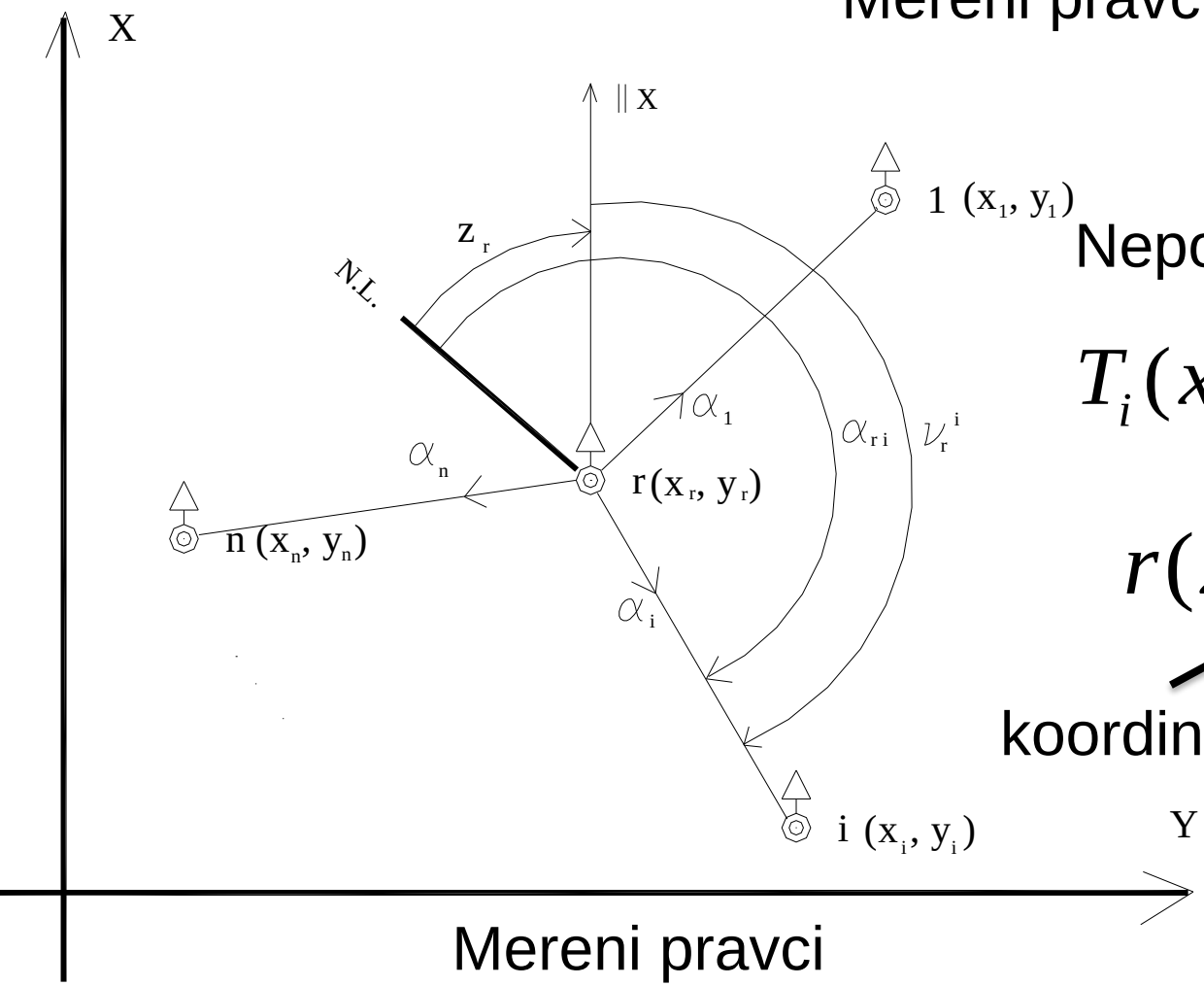
7. FUNKCIONALNI MODELI POSREDNOG IZRAVNANJA

7.1 JEDNAČINA POPRAVKE MERENOG PRAVCA

Mereni pravci: $\alpha_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$



Nepoznati parametri:

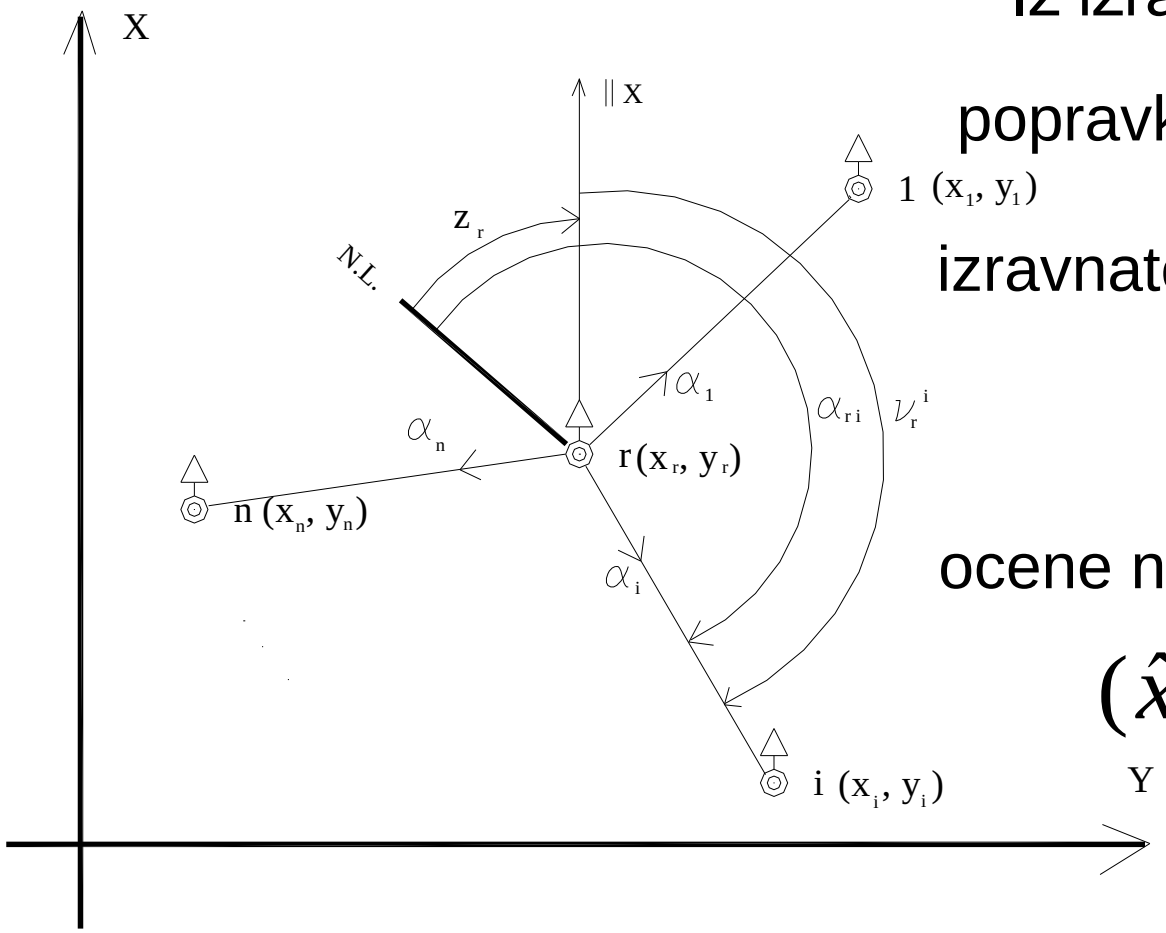
$$T_i(x_i, y_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$r(x_r, y_r) \quad z_r$$

koordinate

orijentacioni ugao

7.1 JEDNAČINA POPRAVKE MERENOG PRAVCA



Mereni pravci

Iz izravnanja se određuju:

