Univerzitet u Beogradu – Građevinski fakultet
www.grf.bg.ac.rs

Studijski program: Osnovne studije Geodezija,
Osnovne studijeGeoinformatika

Godina/Semestar: I godina / I semestar

Naziv predmeta (šifra): Tehnička fizika 1 (b3g1f1, b3i1f1)

Nastavnik: Ljiljana Brajović

Naslov predavanja: Talasno kretanje , prvi deo

Datum : 5.11.2021.

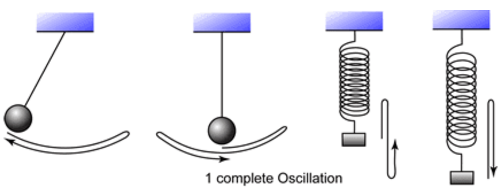
Beograd, 2021.

5. Talasno kretanje

5.1 Talasno kretanje

Proces prostiranja oscilacija kroz prostor se naziva talas.

Oscilacija predstavlja promenu neke veličine koja se na isti način ponavlja posle nekog odredjenog vremenskog perioda.



Oscilacije najčešće povezujemo sa oscilatornim kretanjem čestica ili tela , tj. kretanjem koje se priodično ponavlja i telo se posle odredjenog vremena vraća u prvobitni položaj i zatim ponavlja svoje kretanje. Primeri tog kretanja su oscilovanje klatna , istezanje i sabijanja opruge vibriranje nekog tela, okretanje točka oko svoje ose i sl .

Medjutim, veličina koja se peridično ponavlja ne mora samo da bude vezana za kretanje tela, već postoje oscilacije temperature, pritiska, intenziteta struje, električnog i magnetskog polja i sl.

Oscilacije prosečne temperature Zemljie površine usled oscilovanja površinske temperature okeana

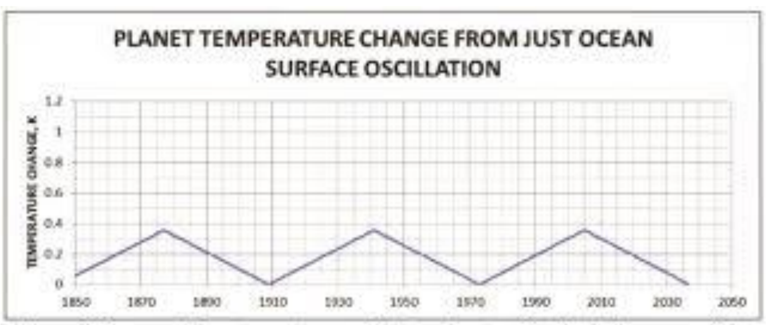


Figure 3: Ocean surface temperature oscillations do not affect the bulk energy of the planet.

Ako se ta oscilacija koja se javlja u nekoj tački prostora i u nekom trenutku, prenosi na druge tačke prostora tada govorimo o prenošenju oscilacija kroz prostor, odnosno o talasu.

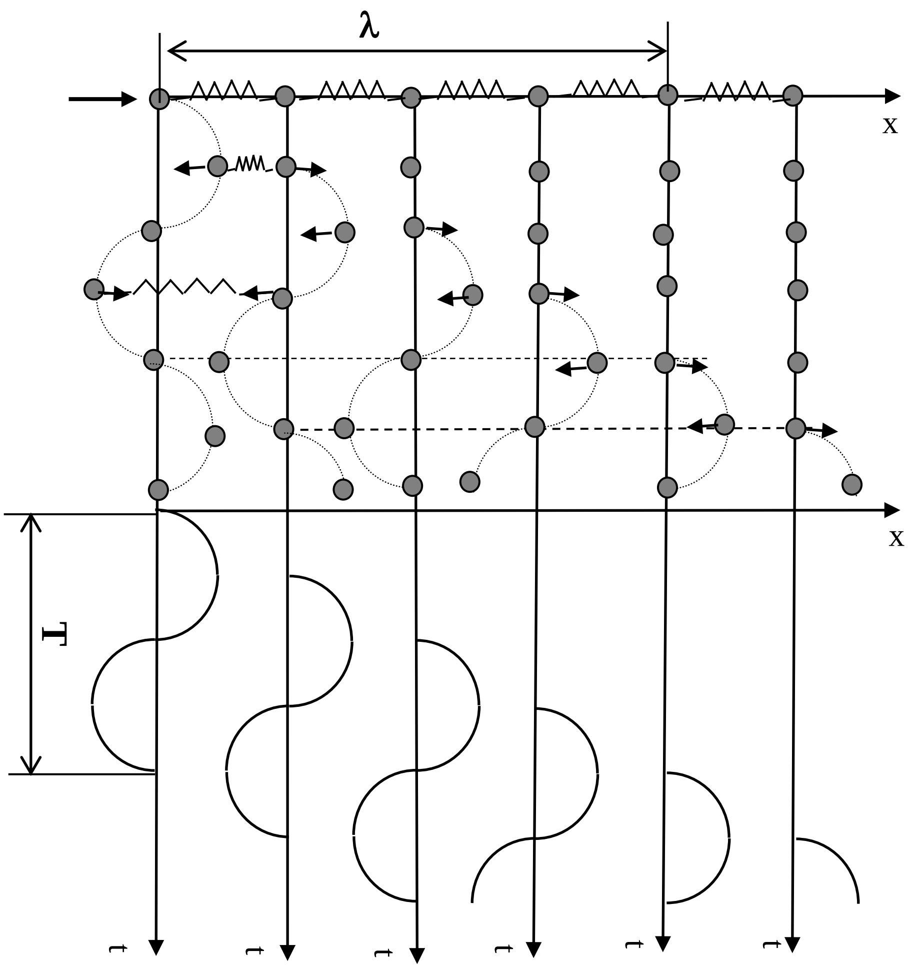
Talasi za čije je prostiranje potrebna materijalna sredina nazivaju se **mehanički talasi**, i primer ovakvih talasa su zvučni talasi ili zvuk.

Da bi došlo do prenošenja oscilacija kroz materijalnu sredinu potrebno je da postoje elastične i inercijalne sile.

