



Универзитет у Београду – Грађевински факултет
www.grf.bg.ac.rs

Студијски програм: **ГЕОДЕЗИЈА И ГЕОИНФОРМАТИКА**

Модул: **ГЕОДЕЗИЈА**

Година/Семестар: **I година / 1 семестар**

Назив предмета (шифра): **Рачун изравнања – напредни курс (M2G1RI)**

Наставник: **Бранко Божић**

Наслов предавања: **МЕРЕ ТАЧНОСТИ У ГЕОДЕТСКИМ
МРЕЖАМА**

Датум : 17.11.2020.

САДРЖАЈ

- Увод
- Декомпозиција сопствених вредности
- Локалне мере тачности
- Глобалне мере тачности
- Анализа квалитета геодеетских мрежа

УВОД

$\hat{\mathbf{X}}$
 $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{X}}}$ } Зависе од датумаских услова
Неинваријантне величине

$$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{X}}} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{X}}}, \quad \mathbf{r}(\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{X}}}) = \mathbf{r} = \mathbf{u} - \mathbf{d}$$

→ d колона је редудантно

На тачност оцена непознатих параметара можемо утицати на три основна начина:

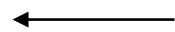
- Избором инструмената и броја поновљених мерења;
- Одговарајућим избором распореда тачака, плана опажања и типа мерења;
- Одговарајућим избором тежина

Декомпозиција сопствених вредности

Декомпозиција сопствених вредности од

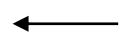
$$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}$$

$$(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}^{-} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) = c$$



c – димензионални хиперелипсоид са центром у $\mathbf{x}$

$$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}^{-}$$



Уопштена инверзија од

$$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}$$

$$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}^{-} = \frac{1}{\sigma_0^2 \mathbf{N}}, \quad \text{где је} \quad \mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$$

Нормалност распореда оцена непознатих параметара представља се следећим изразом

$$\hat{\mathbf{x}} \sim \mathbf{N}(\mathbf{x}, \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}})$$

$$(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}^{-} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \sim \chi_{1-\alpha, r}^2$$

Хиперелипсоид је дефинисан са r полуоса и њиховим правцима у простору

Дужине оса хиперелипсоида пропорционалне су квадратним коренима сопствених вредности од $\mathbf{K}_{\mathbf{x}}$

Правци су дефинисани јединичним векторима

Декомпозиција сопствених вредности

$$(\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}} - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{s}_i = \mathbf{0}$$

Јединични вектор

Јединична вредност

Основна једначина сопствених вредности

Хомогена једначина поседује нетривијално решење $\mathbf{s}_i$ ако и само ако је матрица сингуларна, $(\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}} - \mathbf{I}\lambda_i)$ односно ако јој је детерминанта једнака нули, тј.

$$\det(\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}} - \lambda_i \mathbf{I}) = 0$$

← Карактеристична једначина од

$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}$

$$\mathbf{S}^T \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{S} = \Lambda, \quad \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{S} \Lambda \mathbf{S}^T$$

Матрица јединичних вектора

Дијагонална матрица са јединичним вредностима на дијагонали

Особине $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}$

$$\sum_{i=1}^u \lambda_i = \text{tr} \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}$$

$$\prod_{i=1}^u \lambda_i = \det \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}$$

$$\frac{\mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{s}_i}{\mathbf{s}_i^T \mathbf{s}_i} = \lambda_i$$

$\mathbf{s}_i$ = јединични вектор од $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}$

$$\lambda_{\min} \leq \frac{\mathbf{f}^T \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{f}}{\mathbf{f}^T \mathbf{f}} \leq \lambda_{\max} \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbb{R}^u$$

Локалне мере тачности

Све локалне мере произилазе из матрице коваријанси

$$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} & \dots & \mathbf{Q}_{1p} \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} & \dots & \mathbf{Q}_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{Q}_{p1} & \mathbf{Q}_{p2} & \dots & \mathbf{Q}_{pp} \end{bmatrix}$$

У 2Д мрежи

$$\mathbf{Q}_{mm} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{xx}^m & \mathbf{q}_{xy}^m \\ \mathbf{q}_{yx}^m & \mathbf{q}_{yy}^m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{ms} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{xx}^{ms} & \mathbf{q}_{xy}^{ms} \\ \mathbf{q}_{yx}^{ms} & \mathbf{q}_{yy}^{ms} \end{bmatrix}$$