popravke merenih pravaca υ_{ri}

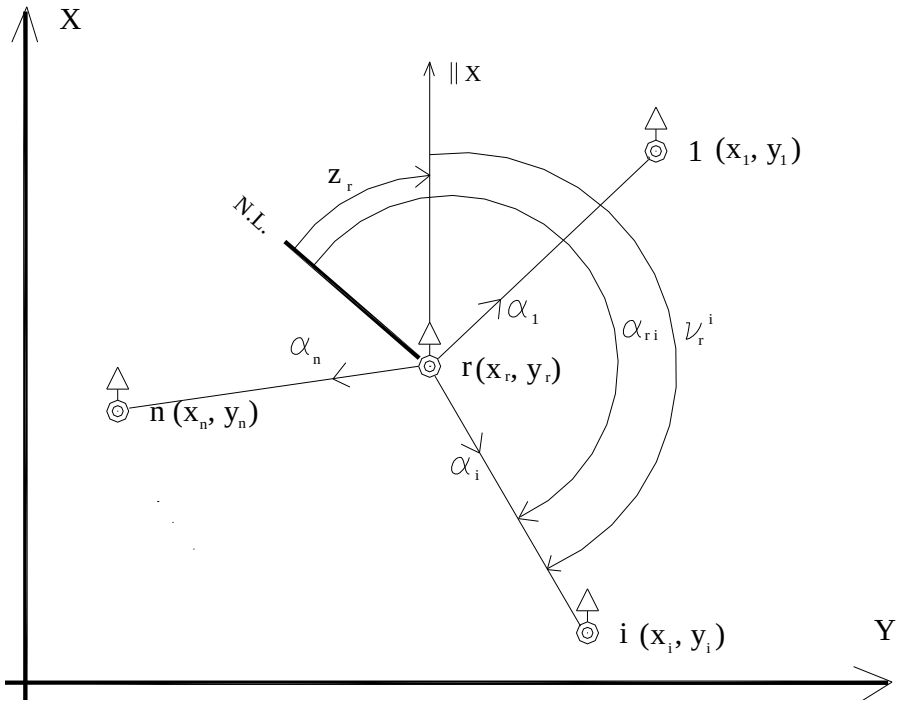
izravnate vrednosti pravaca $\hat{\alpha}_{ri}$

$(i = 1, 2, \ldots, \mathrm{n})$

ocene nepoznatih parametara

$$(\hat{x}_r, \hat{y}_r, \hat{z}_r, \hat{x}_i, \hat{y}_i)$$

7.1 JEDNAČINA POPRAVKE MERENOG PRAVCA



Izravnata vrednost pravca je

$$\hat{\alpha}_{ri} = \alpha_{ri} + \upsilon_{ri} \qquad (1)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, \mathrm{n})$$

Funkcionalna veza veza između merenih pravaca i nepoznatih parametara je

$$\alpha_{ri} + \upsilon_{ri} = \nu_{ri} + \hat{z}_r = arctg\,\frac{\hat{y}_i - \hat{y}_r}{\hat{x}_i - \hat{x}_r} + \hat{z}_r = F(\hat{x}_r, \hat{y}_r, \hat{x}_i, \hat{y}_i) + \hat{z}_r =$$

$$= F(x_r^o + dx_r, y_y^o + dy_r, x_i^o + dx_i, y_i^o + dy_i) + z_r^o + dz_r \qquad (2)$$

7.1 JEDNAČINA POPRAVKE MERENOG PRAVCA

Razvijanjem u Tajlorov red sledi

$$\alpha_{ri} + \upsilon_{ri} = F(x_r^o, y_r^o, x_i^o, y_i^o) + \frac{\partial F}{\partial x_r^o} dx_r + \frac{\partial F}{\partial y_r^o} dy_r + \frac{\partial F}{\partial x_i^o} dx_i + \frac{\partial F}{\partial y_i^o} dy_i + z_r^o + dz_r$$

ili

$$\alpha_{ri} + \upsilon_{ri} = v_{ri}^o + dv_{ri} + z_r^o + dz_r \qquad (3)$$

gde su:

$$v_{ri} = v_{ri}^o + dv_{ri} \qquad \hat{z}_r = z_r^o + dz_r$$

$$tgv_{ri}^o = \frac{y_i^o - y_r^o}{x_i^o - x_r^o} \qquad z_r^o = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_{ri} - v_{ri}^o\right) \qquad (4)$$

7.1 JEDNAČINA POPRAVKE MERENOG PRAVCA

Za direkcioni ugao (4)

$$tgv_{ri}^{o} = \frac{y_i^o - y_r^o}{x_i^o - x_r^o}$$

diferencijalna promena dv_{ri} je oblika

$$\frac{1}{\cos^2 v_{ri}^o} \cdot dv_{ri} = \frac{y_i^o - y_r^o}{\left(x_i^o - x_r^o\right)^2} \cdot dx_r - \frac{1}{x_i^o - x_r^o} \cdot dy_r - \frac{y_i^o - y_r^o}{\left(x_i^o - x_r^o\right)^2} \cdot dx_i + \frac{1}{x_i^o - x_r^o} \cdot dy_i$$

odnosno

$$dv_{ri} = \frac{\left(y_i^o - y_r^o\right)\cos^2 v_{ri}^o}{\left(x_i^o - x_r^o\right)^2} \cdot dx_r - \frac{\cos^2 v_{ri}^o}{x_i^o - x_r^o} \cdot dy_r - \frac{\left(y_i^o - y_r^o\right)\cos^2 v_{ri}^o}{\left(x_i^o - x_r^o\right)^2} \cdot dx_i + \frac{\cos^2 v_{ri}^o}{x_i^o - x_r^o} \cdot dy_i$$

ili kraće

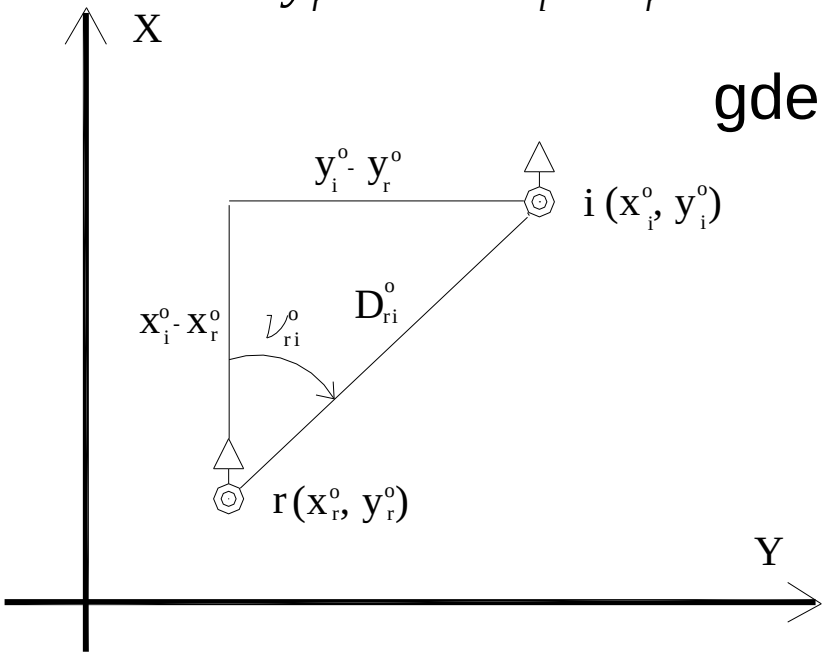
$$dv_{ri} = a_{ri}dx_r + b_{ri}dy_r + a_{ir}dx_i + b_{ir}dy_i \qquad (5)$$

7.1 JEDNAČINA POPRAVKE MERENOG PRAVCA

Koeficijenti uz nepoznate su parcijalni izvodi funkcije

$$a_{ri} = \frac{\partial F}{\partial x_r^o} = \rho \cdot \frac{\left(y_i^o - y_r^o\right)\cos^2 v_{ri}^o}{\left(x_i^o - x_r^o\right)^2} = \rho \cdot \frac{y_i^o - y_r^o}{(D_{ri}^o)^2} = \rho \cdot \frac{\sin v_{ri}^o}{D_{ri}^o}$$

$$b_{ri} = \frac{\partial F}{\partial y_r^o} = -\rho \cdot \frac{\cos^2 v_{ri}^o}{x_i^o - x_r^o} \cdot dy_r = -\rho \cdot \frac{x_i^o - x_r^o}{(D_{ri}^o)^2} = -\rho \cdot \frac{\cos v_{ri}^o}{D_{ri}^o}$$



gde su:

$$\cos v_{ri}^o = \frac{x_i^o - x_r^o}{D_{ri}^o}$$

$$\sin v_{ri}^o = \frac{y_i^o - y_r^o}{D_{ri}^o}$$

$$D_{ri}^o = \sqrt{(y_i^o - y_r^o)^2 + (x_i^o - x_r^o)^2}$$

7.1 JEDNAČINA POPRAVKE MERENOG PRAVCA

Koeficijenti uz nepoznate su parcijalni izvodi funkcije

$$a_{ir} = \frac{\partial F}{\partial x_i^o} = -a_{ri} \qquad b_{ir} = \frac{\partial F}{\partial y_i^o} = -b_{ri}$$