Inercijalne sile su sile koje deluju na telo kada ono prelazi iz stanja mirovanja ili ravnomernog pravolinijskog kretanja u stanje ubrzanog ili usporenog kretanja i one teže da spreče promenu stanja kretanja (tj. promenu brzine).


kretanje autobusa iz mirovanja

naglo kočenje autobusa



Radi proučavanja prostiranja talasa u materijalnoj sredini posmatraćemo niz čestica na konstantnom rastojanju koje miruju pre nailaska talasa. Čestice možemo da zamislimo da su povezane malim oprugama kao na slici 1. Kada prva čestica počne da osciluje, pod dejstvom neke spoljašnje sile, ona se približava sledećoj i izmedju njih se javljaju odbojne elastične sile. Pod dejstvom tih sila prva čestica se vraća u prvobitni položaj, a druga počinje kretanje iz ravnotežnog položaja. Prva čestica se ne zaustavlja u ravnotežnom položaju već zbog inercije prolazi i odaljuje se od

ravnotežnog položaja na drugu stranu. Tada se izmedju udaljene prve i druge čestica javljaju privlačne elastične sile i one ih vraćaju ka ravnotežnom položaju. Kada se druga čestica posle početka kretanja približila trećoj izmedju njih su se javile obojne elastične sile, pa je tako druga čestica krenula ka ravnotežnom položaju, a treća čestica je započela oscilovanje. Proces se nastavlja pobudjivanjem sledeće čestice. Na vertikalnim osama prikazana je vremenska zavisnost rastojanja svake čestice od ravnotežnog položaja. Uočava se da se sve čestice osciluju na isti način, ali sa malim vremenskim zakašnjenjem jedna u odnosu na drugu.
U toku prenošenja oscilacija sa čestice na česticu svaka čestica osciluje oko svog ravnotežnog položaja.

Rastojanje oscilujuće čestice od ravnotežnog položaja naziva se elongacija i obležava se sa *Ψ*.

Elongacija zavisi od trenutka t i od položaja čestice duž x-ose, za slučaj prikazan na slici 1. Ako se talas ne kreće samo duž x- ose već u opštem slučaju u prostoru tada elongacija zavisi od vremena t i od položaja čestice odredjenog prostornim koodinatama (naprimer x, y i z ili drugim), pa se može napisati **da je u opštem slučaju elongacija funkcija tri prostorne koordinate i vremena, tj.** $\Psi = f(x, y, z, t)$. Ako se talas kreće u jednom pravcu tada je on funkcija jedne koordinate i vremena, na primer, $\Psi = f(x, t)$.

Pored elongacije, definišu se još neke karakteristične veličine talasa , period,frekvencija talasna dužina, brzina talasa i faza talasa.

Period talasa je vreme za koje oscilujuća čestica izvrši jednu punu oscilaciju i period talasa se obeležava sa T.

Na slici 1 je na vremenskoj osi prikazan vremenski interval od jednog perioda. Jedinica za period je sekunda, s.

Frekvenija ili učestanost predstavlja broj oscilacija u jedinici vremena.

Obeležava se sa *f* ili ν i njena jedinica je Hz. Frekvencija je jednaka recipročnoj vrednosti perioda T tj.

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{ili} \quad \nu = \frac{1}{T} \tag{1}$$

Ako se posmatraju čestice na slici 1, one započinju oscilovanje sa zakašnjenjem jedna u odnosu, odnosno sa sve većim zakašnjenjem u odnosu na prvu, tako da na jednom mestu čestica počinje da osciluje baš u trenutku kada i prva započinje novu oscilaciju (na slici 1 to je peta čestica. Tako da prva i peta čestica u isto vreme kreću iz ravnotežnog položaja, dostižu maksimalno rastojanje, vraćaju se u ravnotežni položaj i sl, tj. kažemo da osciluju u fazi. Na isti način se prema slici 1 ponašaju i druga i šesta čestica.

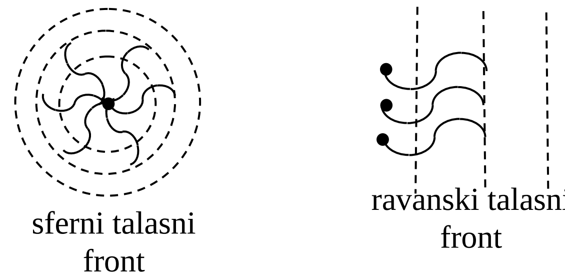
Rastojanje izmedju dve najbliže čestice koje osciluju u fazi naziva se talasna dužina i obeležava sa λ i jedinica za talasnu dužinu je metar, m.

Talasna dužina λ je obeležena na x-osi na slici 1.

Kada se posmatra prostiranje talasa u prostoru u svakom trenutku postoje čestice koje su zahvaćne talasom i one koje nisu.

Talasni front je geometrijsko mesto tačaka u prostoru koje razdvajaju prostor na dva dela, onaj koji je zahvaćen talasnim procesom i onaj koji nije zahvaćen talasnim procesom.

Talasni frontovi mogu biti različitog oblika , a najjednostavniji su sferni i ravanski (slika 2).



Slika 2.

Brzina prostiranja talasnog fronta je **brzina prostiranja talasa** i obeležava se sa ***c*** i njena jedinica je m/s.

Ako posmtramo oscilovanje na slici 1, očigledno je da talas predje put od jedne talasne dužine λ za vreme od jednog perioda talasa T. Na osnovu ovoga se može izraziti veza koja postoji između talasne dužine, perioda i brzine talasa kao

$$\lambda = c \cdot T \quad \text{ili} \quad c = \frac{\lambda}{T} \qquad (2)$$

Brzina talasa se naziva i fazna brzina jer čestice na rastojanju λ osciluju u fazi i ako bi posmatrač koji se kreće duž talasa u svakom trenutku bio pored čestice koja je na primer na maksimalnom rastojanju od ravnotežnog položaja, tada bi posmatrač morao da se kreće upravo brzinom talasa, a kako je to brzina kojom čestice postižu istu fazu oscilovanja ona se zove i fazna brzina.

Postoji više podela talasa

Prva podela je na :

a) mehaničke b) elektromagnetske c) materijalne

Mehaničke talase prenose čestice neke sredine koja je ili u čvrstom ili tečnom ili gasovitom stanju, pri čemu te čestice osciluju oko svog ravnotežnog položaja. Primeri ovakvih talasa su: zvuk, talasi na vodi, trusni talasi, talasi u zategnutoj žici i slično.

Elektromagnetski talasi predstavljaju prenošenje oscilacija električnog i magnetskog polja ili kroz neku sredinu preko naelekrisanih čestica ili kroz vakuum.U ovu vrstu talasa spadaju svetlost, radio talasi, x-zraci, χ-zraci i sl.