стандардно одступање координата, често се назива *кореном средњих квадратних грешака координата*

$$\sigma_{\hat{x}} = \sigma_0 \sqrt{\mathbf{q}_{xx}} \quad \sigma_{\hat{y}} = \sigma_0 \sqrt{\mathbf{q}_{yy}}$$

← Познат а приори фактор дисперзије

$$s_{\hat{x}} = \hat{\sigma}_{\hat{x}} = s_0 \sqrt{\mathbf{q}_{xx}} \quad s_{\hat{y}} = \hat{\sigma}_{\hat{y}} = s_0 \sqrt{\mathbf{q}_{yy}}$$

← Непознат а приори фактор дисперзије

интервал поверења.

$$(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \sigma_{\mathbf{x}})$$

$$\longrightarrow \mathbf{P}(-\mathbf{z}_{\alpha/2} < \frac{\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}}{\sigma_{\hat{\mathbf{x}}}} < \mathbf{z}_{\alpha/2}) = 1 - \alpha \longrightarrow \mathbf{P}(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{z}_{\alpha/2} \sigma_{\hat{\mathbf{x}}} < \mathbf{x} < \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{z}_{\alpha/2} \sigma_{\hat{\mathbf{x}}}) = 1 - \alpha$$

$$\mathbf{P}(\hat{\mathbf{x}} - 1.96 \cdot \sigma_{\hat{\mathbf{x}}} < \mathbf{x} < \hat{\mathbf{x}} + 1.96 \cdot \sigma_{\hat{\mathbf{x}}}) = 95\%$$

Локалне мере тачности

Уколико се користи оцена варијансе, разлика параметра и његове оцене понаша се по закону студентовог распореда

$$\frac{\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}}{s_{\hat{\mathbf{x}}}} \sim t_{n-u} \longrightarrow P(-t_{\alpha/2} < \frac{\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}}{s_{\hat{\mathbf{x}}}} < t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha \longrightarrow P(\hat{\mathbf{x}} - t_{\alpha/2} s_{\hat{\mathbf{x}}} < \mathbf{x} < \hat{\mathbf{x}} + t_{\alpha/2} s_{\hat{\mathbf{x}}}) = 1 - \alpha$$

$\mathbf{f} = \mathbf{n} - \mathbf{u}$	2	4	6	8	10	15	20	25	30	40	120	∞
$\alpha = 5\%$	4.30	2.78	2.45	2.31	2.23	2.13	2.09	2.06	2.04	2.02	1.98	1.96
$\alpha = 1\%$	9.92	4.60	3.71	3.36	3.17	2.95	2.84	2.79	2.75	2.70	2.62	2.58

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{f}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{f}_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{f}_n \mathbf{x}_n = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{f}^T \mathbf{x} \quad \leftarrow \text{Функција непознатих параметара}$$

$$\mathbf{q}_f = \mathbf{f}^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{f} \quad \leftarrow \text{Закон преноса грешака}$$

$$\sigma_f = \sigma_0 \sqrt{\mathbf{q}_f}$$

$$s_f = s_0 \sqrt{\mathbf{q}_f}$$

Стандардно одступање функције

Локалне мере тачности

Стандардне елипсе представљају уопштену верзију стандардног одступања.

Елипсе поверења дводимензионални еквивалент интервала поверења.

Уколико се односе на једну тачку, елипсе називамо **апсолутним елипсама**,

Уколико се односе на релативан положај две тачке, тада се елипсе називају **релативним елипсама**.

$$(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}^{-1} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) = \chi_{1-\alpha, r}^2$$

За једну тачку - k

$$(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{Q}_{kk}^{-1} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) = \sigma_0^2 \chi_{1-\alpha, 2}^2$$

$$(\mathbf{Q}_{kk} - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{s}_i = \mathbf{0}$$