Opšti oblik jednačine popravke za opažani pravac između dve nepoznate tačke dobija se zamenom (5) u (3)

$$\upsilon_{ri} = a_{ri}dx_r + b_{ri}dy_r + a_{ir}dx_i + b_{ir}dy_i + dz_r + f_{ri}, \quad (6)$$

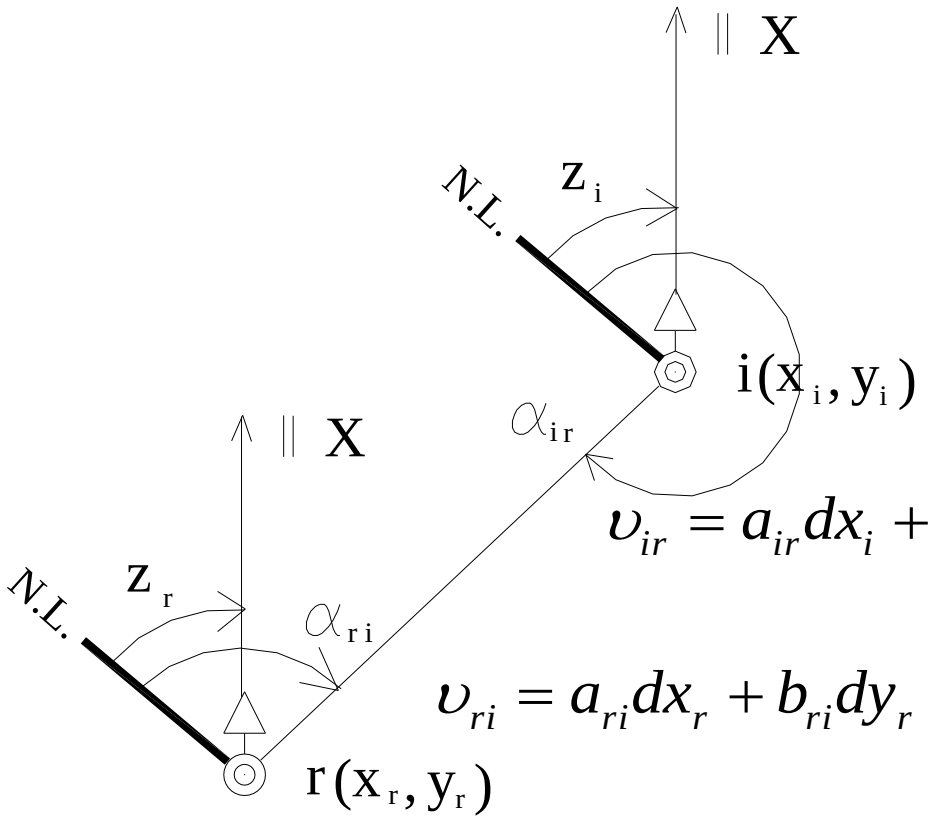
gde su slobodni članovi

$$f_{ri} = (v_{ri}^o + z_r^o) - \alpha_{ri} = P - M \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}) \quad (7)$$

7.1 JEDNAČINA POPRAVKE MERENOG PRAVCA

Specijalni slučaj 1

Mereni pravci sa nepoznate tačke r
na nepoznatu tačku i i obratno



Jednačine popravaka su

$$\upsilon_{ir} = a_{ir}dx_i + b_{ir}dy_i + a_{ri}dx_r + b_{ri}dy_r + dz_i + f_{ir}$$

$$\upsilon_{ri} = a_{ri}dx_r + b_{ri}dy_r + a_{ir}dx_i + b_{ir}dy_i + dz_r + f_{ri} \ .$$

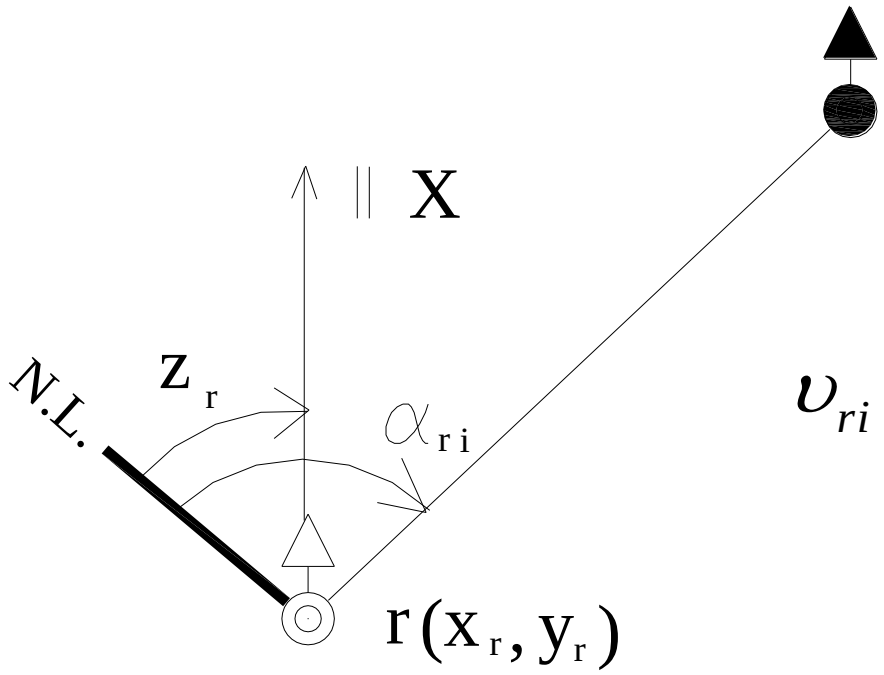
Meren pravac sa nepoznate tačke r na nepoznatu tačku i

7.1 JEDNAČINA POPRAVKE MERENOG PRAVCA

Specijalni slučaj 2

Meren pravac sa nepoznate tačke r
na datu tačku i

Iz opšte jednačine popravke za



$$(dx_i = 0, dy_i = 0)$$

sledi

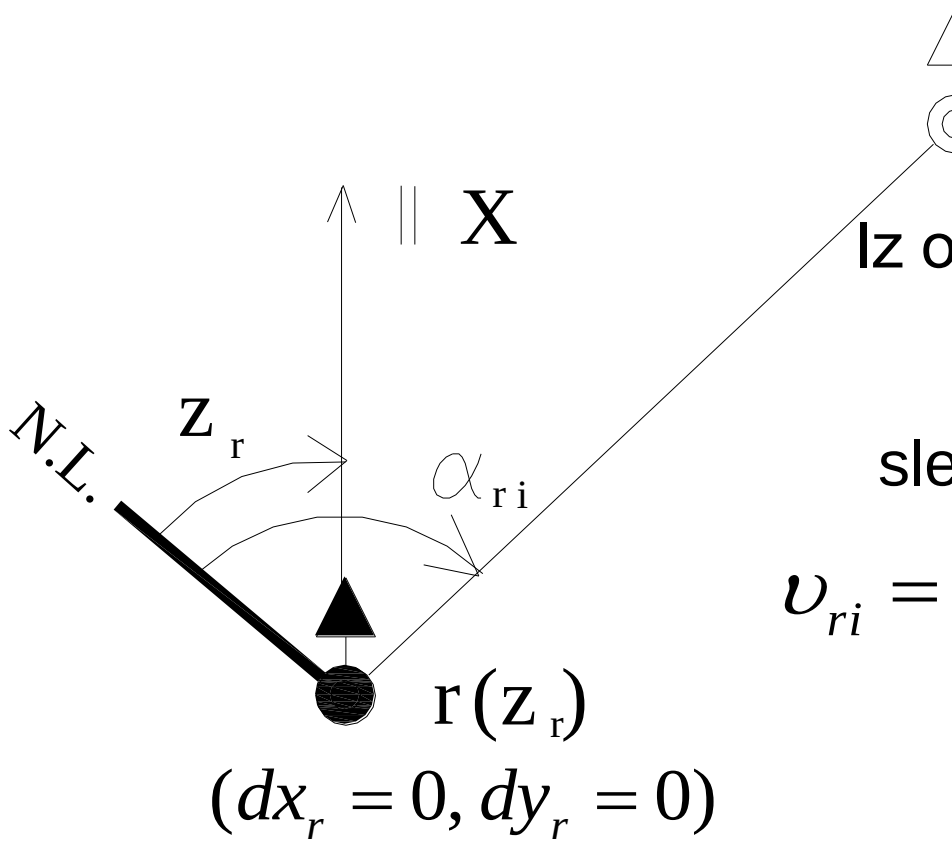
$$\upsilon_{ri} = a_{ri}dx_r + b_{ri}dy_r + dz_r + f_{ri}\,.$$