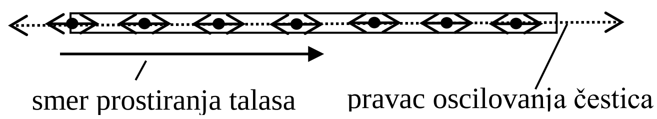
Materijalne talase pridružujemo subatomskim česticama da bi opisali njihovo ponašanje.

Prema **drugoj podeli koja se vrši na osnovu pravca prostiranja talasa** oni se dele na
a) **linijske** ili jednodimenzione , (primer zategnuta žica)
b) **površinske** ili dvodimenzione ,(primer talasi na vodi)
c) **zapreminske** ili trodimenzione (zvučni talasi u tečnim i gasovitim telima).

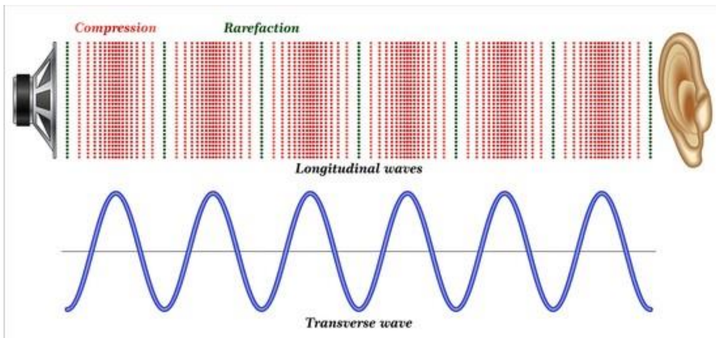
Treća podela se vrši prema odnosu pravca prostiranja talasa i pravca oscilovanja čestica sredine ili veličine koja osciluje i talasi se dela na:

a) **longitudinalne**, i b) transverzalne.

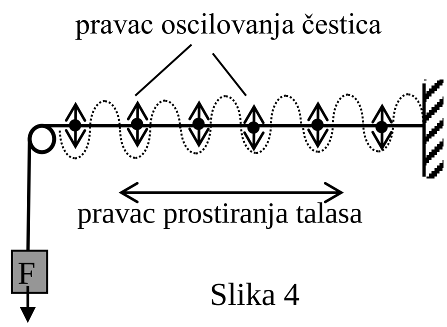
Kod **longitudinalnih talasa** (slika3) oscilovanje neke veličine ili čestica sredine se vrši u pravcu prostiranja talasa.Primer ovakvih talasa je prostiranje zvuka u gasovitoj sredini, širenje i skupljanje opruge , postiranje talasa duž šipke i slično.



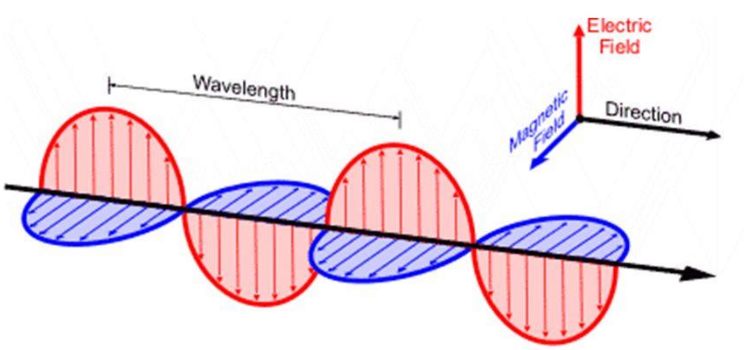
Slika3



Kod transverzalnih talasa (slika 4) pravac ocilovanja čestica materijalne sredine ili neke druge veličine koja osciluje je normalan na pravac prostiranja talasa. Primeri ovih talasa su elektromagntski talasi, talasi dobijni okidanjem zategnute žice i sl.

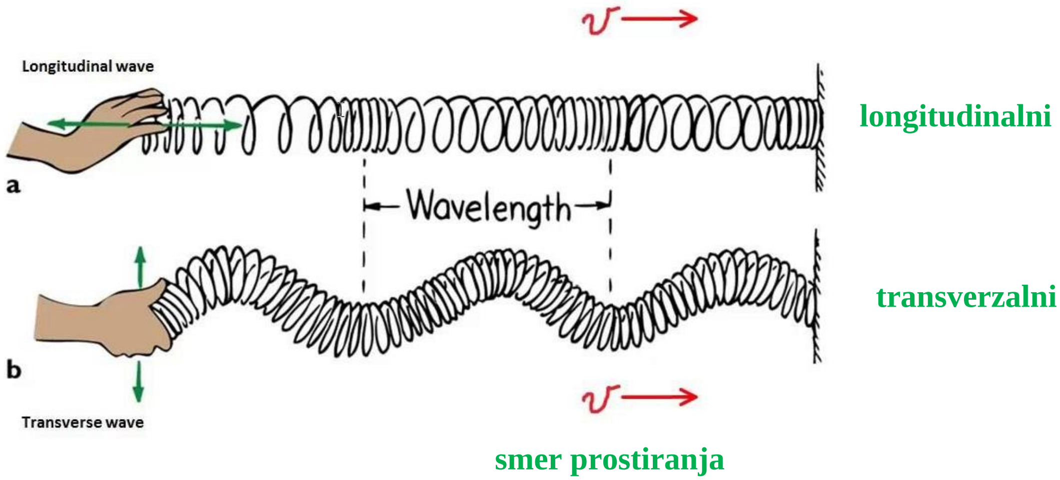


Slika 4



Elektromagnetski talas

Mehanički longitudinalni talasi mogu da se prostiru u svim sredinama, dok transverzalni mehanički talasi ne mogu da se prostiru u gasovitim sredinama jer ne postoje poprečne elastične sile.



2.2 Jednačina talasa i jednačina harmonijskog talasa

Jednačina talasa predstavlja izraz koji daje zavisnost rastojanja oscilujuće čestice od ravnotežnog tj. elongacije, od vremena i od prostornih koordinata.

Tako za trodimenzioni talas jednačina talasa je $\Psi=f(x, y,z,t)$, a kod jednodimenzionog talasa $\Psi=f(x,t)$.

Ova jednačina mora biti periodična i u odnosu na vreme i u odnosu na koordinatu ili koordinate.

