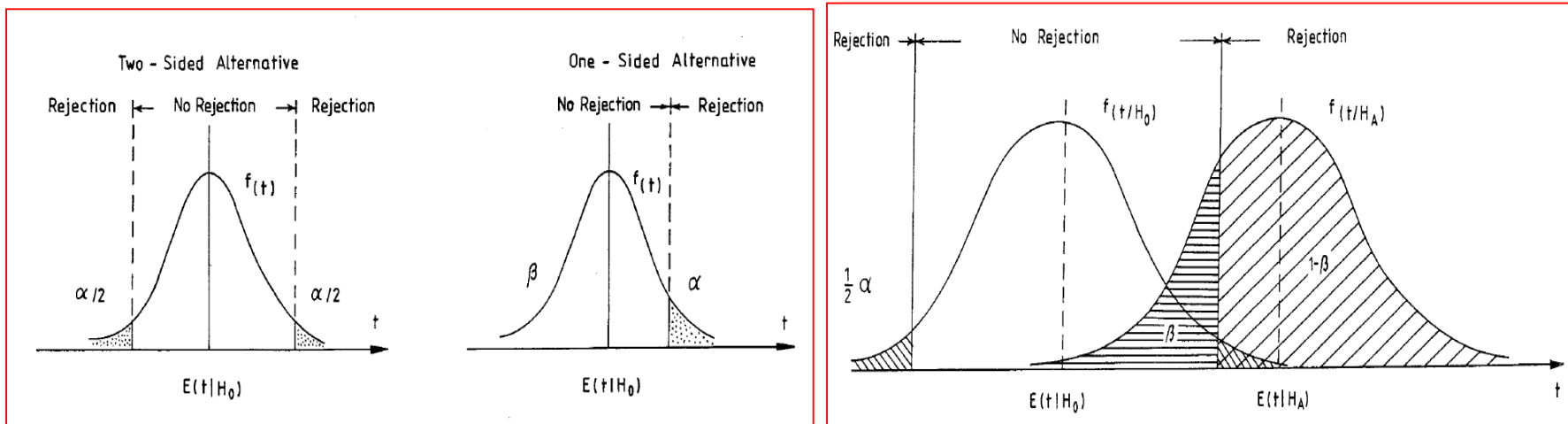
Треба обратити пажњу да ли се ради о **једностраном** или **двостраном** тесту.

Упоредјујући критичну вредност са срачунатом вредношћу статистике врши се **одбацавање** или **прихватање** нулте хипотезе.

Грешка прве врсте - α

Грешка друге врсте - β .

Износ вероватноће зависи од **функције густине**, **нивоа ризика** и **алтернативне хипотезе**.



ЛИНЕАРНЕ ХИПОТЕЗЕ У ГММ

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{l} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \varepsilon, \quad \mathbf{K} = \sigma_0^2 \cdot \mathbf{Q} \\ \\ \mathbf{g} = \mathbf{H}^T \mathbf{x} \\ \text{Након оцено од } \mathbf{x} \\ \mathbf{H}^T \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{g}} \\ \text{појавиће се разлика од } \mathbf{g} \text{ у ознаци } \mathbf{w} \\ \mathbf{w} = \mathbf{H}^T \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{g} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Линеарна хипотеза је део ГММ} \\ \\ \text{Уколико је } E(\mathbf{w})=0, \text{ нема основа за одбацавање } H_0 \end{array}$$

За: $H_0 : \mathbf{h}^T \mathbf{x} - \mathbf{g} = 0$ одговарајућа тест статистика се рачуна из оцено $\hat{\mathbf{g}} = \mathbf{h}^T \hat{\mathbf{x}}$ са $\hat{\mathbf{g}} \sim N(\mathbf{g}, \sigma_{\hat{\mathbf{g}}}^2), \sigma_{\hat{\mathbf{g}}}^2 = \mathbf{h}^T \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{h}$

Могућа су два случаја:

А) Позната вредност σ :

$$T = \frac{(\hat{\mathbf{g}} - \mathbf{g})}{\sigma_{\hat{\mathbf{g}}}} \sim N(0,1)$$

Тест статистика

Б) Непозната вредност σ :

$$T = \frac{(\hat{\mathbf{g}} - \mathbf{g})}{s_{\hat{\mathbf{g}}}}, \quad s_{\hat{\mathbf{g}}}^2 = s_0^2 \mathbf{h}^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{h}$$

$T \sim t(n - r(A))$

Уколико се користе композитне хипотезе:

$$\hat{\mathbf{g}} = \mathbf{H}^T \hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{g}}} = \mathbf{H}^T \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{H}$$

$$T = \frac{q_{\Delta}/m}{q/f} \sim F_{\alpha, m, f}$$

или

$$T = \frac{q_{\Delta}}{\sigma_0^2} \sim \chi_{\alpha, m}^2$$

$$P(T > F_{\alpha}(m, f) | H_0) = \alpha$$

$$P(T > \chi^2(m) | H_0) = \alpha$$

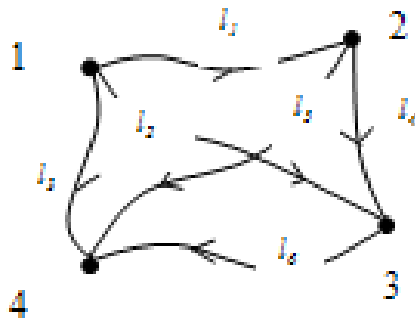
$$q_{\Delta} = (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})^T \mathbf{H} (\mathbf{H}^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})$$