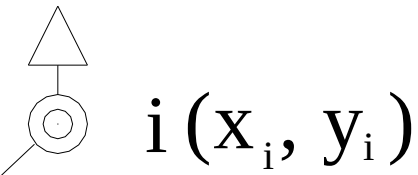
Meren pravac sa nepoznate tačke r na datu tačku i

7.1 JEDNAČINA POPRAVKE MERENOG PRAVCA

Specijalni slučaj 2

Meren pravac sa date tačke r
na nepoznatu tačku i





Iz opšte jednačine popravke za

$$(dx_r = 0, dy_r = 0)$$

sledi

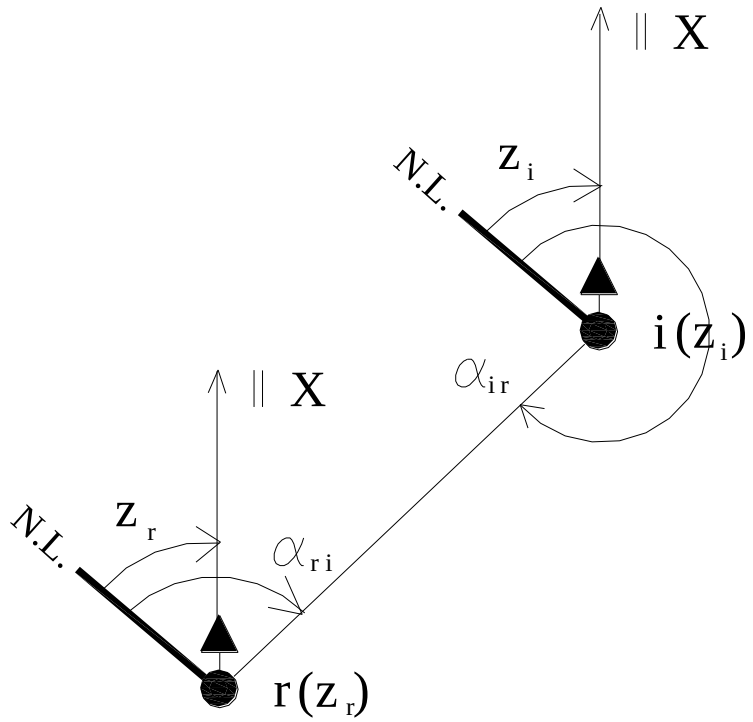
$$\upsilon_{ri} = a_{ir}dx_i + b_{ir}dy_i + dz_r + f_{ri}\,.$$