Njena periodičnost u vremenu je posledica oscilatornog kretanja čestice, a periodičnost u prostoru potiče od činjenice da čestice koje su na rastojanju λ jedna od druge osciluju na isti način tj. u fazi.

Naći ćemo sada jednačinu ravanskog (jednodimenzionog) talasa koji se kreće u pozitivom smeru x-ose, i čija elongacija ima sinusnu ili kosinusnu zavisnost od vremena.

Oscilacije koje se mogu predstaviti sinusnom ili kosinusnom zavisnošću od vremena nazivamo harmonijskim oscilacjama, prenošenje takvih oscilacija kroz prostor predstavlja harmonijski talas.

Ako posmatramo **oscilovanje čestice na mestu x=0**, ono se može predstaviti izrazom

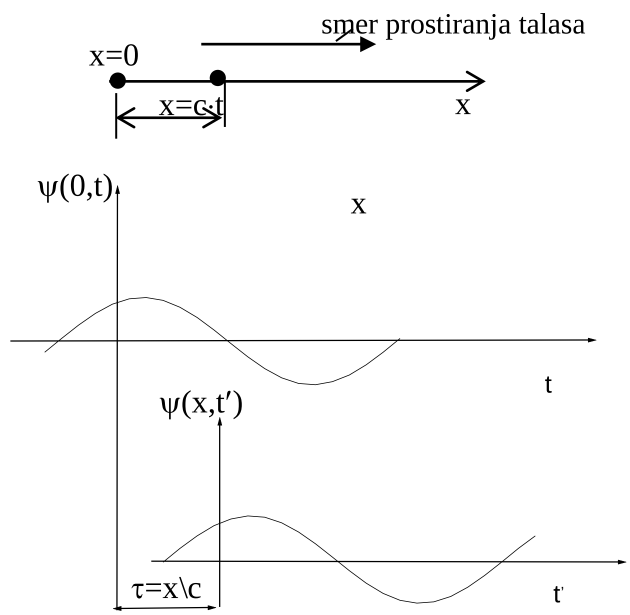
$$\Psi(0,t) = \Psi_0 \sin(\omega t + \alpha) \qquad (3)$$

gde je $\omega = 2\pi f$, kružna učestanost ili kružna frekvencija i ona se odredjuje na osnovu frekvencije oscilovanja.

Oscilovanje čestice pogodjene istim talasom na nekom mestu x se može u odnosu na vreme t′ proteklo od početka oscilovanja te čestice predstaviti u obliku

$$\Psi(x,t') = \Psi_0 \sin(\omega t' + \alpha) \qquad (4)$$

Ove čestice su prikazane na slici 5. Na slici 5 je prikazan medjusobni položaj čestica kao i vremenska zavisnost elongacije obe čestice. Kako je do početka oscilovanja čestice na mestu x došlo posle proteklog vremena $\tau = \frac{x}{c}$ u odnosu na početak oscilovanja čestice u x=0 vreme t i t′ su povezani na sledeći način,



Slika5

$$t = t' + \frac{x}{c}, \quad \text{odnosno}, \quad t' = t - \frac{x}{c}.$$

Ako se t′ napiše preko t u izrazu (4) dobija se izraz za eloncaciju talasa na mestu x, i u nekom trenutku t kao

$$\Psi(x,t) = \Psi_0 \sin(\omega(t - \frac{x}{c}) + \alpha) = \Psi_0 \sin(\omega t - \frac{2\pi f x}{c} + \alpha) = \Psi_0 \sin(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x + \alpha) \qquad (5)$$

$$\Psi_0 \sin(\omega t - kx + \alpha) = \Psi_0 \sin\varphi \qquad (6)$$

I izrazi (5) i (6) predstavlja jednačinu harmonijskog jednodimenzionog talasa. Ove jednačine se mogu napisati i u sledećem obliku

$$\Psi(x,t)=\Psi_0\sin(\omega(t-\frac{x}{c})+\alpha)=\Psi_0\sin\left[\omega\left(t-\frac{2\pi fx}{\omega c}\right)+\alpha\right)= \tag{7}$$

$$\Psi_0\sin\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)+\alpha\right]=\Psi_0\sin\varphi \tag{8}$$

U jednačini harmonijskog talasa datoj izrazima (6) i (8)

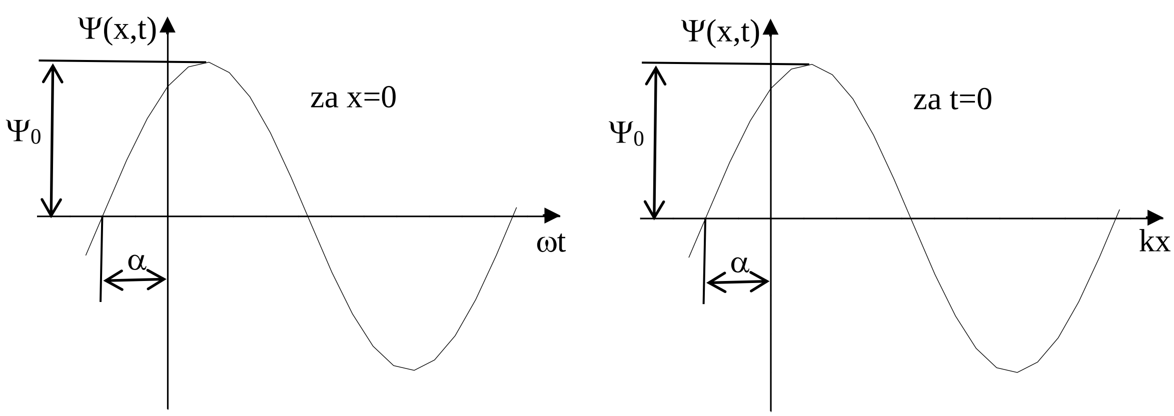
- ***Ψ* je elongacija** ili rastojanje čestice od ravnotežnog položaja
- ***Ψ*0 je amplituda** ili najveće rastojanje čestice od ravnotežnog položaja
- $\omega=2\pi f$ **, je kružna učestanost** i predstavlja promenu faze talasa u jedinici vremena i njena jedinica je rad/s
- ***f*** **je frekvencija talasa** i njena jeinica je Hz.
- $k=\frac{2\pi}{\lambda}$**, je talasni broj** i predstavlja promenu faze talasa po jedinici dužine i njegova jedinica je rad/m.
- **λ je talasna dužina talasa** i njena jedinica je m.
- **c je brzina talasa**
- **veličina** $\varphi=\omega t-kx+\alpha$ **je faza talasa** i ona predstavlja argument funkcije u jednačini talasa.

