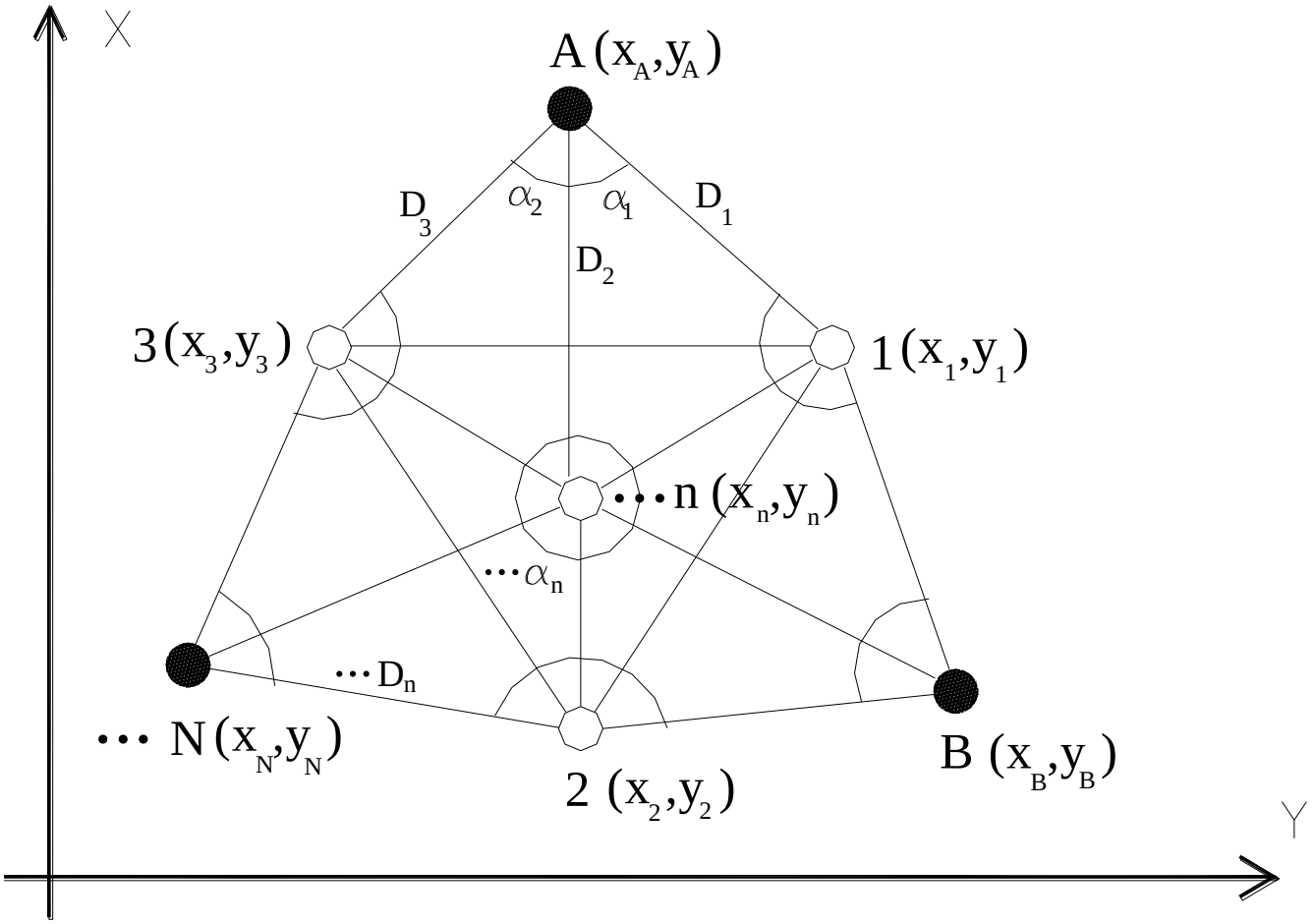
6. IZRAVNANJE PO METODI POSREDNIH MERENJA