Meren pravac sa date tačke r na nepoznatu tačku i

7.1 JEDNAČINA POPRAVKE MERENOG PRAVCA

Specijalni slučaj 3

Meren pravac sa date tačke r na datu tačku i i obratno



Iz opšte jednačine popravke za

$$(dx_i = 0, dy_i = 0)$$
$$(dx_r = 0, dy_r = 0)$$

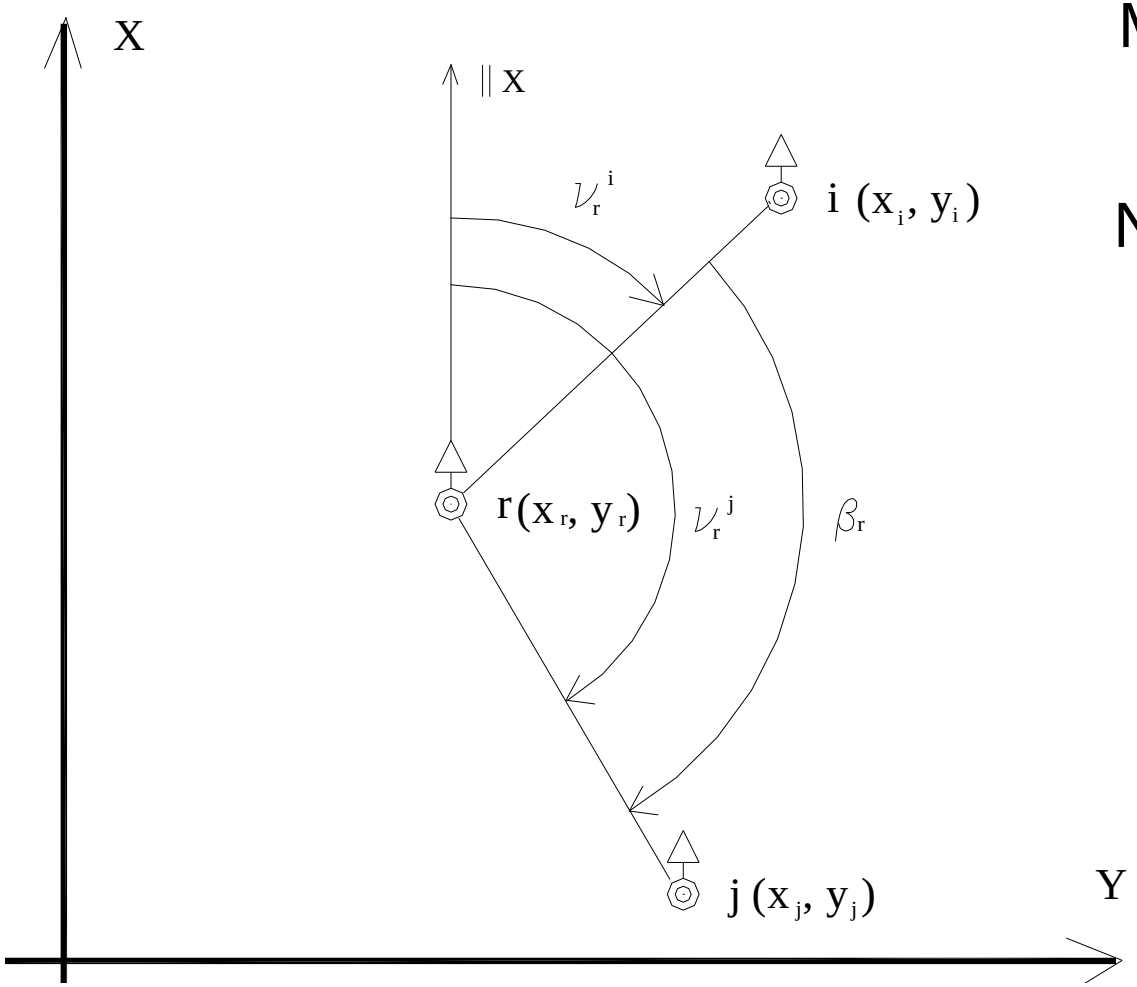
sledi

$$\upsilon_{ir} = dz_i + f_{ir}$$

$$\upsilon_{ri} = dz_r + f_{ri}$$

Meren pravac sa date tačke r na datu tačku i

7.2 JEDNAČINA POPRAVKE MERENOG UGLA



Meren ugao β_r na stanici r

Meren ugao: β_r

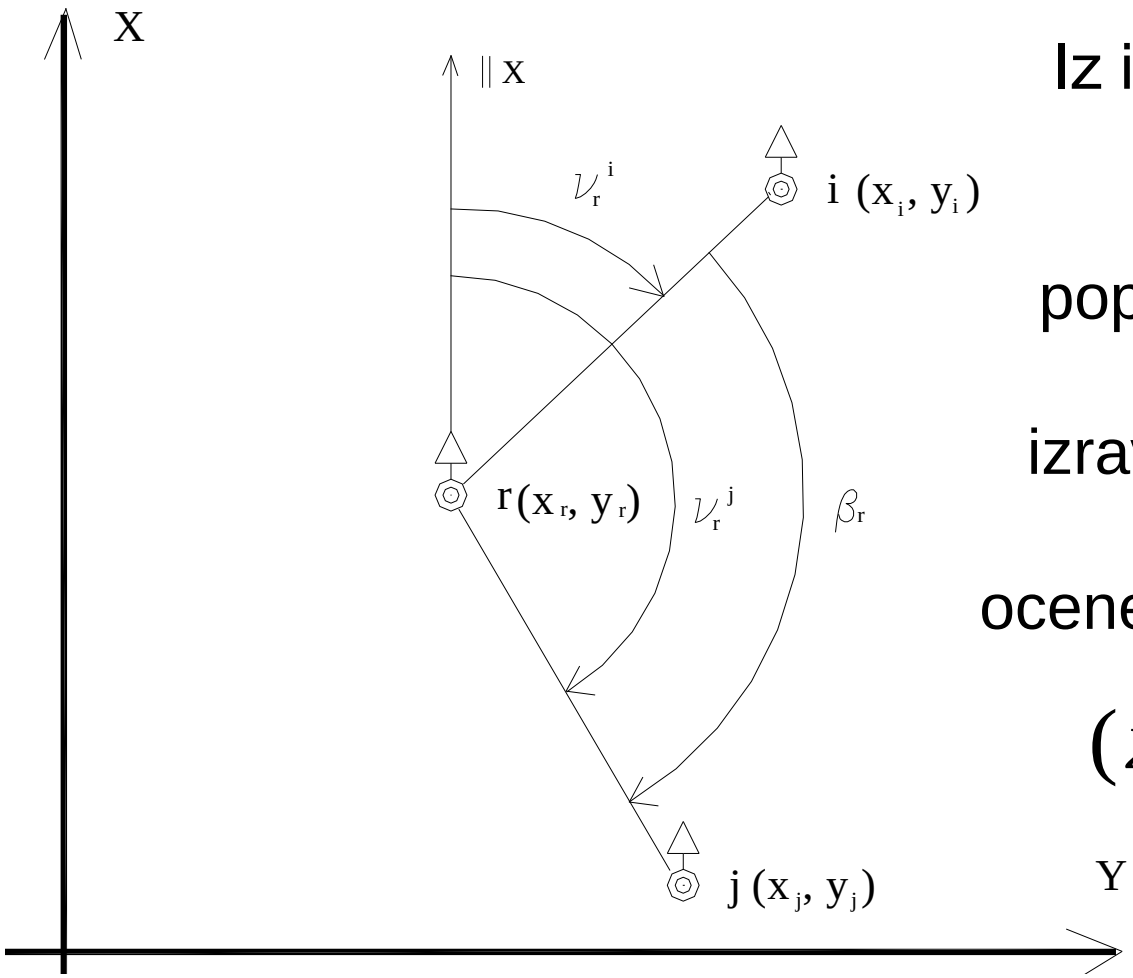
Nepoznati parametri:

$$r(x_r, y_r)$$

$$i(x_i, y_i)$$

$$j(x_j, y_j)$$

7.2 JEDNAČINA POPRAVKE MERENOG UGLA



Meren ugao β_r na stanici r

Iz izravnanja se određuju:

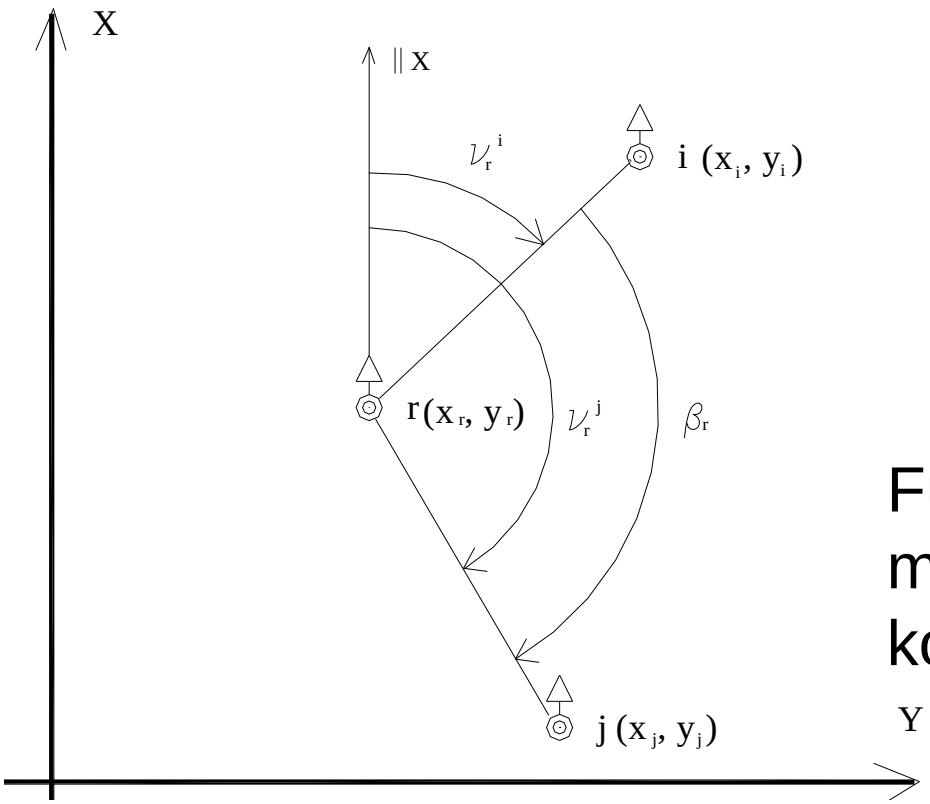
popravka merenog ugla υ_r

izravnata vrednost ugla $\hat{\beta}_r$

ocene nepoznatih parametara

$$(\hat{x}_r, \hat{y}_r, \hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{x}_j, \hat{y}_j)$$

7.2 JEDNAČINA POPRAVKE MERENOG UGLA



Izravnata vrednosti ugla $\hat{\beta}_r$ je

$$\hat{\beta}_r = \beta_r + \upsilon_r$$

Funkcionalna veza između merenog ugla i nepoznatih koordinata tačaka je

$$\beta_r + \upsilon_r = \nu_{rj} - \nu_{ri} = arctg\,\frac{\hat{y}_j - \hat{y}_r}{\hat{x}_j - \hat{x}_r} - arctg\,\frac{\hat{y}_i - \hat{y}_r}{\hat{x}_i - \hat{x}_r} = F(\hat{x}_r, \hat{y}_r, \hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{x}_j, \hat{y}_j) \quad (1)$$

7.2 JEDNAČINA POPRAVKE MERENOG UGLA

Direkcioni uglovi se mogu izraziti u obliku Tajlorov reda

$$v_{rj} = v_{rj}^{o} + a_{rj}dx_r + b_{rj}dy_r + a_{jr}dx_j + b_{jr}dy_j \qquad (2)$$

$$v_{ri} = v_{ri}^{o} + a_{ri}dx_r + b_{ri}dy_r + a_{ir}dx_i + b_{ir}dy_i \qquad (3)$$

Zamenom *(2)* i *(3)* u *(1)* dobija se opšta jednačina popravke za mereni ugao

$$\upsilon_r = \left(a_{rj} - a_{ri}\right)dx_r + \left(b_{rj} - b_{ri}\right)dy_r + a_{jr}dx_j + b_{jr}dy_j - a_{ir}dx_i - b_{ir}dy_i + f_r$$