Ona se izražava u radijanima i u opštem slučaju ima tri člana:

ωt je vremenski deo faze talasa

kx je prostorni deo faze talasa i

α je početna faza i ona zavisi od toga u odnosu na koji početni trenutak se određuje vreme i u odnosu na koju tačku u prostoru se određuje x. Na slici 6 su prikazane vremenska i prostorna zavisnost elongacije.



Slika 6

Relacija

$$\varphi = \omega t - kx + \alpha = const. \qquad \textbf{(9)}$$

povezuje vremenske trenutke t i odgovarajuće položaje čestice x, na kojima čestice osciluju u istoj fazi.

Ako se izraz (9) napiše za dve čestice prvu na mestu x_1 a drugu na mestu x_2 pri čemu je $x_2>x_1$ tj. dobija se

$$\varphi = \omega t_1 - kx_1 + \alpha = \omega t_2 - kx_2 + \alpha = const. \qquad (10)$$

Na osnovu izraza (10) se zaključuje da je proteklo vreme t_2 potrebno da druga čestica ima istu fazu kao prva u trenutku t_1 veće od t_1 tj. **da talas kasnije dolazi do druge čestice i da se kreće u pozitivnom smeru x-ose.**

Ako bi posmatrali **talas koji se kreće u negativnom smeru x-ose tada bi on prvo pogodio česticu na mestu x, pa tek onda česticu na mestu x=0 kako je prikazano na slici 7**. Jednačina talasa u tački x=0 bi bila

$$\Psi(0,t) = \Psi_0 \sin(\omega t + \alpha) \qquad (11)$$

Oscilovanje čestice na nekom mestu x se može u odnosu na vreme t″ proteklo od početka oscilovanja te čestice predstaviti u obliku

$$\Psi(x,t'') = \Psi_0 \sin(\omega t'' + \alpha) \qquad (12)$$

Kako je do početka oscilovanja čestice na mestu x=0 došlo posle proteklog vremena $\tau = \frac{x}{c}$ u odnosu na početak oscilovanja čestice u x=x vreme t i t″ su povezani na sledeći način,

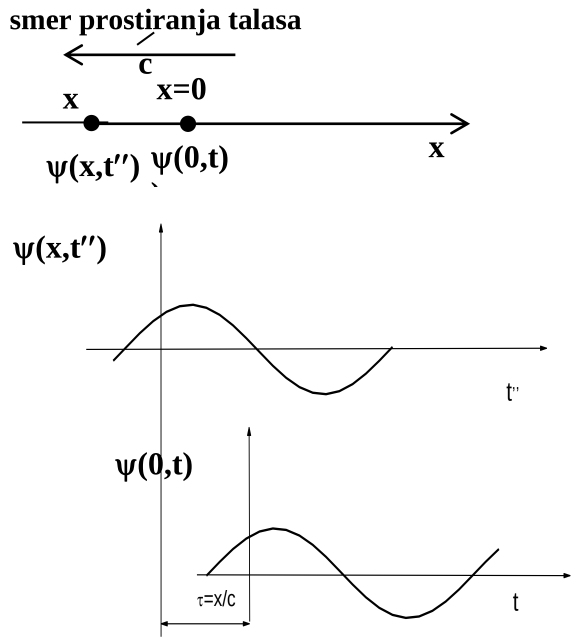
$t = t'' - \frac{x}{c}$, odnosno , $t'' = t + \frac{x}{c}$.

Ako se t″ izrazi preko t u izrazu (12) dobija se izraz za elongaciju talasa na mestu x, i u nekom trenutku t kao

$$\Psi(x,t) = \Psi_0 \sin(\omega(t + \frac{x}{c}) + \alpha) = \Psi_0 \sin(\omega t + \frac{2\pi f x}{c} + \alpha) =$$

$$\Psi_0 \sin(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} x + \alpha) \qquad (13)$$

$$\Psi_0 \sin(\omega t + kx + \alpha) = \Psi_0 \sin\varphi \qquad (14)$$



Slika 7

Izrazi (13) i (14) predstavljaju takođe jednačinu harmonijskog jednodimenzionog talasa samo talasa koji se prostire u negativnom smeru x.ose. Ova jednačina se može napisati i u sledećem obliku

$$\Psi(x,t) = \Psi_0 \sin(\omega(t + \frac{x}{c}) + \alpha) = \Psi_0 \sin\left[\omega\left(t + \frac{2\pi f x}{\omega c}\right) + \alpha\right) \qquad (15)$$

$$\Psi_0 \sin\left[\omega\left(t + \frac{x}{c}\right) + \alpha\right] = \Psi_0 \sin\varphi \qquad (16)$$

Kada proučavamo prostiranje jednog talasa, tačku x=0 i trenutak t=0 biramo tako da je početna faza talasa jednaka nuli, tj. α=0., pa je najčešće korišćeni oblik jednačine talasa

$\Psi(x,t) = \Psi_0 \sin(\omega t - kx)$ ako se kreće u pozitivnom smeru x-ose (17)

$\Psi(x,t) = \Psi_0 \sin(\omega t + kx)$ se kreće u negativnom smeru x-ose (18)

Kada je talas ravanski sva energija koju prenosi je usmerna u jednom pravcu i smeru i u idealnom slučaju može se predpostaviti da amplituda talasa ne zavisi od koordinate x. To je moguće ako se talas prostire kroz sredinu koja ne apsorbuje njegovu energiju.

U realnim uslovima pri prostiranju talasa dolazi do apsorpcije (upijanja) njegove energije duž puta, pa amplituda talasa opada sa rastojanjem od izvora talasa.

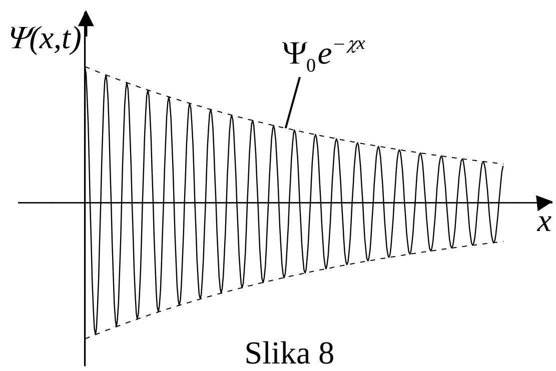
Jednačina takvog ravanskog talasa ima oblik

$$\Psi(x,t) = \Psi_0 \cdot e^{-\chi x} \sin(\omega t - kx) \qquad (19)$$

a njena amplituda oblika

$\Psi_0 \cdot e^{-\chi x}$ eksponencijalno opada sa rastojanjem x.