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{xx}^k - \lambda & \mathbf{q}_{xy}^k \\ \mathbf{q}_{yx}^k & \mathbf{q}_{yy}^k - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(\mathbf{q}_{xx}^k - \lambda)(\mathbf{q}_{yy}^k - \lambda) - \mathbf{q}_{xy}^k \mathbf{q}_{yx}^k = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} (\mathbf{q}_{xx}^k + \mathbf{q}_{yy}^k + z)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} (\mathbf{q}_{xx}^k + \mathbf{q}_{yy}^k - z)$$

$$z = (\mathbf{q}_{xx}^k - \mathbf{q}_{yy}^k)^2 + 4\mathbf{q}_{xy}^k \mathbf{q}_{yx}^k$$

са

$$\tan 2\alpha = \frac{2\mathbf{q}_{xy}^k}{\mathbf{q}_{xx}^k - \mathbf{q}_{yy}^k}$$

$$\mathbf{a} = \sigma_0 \sqrt{\lambda_1 \chi_{1-\alpha, 2}^2}$$

$$\mathbf{b} = \sigma_0 \sqrt{\lambda_2 \chi_{1-\alpha, 2}^2}$$

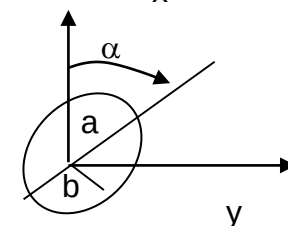
Елипсе поверења

$$\chi_{0.95, 2}^2 = 5.99$$

$$\mathbf{a} = \sigma_0 \sqrt{\lambda_1}$$

$$\mathbf{b} = \sigma_0 \sqrt{\lambda_2}$$

Елипсе грешака - Вероватноћа 39.4%.



Локалне мере тачности

Уколико се уместо σ_0 користи њена оцена s_0 , квадратна форма припада F распореду (Фишеров распоред) са две и $n-r$ степени слободe, односно, елипса поверења тада гласи

$$(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{Q}_{kk}^{-1} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) = 2s_0^2 F_{1-\alpha, 2, n-r}$$

$$\mathbf{a} = s_0 \sqrt{\lambda_1}$$

$$\mathbf{b} = s_0 \sqrt{\lambda_2}$$

$$\mathbf{a} = s_0 \sqrt{2\lambda_1 F_{1-\alpha, 2, n-r}}$$

$$\mathbf{b} = s_0 \sqrt{2\lambda_2 F_{1-\alpha, 2, n-r}}$$

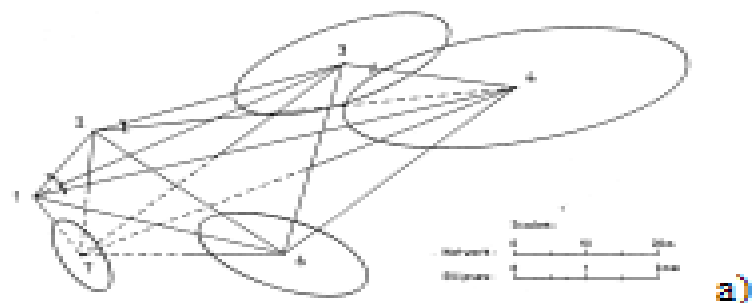
$$\tan 2\alpha = \frac{2q_{xy}}{q_{xx} - q_{yy}}$$

Вероватноћа да ће истинити положај неке тачке бити унутар стандардне елипсе оценог њеног непознатог положаја јесте функција броја степени слободe $n-r$ и достиже максимум од 39% за $n \rightarrow \infty$.

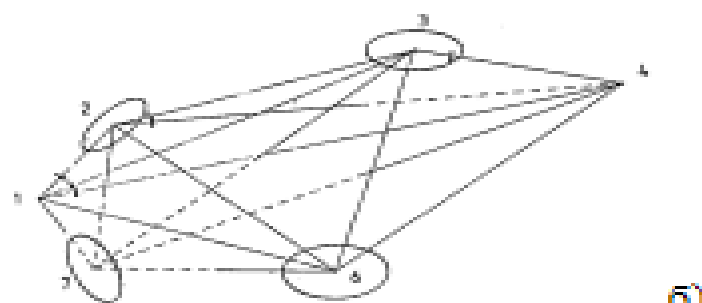
Апсолутне елипсе грешака (укључујући и кругове) имају једну лошу особину, а то је да игноришу међусобну зависност између тачака (коваријансе). Проблем се делимично елиминише коришћењем **релативних елипси грешака** које репрезентују релативну тачност пара суседних или несуседних тачака.