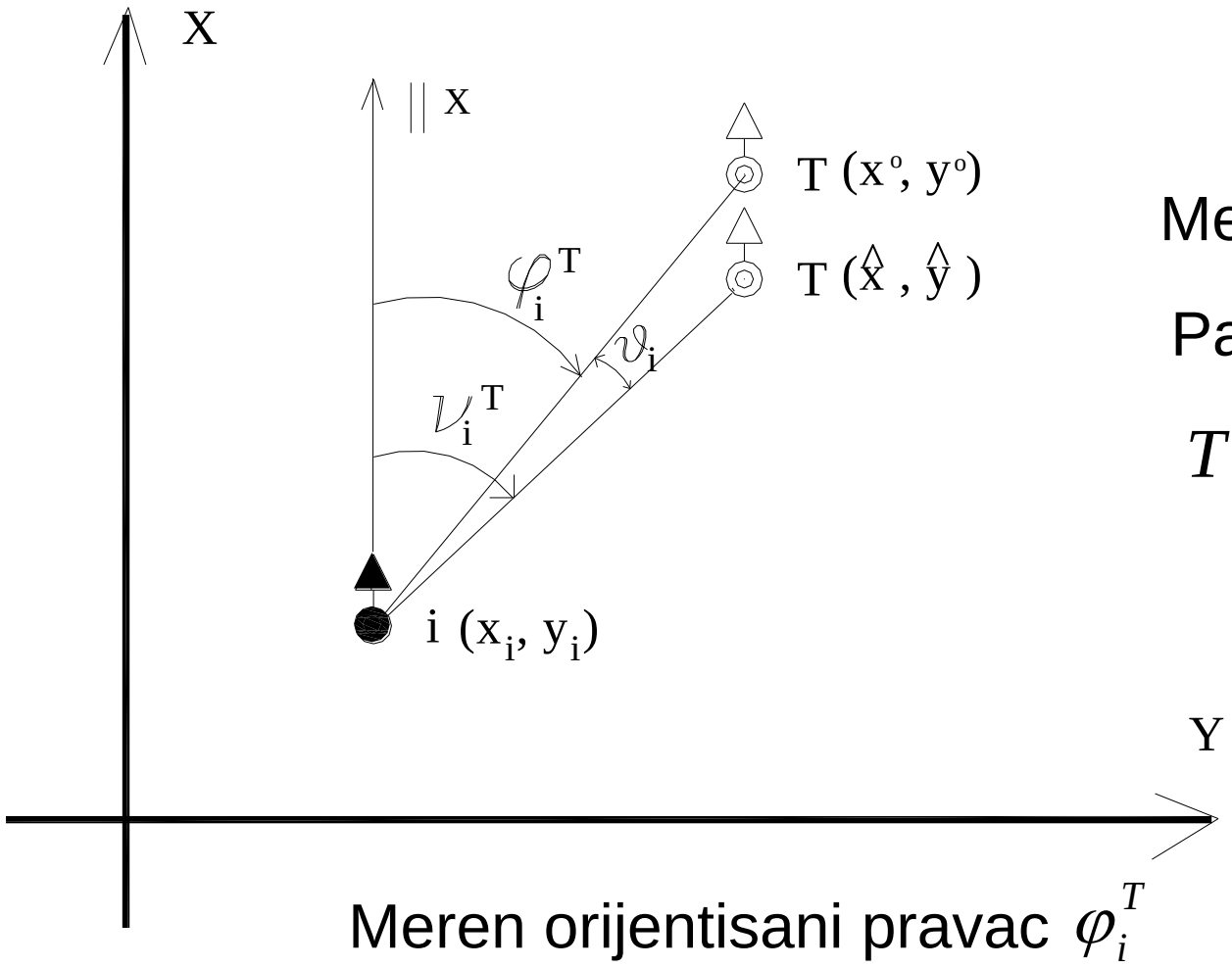
gde je slobodni član

$$f_r = \left(v_{rj}^{o} - v_{ri}^{o}\right) - \beta_r = P - M$$

7.2 JEDNAČINA POPRAVKE MERENOG UGLA

Date tačke	Jednačine popravaka
r $dx_r = dy_r = 0$	$\upsilon_r = a_{jr}dx_j + b_{jr}dy_j - a_{ir}dx_i - b_{ir}dy_i + f_r$ $f_r = \left(v_{rj}^o - v_{rj}^o\right) - \beta_r$
i $dx_i = dy_i = 0$	$\upsilon_r = \left(a_{rj} - a_{ri}\right)dx_r + \left(b_{rj} - b_{ri}\right)dy_r + a_{jr}dx_j + b_{jr}dy_j + f_r$ $f_r = \left(v_{rj}^o - v_{ri}^o\right) - \beta_r$
j $dx_j = dy_j = 0$	$\upsilon_r = \left(a_{rj} - a_{ri}\right)dx_r + \left(b_{rj} - a_{ri}\right)dy_r - a_{ir}dx_i - b_{ir}dy_i + f_r$ $f_r = \left(v_{rj}^o - v_{ri}^o\right) - \beta_r$
r i i $dx_r = dy_r = 0$ $dx_i = dy_i = 0$	$\upsilon_r = a_{jr}dx_j + b_{jr}dy_j + f_r$ $f_r = \left(v_{rj}^o - v_{ri}^o\right) - \beta_r$
r i j $dx_r = dy_r = 0$ $dx_j = dy_j = 0$	$\upsilon_r = -a_{ir}dx_i - b_{ir}dy_i + f_r$ $f_r = \left(v_{rj}^o - v_{ri}^o\right) - \beta_r$
i i j $dx_i = dy_i = 0$ $dx_j = dy_j = 0$	$\upsilon_r = \left(a_{rj} - a_{ri}\right)dx_r + \left(b_{rj} - b_{ri}\right)dy_r + f_r$ $f_r = \left(v_{rj}^o - v_{ri}^o\right) - \beta_r$

7.3 JEDNAČINA POPRAVKE ORIJENTISANOG PRAVCA



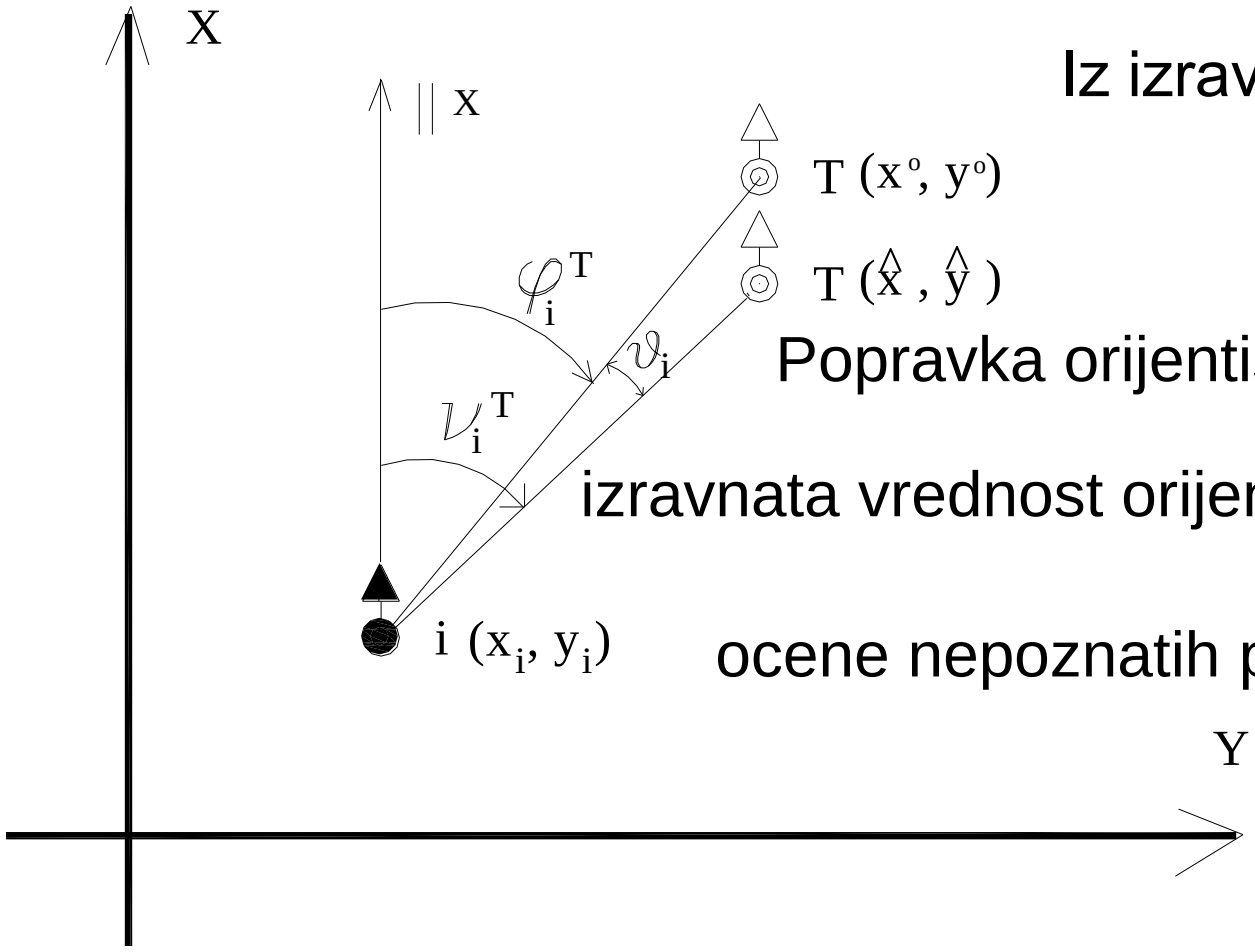
Mereno: φ_i^T

Parametri:

$T(x, y)$

Meren orijentisani pravac φ_i^T

7.3 JEDNAČINA POPRAVKE ORIJENTISANOG PRAVCA



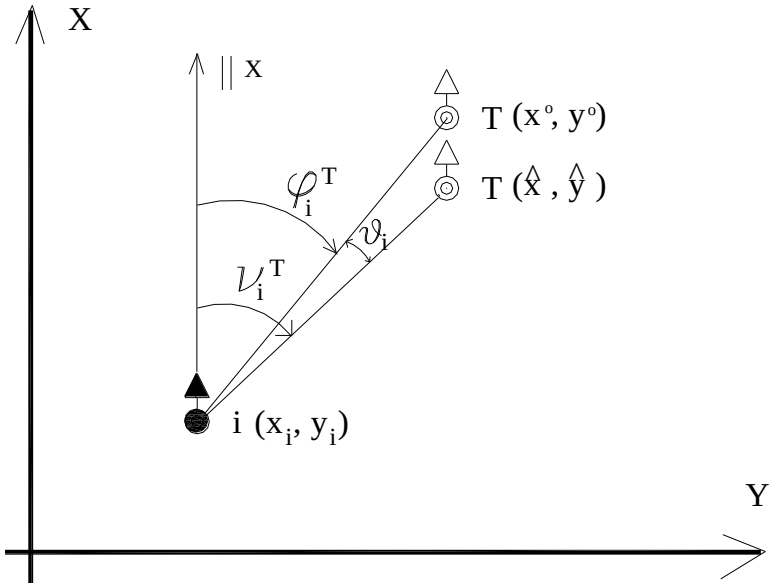
Iz izravnanja se određuje:

Popravka orijentisanog pravca υ_i

izravnata vrednost orijentisanog pravca $\hat{\varphi}_i$

ocene nepoznatih parametara $T\,(\hat{x}, \hat{y})$

7.3 JEDNAČINA POPRAVKE ORIJENTISANOG PRAVCA



Izravnata vrednost orijentisanog pravca je

$$\hat{\varphi}_i^T = \varphi_i^T + v_i$$

Funkcionalna veza između merenog orijentisanog pravca i nepoznatih parametara je

$$\hat{\varphi}_i^T = \varphi_i^T + v_i \pm 180 = v_T^i = arctg\frac{y_i - \hat{y}}{x_i - \hat{x}} = F_i(\hat{x}, \hat{y})$$

ili važi

$$v_i = v_T^i - (\varphi_i^T \pm 180) \qquad (1)$$

7.3 JEDNAČINA POPRAVKE ORIJENTISANOG PRAVCA

Razvjanjem u Tajlorov red oblika

$$v_{Ti} = v_{Ti}^{o} + a_{Ti}dx + b_{Ti}dy \tag{2}$$

i zamenom (2) u (1) dobija se jednačina popravke orijentisanog pravca

$$v_i = a_{Ti}dx + b_{Ti}dy + f_i$$

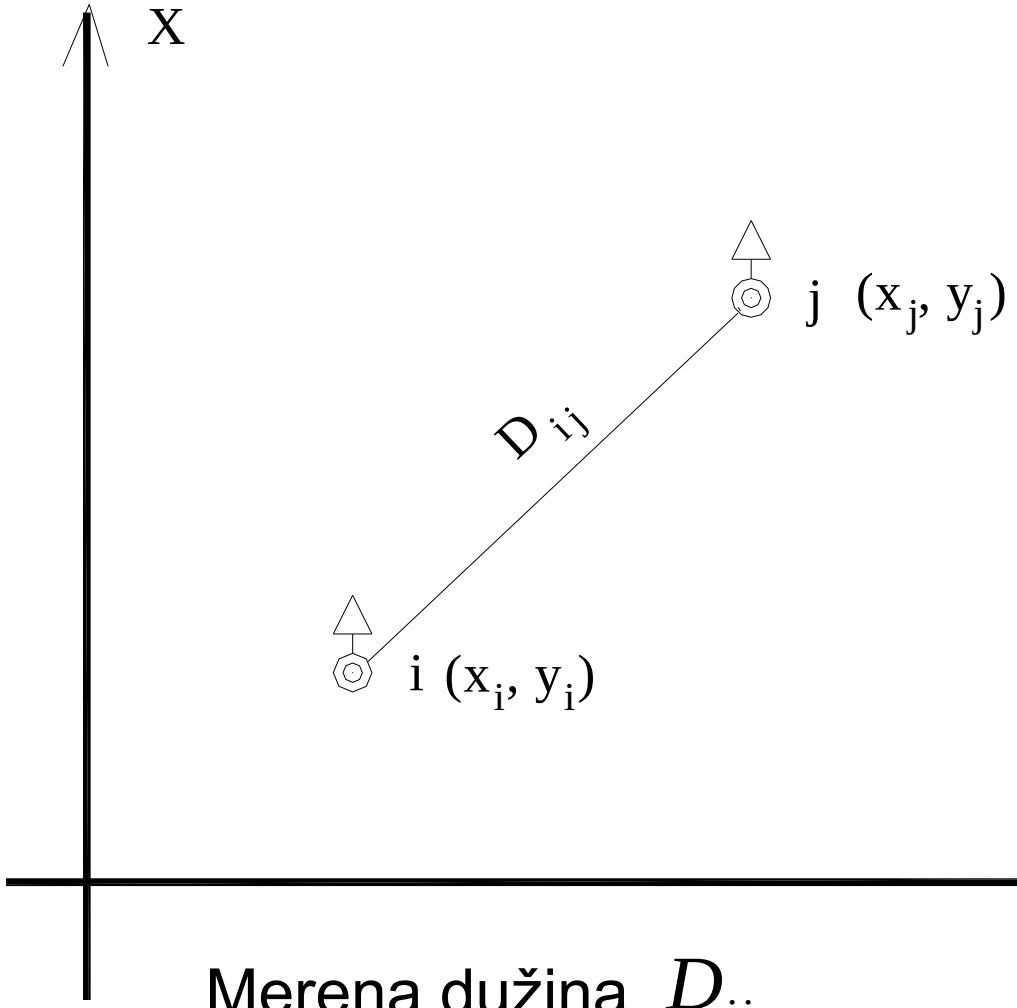
gde je:

$$a_{Ti} = \frac{\partial F}{\partial x_T^o} = \rho \cdot \frac{sin\, v_{Ti}^o}{D_{Ti}^o}$$

$$b_{Ti} = \frac{\partial F}{\partial y_T^o} = -\rho \cdot \frac{cos\, v_{Ti}^o}{D_{Ti}^o}$$