Koeficijent χ predstavlja koeficijent slabljenja talasa. Zavisnost elongacije ovog talasa od rastojanja za neki vremenski trenutak t =const. predstavljena je grafikom na slici 8.



Slika 8

Kod sfernih talasa, izvor je u idealnom slučaju tačkasti, pa se početna energija talasa prenosi u prostor radialno u sve veću i veću zapreminu. Talasni frontovi ovakvog talasa su koncentrične sfere. Sve tačke jedne sfere osciluju u fazi, pa elongacija talasa ne zavisi od rastojanja po odredjenom pravcu u prostoru, već od rastojanja čestice od tačkastog izvora (što je jednako poluprečniku sfere) *r*. Jednačina sfernog talasa koji se prostire kroz sredinu koja ne apsorbuje njegovu energiju je data izrazom

$$\Psi(x,t) = \frac{\Psi_0}{r} \sin(\omega r - kx) \qquad (20)$$

Amplituda ovog talasa je oblika $\frac{\Psi_0}{r}$ i ona opada sa rastojanjem od izvora, ne zbog apsorpcije u sredini kroz koju se talas prostire, već zato što se energija talasa širi kroz sve veću i veću površinu, pa u svakom pravcu se prostire sve manji deo od od ukupne početne energije talasa.

5.3 Talasna jednačina

Jednačina bilo kog progresivnog talasa predstavlja rešenje diferencijalne jednačine talasa koja se naziva i talasna jednačina.

Talasna jednačina predstavlja vezu brzine talasa sa vremenskom i prostornom promenom elengacije.

Jednačina harmonijskog progresivnog talasa je jedno od rešenja te diferencijalne talasne jednačine i preko nje će biti izvedena talasna jednačina.

Da bi se dobila talasna jednačina na ovaj način vršiće se dvostruko diferenciranje jednačine harmonijskog talasa prvo po vremenu, a zatim i po koordinati.

Pošto je elongacija talasa, Ψ, funkcija i koordinate x i vremena t, onda se posebno vrši diferenciranje po x i posebno po t i ti izvodi se nazivaju parcijalni izvodi.

Parcijalni izvod elongacije po x se obeležava sa $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ i radi se kao izvod funkcije po jednoj promenljivoj (u ovom slučaju x) tj. kao $\frac{d\Psi}{dx}$ **pri čemu se smatra da je *t* konstanta**, a ne promenljiva . Tako parcijalni izvod po x može da se napiše i kao $\left.\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right|_{t=const.}$

Ako se pođe od jednačine talasa u obliku

$$\Psi(x,t) = \Psi_0 \sin(\omega t - kx) = \Psi_0 \sin\varphi \qquad (1)$$

dobija se da je

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\Psi_0 \sin\varphi) = \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} = (\Psi_0 \cos\varphi)\cdot(-k) = -k\Psi_0 \cos\varphi = -k\Psi_0 \cos(\omega t - kx) \qquad (2)$$

Drugi izvod elongacije po x se dobija kao prvi izvod prvog izvoda, pa se vrši parcijalno diferenciranje izraza(2) po x na isti način tj

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(-k\Psi_0 \cos\varphi) = -k\Psi_0 \cdot(-\sin\varphi)\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} = (k\Psi_0 \sin\varphi)\cdot(-k) =$$
$$-k^2\Psi_0 \sin\varphi = -k^2\Psi_0 \sin(\omega t - kx) \qquad (3)$$

Na sličan način se vrši diferenciranje elongacije po vremenu.

Parcijalni izvod elongacije po t se obeležava sa $\frac{\partial\Psi}{\partial t}$ i radi se kao izvod funkcije po jednoj promenljivoj tj. kao $\frac{d\Psi}{dt}$ pri čemu se smatra da je x konstanta , a ne promenljiva . Tako parcijalni izvod po t može da se napiše i kao $\left.\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right|_{x=const.}$

Ako se pođe od jednačine progresivnog harmonijskog talasa dobija se da je

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(\Psi_0\sin\varphi)=\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t}=(\Psi_0\cos\varphi)\cdot(\omega)=\omega\Psi_0\cos\varphi=\omega\Psi_0\cos(\omega t-kx) \quad (4)$$

Drugi izvod eleongacije po t se dobija kao prvi izvod prvog izvoda , pa se vrši parcijalno diferenciranje izraza(4) po t na isti način tj.

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}(\omega\Psi_0\cos\varphi)=\omega\Psi_0\cdot(-\sin\varphi)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t}=(-\omega\Psi_0\sin\varphi)\cdot(\omega)= \quad (5)$$
$$-\omega^2\Psi_0\sin\varphi=-\omega^2\Psi_0\sin(\omega t-kx)$$

Kada jednačinu (3) podelimo sa k^2, a jednačinu (5) sa ω^2, dobijaju se izrazi

$$\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}=-\Psi_0\sin\varphi=-\Psi_0\sin(\omega t-kx) \quad (6)$$

$$\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=-\Psi_0\sin\varphi=-\Psi_0\sin(\omega t-kx)$$

(7)

$$\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}=\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} \quad \text{tj.} \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=\frac{\omega^2}{k^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}=\left(\frac{\omega}{k}\right)^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} \quad (9)$$

Kako je ω/k=c jednačina (9) postaje

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} \quad \mathbf{(10)}$$

i ona predstavlja diferencijalnu jednačinu progresivnog talasa , tj. talasnu jednačinu.

Na osnovu izraza (10) se zaključuje, da ako je drugi izvod elengacije po vremenu srazmeran drugom izvodu eleongacije po koordinati, tada ta diferencijalan jednačina predstavlja diferencijalnu jedninu progresivnog talasa, a konstanta srazmernosti je jednaka kvadratu brzine prostiranja talasa.

Iako je talasna jednačina izvedena za progresivni harmonijski ravanski talas, ona **važi za sve progresivne talase koji se predstavljaju nekom funkcijom od (ωt-kx),** tj za sve jednačine oblika

$$\Psi(x,t) = \Psi(\omega t - kx)$$

2.4. Brzina prostiranja mehaničkih talasa u različitim sredinama

Kada se talasna jednačina izvede za različite vrste progresivnih talasa koji se kreću u nekoj određenoj sredini, dobija se brzina prostiranja te vrste talasa u toj sredini.