или

$$q_{\Delta} = (\mathbf{g} - \mathbf{H}^T \hat{\mathbf{x}})^T (\mathbf{H}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{H})^{-1} (\mathbf{g} - \mathbf{H}^T \hat{\mathbf{x}})$$

ПРИМЕР 1 – Caspary, 2000

У датој нивелманској мрежи користећи решење засновано на конвенционалном датуму који дефинише тачка 1, (верзија под а) демонстрираће се два различита теста (под А и Б).



$$\begin{aligned} l_1 &= 1.2 \text{ mm} \\ l_2 &= 1.6 \text{ mm} \\ l_3 &= 1.7 \text{ mm} \\ l_4 &= 1.2 \text{ mm} \\ l_5 &= 2.1 \text{ mm} \\ l_6 &= 1.3 \text{ mm} \end{aligned}$$

А) Нулта хипотеза тврди да тачке 1 и 4 имају исте висине.

$$H_0 : x_1 = x_4 \Rightarrow x_1 - x_4 = 0$$

$$h^T x = 0 \Rightarrow h^T = (1 \ 0 \ 0 \ -1); \ g = 0$$

$$H_a : h^T x \neq 0 \Rightarrow \text{dvostrani test}$$

$$\hat{g} = h^T \hat{x} = -2.4 \text{ mm}$$

$$s_0^2 = 0.4 \text{ mm}^2$$

$$s_{\hat{g}}^2 = s_0^2 h^T Q_{\hat{x}} h = 0.4(2/4) = 0.2; \ s_{\hat{g}} = \sqrt{0.2}$$

$$T = \frac{(\hat{g} - g)}{s_{\hat{g}}} = -\frac{2.4}{0.45} = -5.37$$

$\alpha = 10\%$	$t_{\alpha}(3) = \pm 2.35$
$\alpha = 5\%$	$t_{\alpha}(3) = \pm 3.18$
$\alpha = 1\%$	$t_{\alpha}(3) = \pm 5.84$

Б) Нулта хипотеза тврди да све тачке имају исте висине.

$$H_0 : H^T x = 0 \Rightarrow g = 0$$

$$H_a : H^T x \neq 0$$

$$H^T = \begin{bmatrix} -1 & +1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & +1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \quad H^T N^{-1} H = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} +2 & +1 & +1 \\ +1 & +2 & +1 \\ +1 & +1 & +2 \end{bmatrix}$$

$$(H^T N^{-1} H)^{-1} = \begin{bmatrix} +3 & -1 & -1 \\ -1 & +3 & -1 \\ -1 & -1 & +3 \end{bmatrix}$$

$$q_4 = 13.23 \quad T = \frac{13.23}{1.2} = 11.025$$

$\alpha = 10\%$	$F_{\alpha}(3,3) = 5.39$
$\alpha = 5\%$	$F_{\alpha}(3,3) = 9.28$
$\alpha = 1\%$	$F_{\alpha}(3,3) = 28.46$

ПРИМЕР 2

У деформационој анализи, често се сусрећемо са тестирањем хипотеза. Посматрајмо две епохе опажања једне мреже за осматрање објекта за које ћемо претпоставити да су изравнате као слободне, у обе епохе ($i=1,2$) :

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_i + \mathbf{v}_i &= \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{x}_i, \quad \Sigma_i = \sigma_0^2 \cdot \mathbf{Q}_i, \quad \mathbf{P}_i = \mathbf{Q}_i^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_i &= \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_i} \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{l}_i, \quad \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}_i} = s_{o_i}^2 \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_i} \\ s_{o_i}^2 &= \frac{\mathbf{v}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{v}_i}{f_i}, \quad f_i = n_i - r(\mathbf{A}_i) \end{aligned}$$

$$\text{са: } H_0 : \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 \Rightarrow \mathbf{H}^T \mathbf{x} = \mathbf{g}$$

$$\mathbf{H}^T = (\mathbf{I} : -\mathbf{I}); \quad \mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)^T, \quad \mathbf{g} = 0$$

Да би срачунали тест статистику неопходно је оциенили заједничку варијансу $s_0^2 = q/f$ и заједничку кофакторску матрицу $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$. Уколико је у обе епохе коришћена иста *априори* варијанса σ_0^2 и ако је коришћен исти геодетски датум заједничка варијанса и кофакторска матрица се рачунају као:

$$s_{o_i}^2 = \frac{\mathbf{v}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{v}_2}{f_1 + f_2} = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{f}$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_1} & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_2} \end{bmatrix}$$

Рачунање
квaдратне форме

$$\begin{aligned} q_{\Delta} &= (\hat{\mathbf{x}}_1 - \hat{\mathbf{x}}_2)^T [(\mathbf{I} : -\mathbf{I})^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} (\mathbf{I} : -\mathbf{I})]^{-1} (\hat{\mathbf{x}}_1 - \hat{\mathbf{x}}_2) \\ q_{\Delta} &= (\hat{\mathbf{x}}_1 - \hat{\mathbf{x}}_2)^T (\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_1} + \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_2})^{-1} (\hat{\mathbf{x}}_1 - \hat{\mathbf{x}}_2) \end{aligned}$$

Под претпоставком да
важи H_0 , тест статистика T
има Фишеров распоред са
 m и f степени слободe.

$$T = \frac{q_{\Delta}/m}{s_o^2} \sim F_{\alpha, m, f}$$

$$m = r(\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_1} + \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_2}) \quad f = f_1 + f_2$$