$$f_i = v_{Ti}^o - \left(\varphi_i^T \pm 180\right)$$

7.2 JEDNAČINA POPRAVKE MERENE DUŽINE



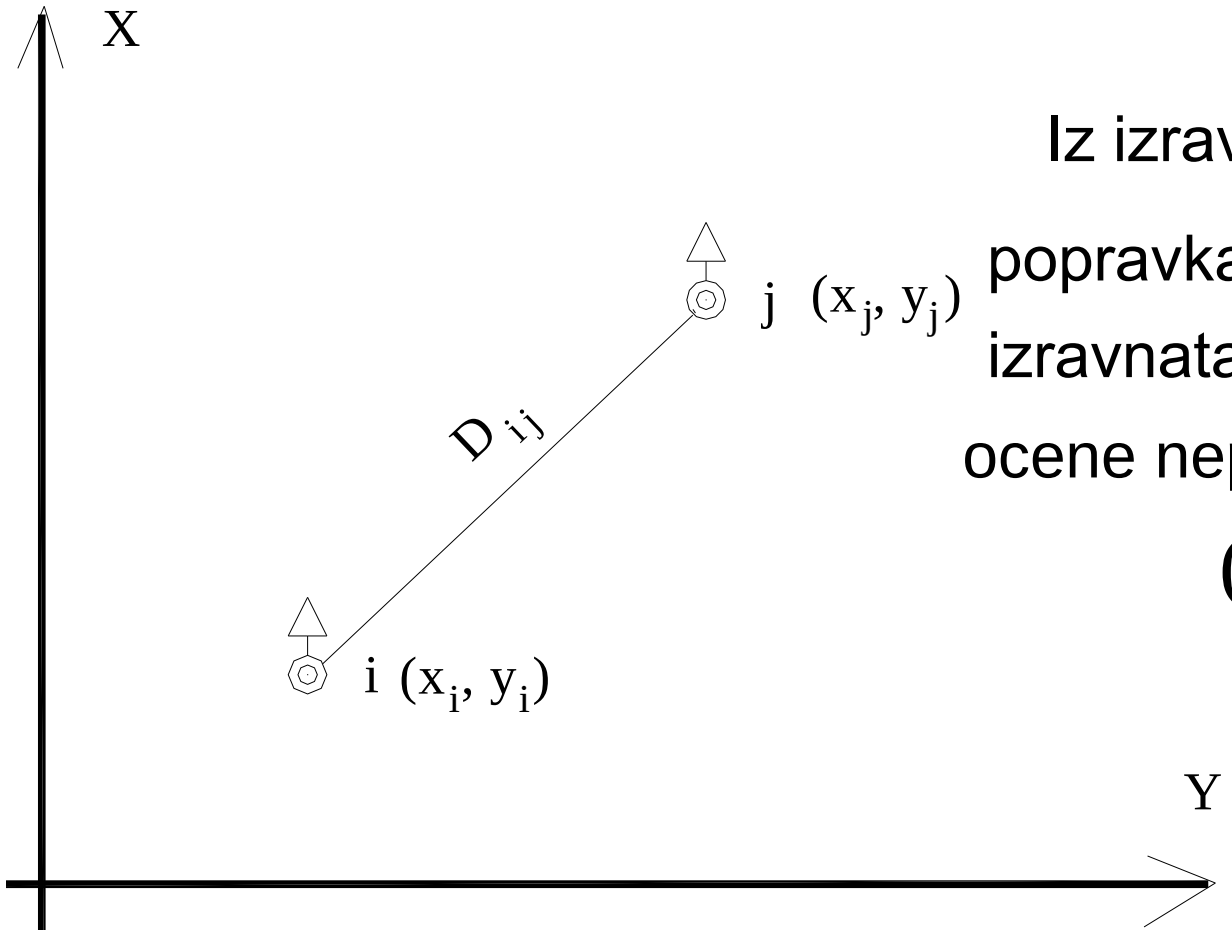
Mereno: D_{ij}

Parametri:

$i(x_i, y_i)$ $j(x_j, y_j)$

Merena dužina D_{ij}

7.2 JEDNAČINA POPRAVKE MERENE DUŽINE



Merena dužina D_{ij}

Iz izravnanja se određuje:

popravka merene dužine υ_{ij}

izravnata vrednost dužine $\hat{D}_{ij}$

ocene nepoznatih parametara

$$(\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{x}_j, \hat{y}_j)$$

7.4 JEDNAČINA POPRAVKE MERENE DUŽINE

Izravnata vrednost dužine je

$$\hat{D}_{ij} = D_{ij} + \upsilon_{ij}$$

a funkcionalna veza

$$D_{ij} + \upsilon_{ij} = \sqrt{\left(\hat{x}_j - \hat{x}_i\right)^2 + \left(\hat{y}_j - \hat{y}_i\right)^2} = F\left(\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{x}_j, \hat{y}_j\right)$$

Razvijanjem u Tajlorov red oblika

$$D_{ij} + \upsilon_{ij} = F\left(x_i^o, y_i^o, x_j^o, y_j^o\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_o dx_i + \left(\frac{\partial F}{\partial y_i}\right)_o dy_i + \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right) dx_j + \left(\frac{\partial F}{\partial y_j}\right)_o dy_j$$

7.4 JEDNAČINA POPRAVKE MERENE DUŽINE

gde je

$$D_{ij}^{o} = F\left(x_i^o, y_i^o x_j^o, y_j^o\right) = \sqrt{\left(x_j^o - x_i^o\right)^2 + \left(y_j^o - y_i^o\right)^2}$$

dobijaju se koeficijenti ili parcijalni izvodi funkcije

$$a_{ij} = \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_0 = -\frac{2\left(x_j^o - x_i^o\right)}{2\sqrt{\left(x_j^o - x_i^o\right)^2 + \left(y_j^o - y_i^o\right)^2}} = -\frac{\left(x_j^o - x_i^o\right)}{D_{ij}^o} = -\cos \nu_{ij}^o$$

$$b_{ij} = \left(\frac{\partial F}{\partial y_i}\right)_0 = -\frac{2\left(y_j^o - y_i^o\right)}{2\sqrt{\left(x_j^o - x_i^o\right)^2 + \left(y_j^o - y_i^o\right)^2}} = -\frac{\left(y_j^o - y_i^o\right)}{D_{ij}^o} = -\sin \nu_{ij}^o$$

$$a_{ji} = \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)_0 = -a_{ij} \qquad b_{ji} = \left(\frac{\partial F}{\partial y_i}\right)_0 = -b_{ij}$$

7.4 JEDNAČINA POPRAVKE MERENE DUŽINE

Opšta jednačina popravke za merene dužine je oblika

$$\upsilon_{ij} = a_{ij}dx_i + b_{ij}dy_i + a_{ji}dx_j + b_{ji}dy_j + f_{ij}$$

gde je

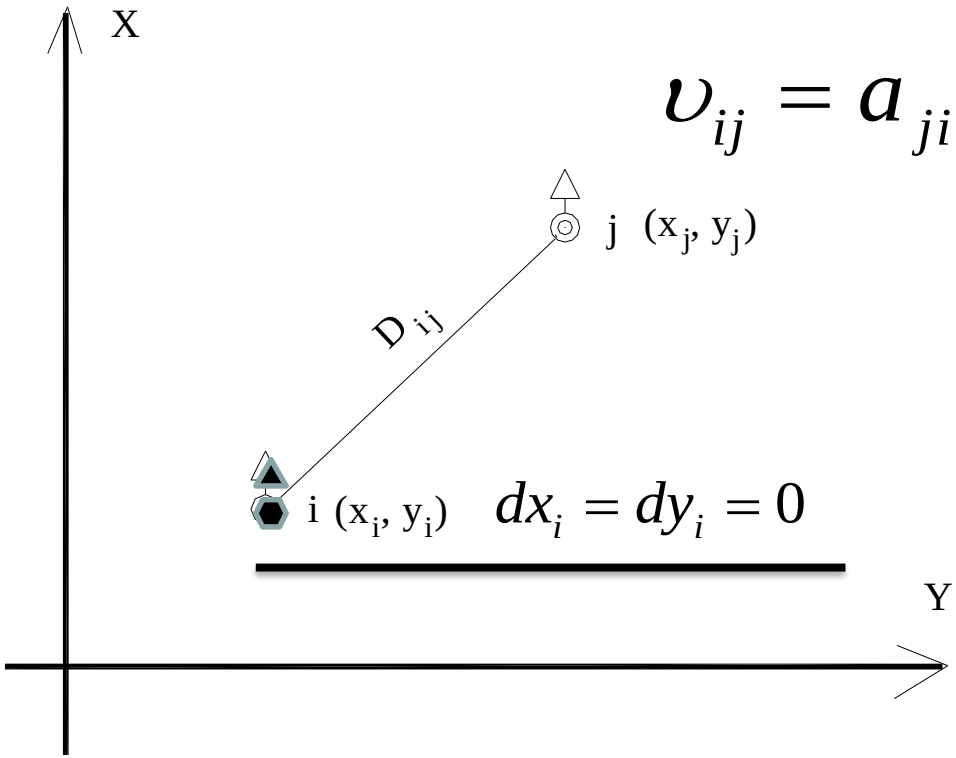
$$f_{ij} = D_{ij}^{o} - D_{ij} = P - M$$

7.4 JEDNAČINA POPRAVKE MERENE DUŽINE

Ako je i data tačka onda je $(dx_i = dy_i = 0)$

pa opšta jednačina dobija oblik

$$\upsilon_{ij} = a_{ji}dx_j + b_{ji}dy_j + f_{ij}$$



7.4 JEDNAČINA POPRAVKE MERENE DUŽINE

Ako je j data tačka, onda je $(dx_j = dy_j = 0)$

pa opšta jednačina dobija oblik

$$\upsilon_{ij} = a_{ij}dx_i + b_{ij}dy_i + f_{ij}$$