Na taj način se izvodi da je :

a) **brzina longitudinalnih talasa u čvrstom telu** c_l

$$c_l = \sqrt{\frac{E_y}{\rho}} \tag{11}$$

gde je E_y Jungov modul elastičnosti sredine kroz koju se prostire talas, a ρ gustina te sredine.

b) **brzina transverzalnih talasa u čvrstim telima**, c_τ se određuje na osnovu izraza

$$c_\tau = \sqrt{\frac{E_S}{\rho}} \tag{12}$$

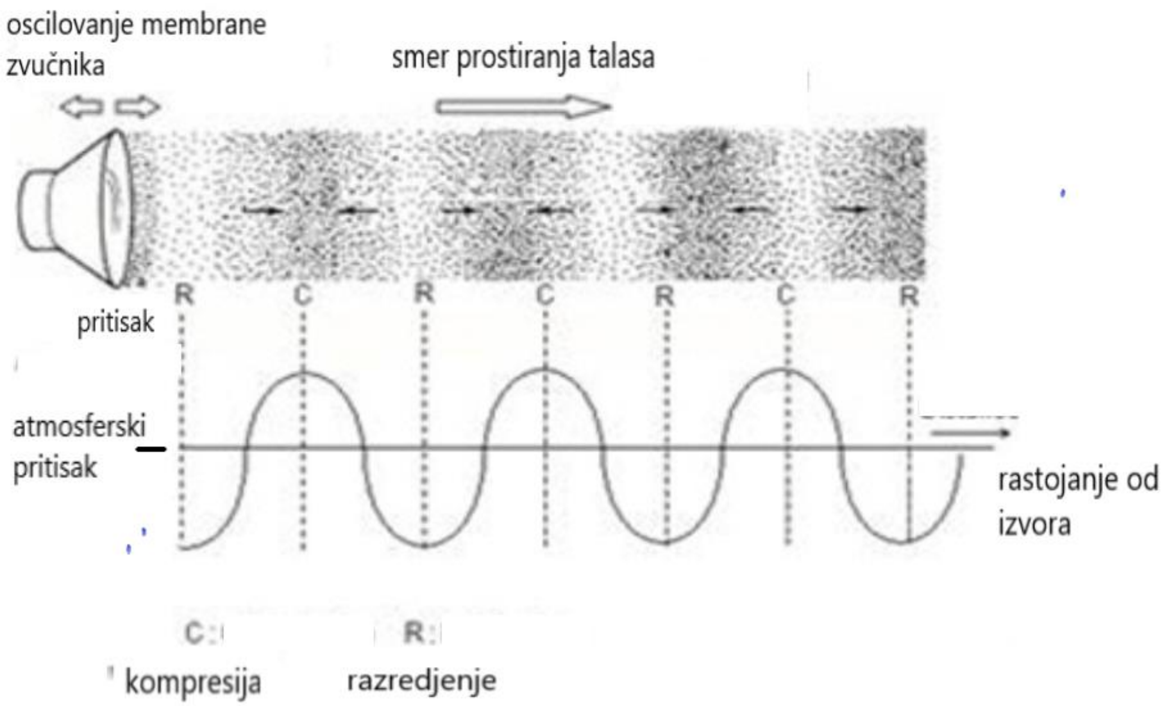
gde je E_S moduo smicanja sredine kroz koju se prostire talas, , a ρ gustina te sredine.

c) **brzina longitudinalnih talasa u gasovitom telu** c je jednaka

$$c = \sqrt{\frac{E_V}{\rho}} \tag{13}$$

gde je E_V zapreminski moduo stišljivosti gasa kroz koju se prostire talas, , a ρ gustina gasa.

Kod prostiranja mehničkih talasa u gasu, gas se stalno lokalno sabija i širi, pa dolazi do lokalne promene pritiska . Pošto su frekvencije zvučnih talasa veće od 20 Hz i idu i do 20kHz, procesi lokalnog sabijanja i širenja gasa su adijabatski i na osnovu ovoga je moguže odrediti zapreminski moduo stišljivosti gasa.



Ako se posmatraju beskonačno male promene zapremine gasa dV, nastale pod dejstvom beskonačno malih promena pritiska dp u nekoj zapremini gasa V, prema definiciji zapreminskog modula stišljivosti E_V, može se napisati da je

$$dp = -E_V \cdot \frac{dV}{V} \tag{14}$$

Na osnovu izraza (14)

$$E_V = -\cdot \frac{dp}{dV} \cdot V \tag{15}$$

Pošto je promena stanja gasa adijabatska , za nju važi da je $p = \frac{A}{V^{\kappa}}$, pa je

$$\frac{dp}{dV} = \frac{d(A \cdot V^{-\kappa})}{dV} = A \cdot (-\kappa V^{-\kappa-1}) = -\frac{A}{V^{\kappa}} \cdot \frac{\kappa}{V} = -\frac{p\kappa}{V} \tag{16}$$

Na osnovu izraza (16) dobija se

$$E_V = p \cdot \kappa \tag{17}$$

pa izraz za brzinu longitudinalnih talasa tj. za brzinu zvuka zvuka u gasovima postaje

$$c = \sqrt{\frac{p\kappa}{\rho}} = \sqrt{\frac{p\kappa}{\frac{m}{V}}} = \sqrt{\frac{nRT\kappa}{m}} = \sqrt{\frac{\kappa RT}{M}} \tag{18}$$

Ako je na temperaturi T_0, brzina protiranja zvuka c_0, tada je na nekoj temperaturi T brzina zvuka u gasovitim telima c(T) jednaka

$$c = \sqrt{\frac{RT\kappa}{M} \cdot \frac{T_0}{T_0}} \cdot = \sqrt{\frac{\kappa RT_0}{M}} \sqrt{\frac{T}{T_0}} = c_0 \cdot \sqrt{\frac{T}{T_0}} \tag{19}$$

d) Brzina prostiranja transverzalnih talasa u zategnutoj žici je data izrazom

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \tag{20}$$

gde je F sila kojom je zategnuta žica , μ je podužna masa tj . masa žice po jedinici dužine zice.