Све напред наведене мере квалитета имају једну негативну особину, а то је да су **датумски зависне**.

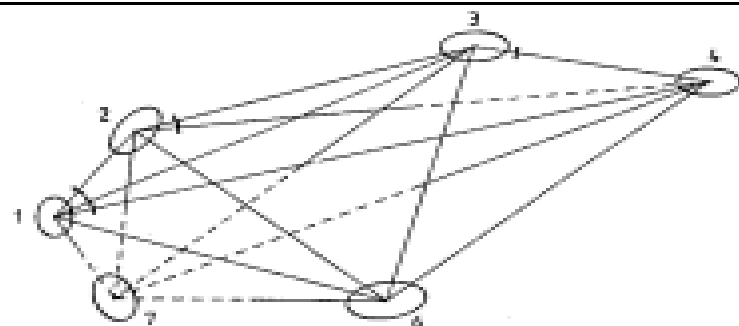
Локалне мере тачности



a)

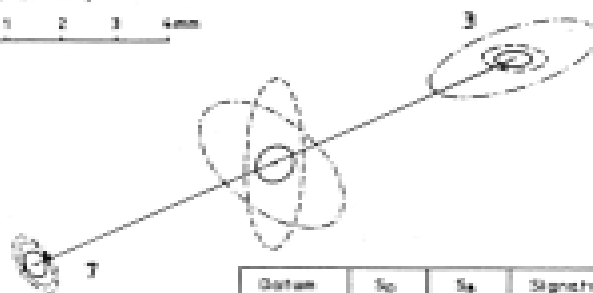


б)



в)

Scale of Ellipses
0 1 2 3 4mm



д)

Diagram	S_0 [mm]	S_0 [mgon]	Signature
Fig. 4.1	0,45	0,44	_____
Fig. 4.2	0,20	0,29	_____
Fig. 4.3	0,14	0,21	_____

Глобалне мере тачности

$$\bar{s}_{\hat{x}}^2 = \frac{1}{u} \text{tr} \mathbf{K}_{\hat{x}}$$

- *просечна варијанса* или *средња варијанса*

$$\bar{s}_p^2 = \bar{s}_{\hat{x}} \sqrt{2}$$

- *средња грешка тачке*

$$\bar{s}_{\hat{x}}^2 = \sqrt[n]{\det \mathbf{K}_{\hat{x}}}$$

- *општа варијанса* (користе се само не нулте јединичне вредности)

$$\lambda_{\max}$$

- *највећа јединична вредност* од $\mathbf{K}_x$

Датумски зависне

Уколико захтеви мреже изричито инсистирају на хомогеној тачности, тада се често посматра разлика

$$\lambda_{\max} - \lambda_{\min}$$

Мала разлика указује да је хиперелипсоид грешака близак хиперсфери.

Анализа квалитета геодеетских мрежа

Приликом поређења квалитета различитих геометрија мреже скаларне мере глобалне тачности, нису увек најпоузданије решење.

У контексту оптимизације геодеетских мрежа, понекад је боље дефинисати **критеријумску матрицу** која репрезентује одговарајућу структуру матрице коваријанси.

Ако су $\hat{\mathbf{x}}_A, \mathbf{Q}_A$ и $\hat{\mathbf{x}}_B, \mathbf{Q}_B$

два скупа оцена вектора параметара $\mathbf{x}$ са одговарајућим кофакторским матрицама која припадају различитим скуповима опажања или различитим геометријама две мреже, или где је једна од кофакторских матрица критеријумска, тада се као правило за утврђивање односа између решења A и B користи следећа формулација:

Прецизност (A) мања је или је једнака прецизности (B)

Одлука је једноставна, уколико се користи само једна функција облика

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}^T \mathbf{x}$$

A је боље од B ако важи однос

$$\mathbf{f}^T \mathbf{Q}_A \mathbf{f} \leq \mathbf{f}^T \mathbf{Q}_B \mathbf{f} \quad \text{или}$$

$$\mathbf{f}^T (\mathbf{Q}_A - \mathbf{Q}_B) \mathbf{f} \leq 0 \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$$

Генерално, највећа сопствена вредност од

$\mathbf{Q}_A - \mathbf{Q}_B$ мања или једнака нули.