5.5 Brzina i ubrzanje čestica sredine pri prostiranju harmonijskog talasa

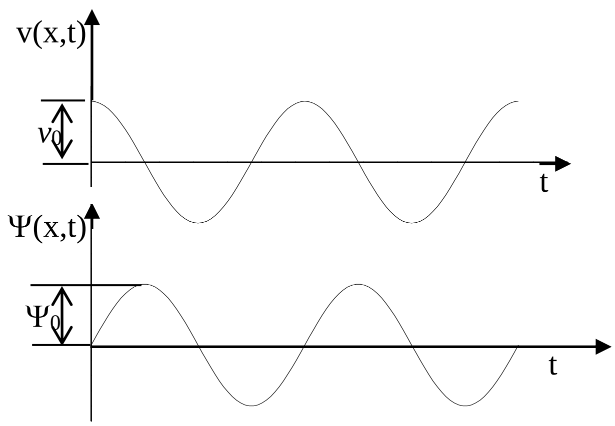
a) **Brina čestice sredine kroz koju se prostire harmonijki talas**

Trenutna brzina nekog tela v, tj. pređeni put u jedinici vremena određuje se kao

$$v = \frac{ds}{dt} \tag{21}$$

U slučaju čestice sredine koja osciluje usled prostiranja talasa , **njen pređeni put predstavlja njeno rastojanje od ravnotežnog položaja, tj. elongaciju**, pa se brzina te čestice može odrediti kao

$$v = \frac{\partial \Psi}{dt} \big|_{x=const.} \tag{22}$$



Slika 1

i ako je talas harmonijski brzina čestice sredine je jednaka

$$v = \frac{\partial \Psi}{dt} = \frac{\partial(\Psi_0 \sin(\omega t - kx))}{\partial t} = \omega \Psi_0 \cos(\omega t - kx) = v_0 \cos(\omega t - kx) \tag{23}$$

gde je $v_0 = \omega \Psi_0$ -maksimalna vrednost brzine oscilujuće čestice.

Zavisnost brzine čestice od vremena je grafički predstavljena na slici 1 , zajedno sa vremenskom zavisnošću elongacije. Očigledno je da čestica ima najveću brzinu pi prolsku kroz ravnotežni položaj.

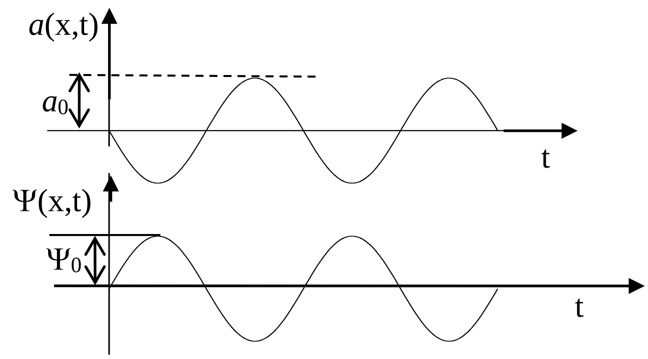
b) Ubrzanje čestice sredine kroz koju se prostire harmonijski talas

Ubrzanje tela, a, predstavlja promenu brzine u jedinici vremena tj

$$a = \frac{dv}{dt} \qquad (24)$$

U slučaju čestice sredine koja osciluje usled prostiranja talasa ,ubrzanje je jednako

$$a = \frac{\partial v}{dt}\Big|_{x=const.} \qquad (25)$$



Slika 2

i ako je talas harmonijski ubrzanje čestice sredine je jednako

$$a = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial(\omega\Psi_0 \cos(\omega t - kx))}{\partial t} = -\omega^2\Psi_0 \sin(\omega t - kx) = -a_0 \sin(\omega t - kx) \quad (26)$$

gde **je $a_0 = \omega^2 \Psi_0$ -maksimalna vrednost ubrzanja oscilujuće čestice.**

Zavisnost ubrzanja čestice od vremena je grafički predstavljena na slici 2 , zajedno sa vremenskom zavisnošću elongacije.

Primeri:

1..Progresivini harmonijski talas dat je izrazom

$\psi = 0{,}001 \cdot \sin(1000\pi \cdot t - 400\pi \cdot x)$, i sve veličine u jednačini su u SI sistemu.

a) amplituda oscilovanja čestica je jednaka __***0,001m***______________ b)) talasna dužina ovog talasa je jednaka _***λ=2π/k=2π/400π=0,005m=5mm***____, c) faza ovog talasa u trenutku t=1ms i na mestu x= 1/8 m je jednaka____***ωt-kx=1000π rad/s·10^{-3}s- 400π rad/m·(1/8)m=π-5π=-4π***_______,

d) brzina ovog talasa je jednaka __***c=ω/k=(1000π rad/s)/(400π rad/m) =2,5m/s***______

e) frekvencija ovog talasa je jednaka______***f=ω/2π=1000π/2π=500Hz***__

f) koliko je brzina čestice sredine u trenutku t=1ms i na mestu x= 1/8 m_______

$v=v_0\cos(\omega t-kx)=\omega\Psi_0 \cos(\omega t-kx)$=1000$\pi$ rad/s·0,001m·cos(-4π)=1m/s________

2...Brzina čestice materijalne sredine kroz koju se prostire progresivan talas data je izrazom:

$v = 0{,}28 \cdot \cos(280 \cdot t - 0{,}5 \cdot x + \pi/3)$ gde su sve veličine u SI sistemu jedinica. Koliki su (napisati broj i jedinicu za veličinu):

a) maksimalna brzina čestice _***0,28 m/s***_ b) brzina talasa_ ***c=ω/k=(280 rad/s)/(0,5 rad/m) =560m/s***____

c) amplituda oscilovanja čestice_Ψ_0= v_0/ω=__(0,28m/s)/(280rad=s)=0,001m

d) Ubrzanje čestice sredine u trenutku t=(1/40)s i na mestu x=1,44dm**=0,144m**

$$a = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(0,28 \cdot \cos(280 \cdot t - 0,5 \cdot x + \pi / 3)) = -0,28 \cdot 280 \cdot \sin(280 \cdot t - 0,5 \cdot x + \pi / 3)$$

$$= -78,4 \cdot \sin\underbrace{(280 \cdot \frac{1}{40} - 0,5 \cdot 1,44 + \pi / 3)}_{\varphi} = -78,4 \cdot \sin(7,9752 rad) =$$

$$-78,4 \cdot ,0,99266 = -77,825 m / s^2$$