6.1 DATE I MERENE VELIČINE

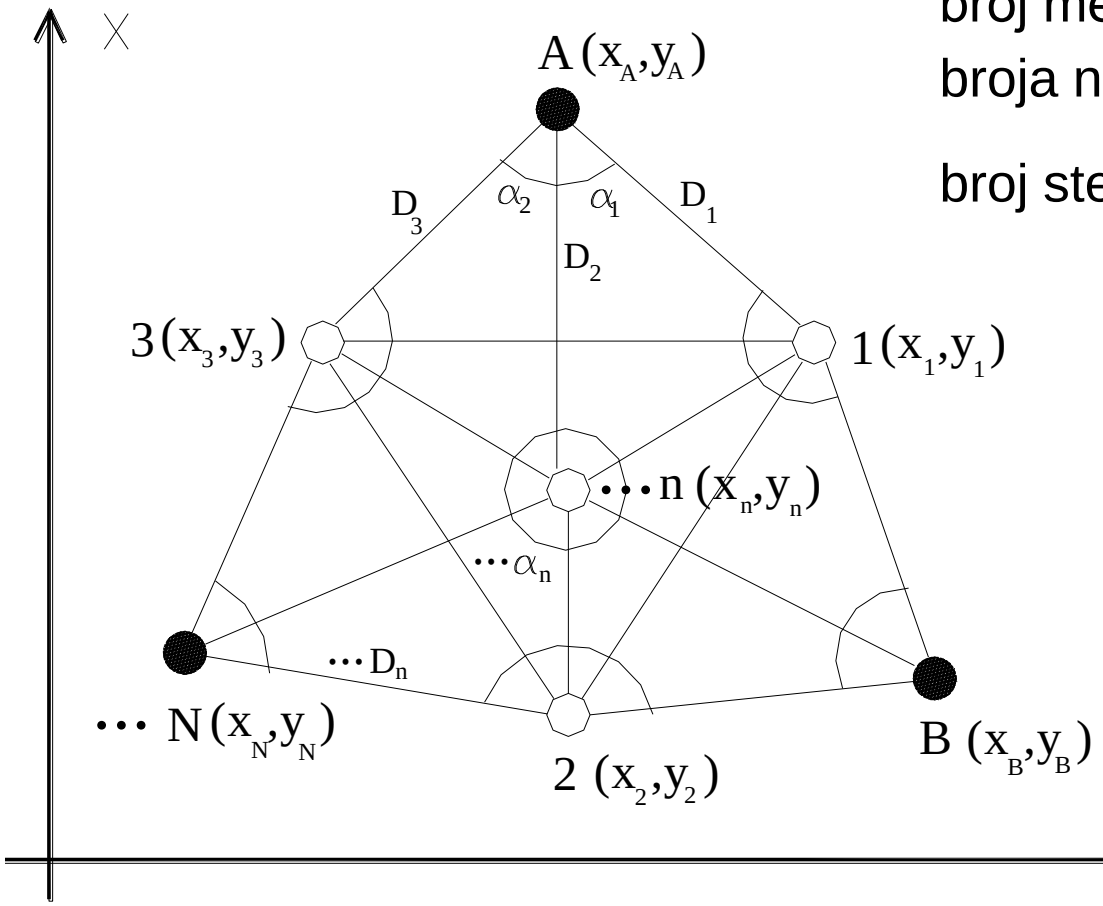


Date veličine $x_i, y_i \ (i = A, B, \ldots, N)$, *merene dužine* $D_i \ (i = 1, 2, \ldots, n_D)$,

mereni uglovi $\alpha_i \ (i = 1, 2, \ldots, n_\alpha)$ *i nepoznati parametri* $x_i, y_i \ (i = 1, 2, \ldots, u)$.

6.1 DATE I MERENE VELIČINE

SUVIŠNO MERENE VELIČINE



broj merenih veličina n

broja nepoznatih parametara u

broj stepeni slobode $r = n - u$

Uvek je ispunjeno

$$(n > u)$$

6.2 FUNKCIONALNI I STOHASTIČKI MODEL

Kod modela posrednog izravnanja nepoznati parametri

$$x, y, \ldots, t$$

određuju se na osnovu niza merenih veličina

$$l_1, l_2, \ldots, l_n$$

koje slede Normalnu raspodelu

$$\mathbf{l} \sim N(\boldsymbol{\mu}_\mathbf{l}, \mathbf{K}_\mathbf{l})$$

6.2 FUNKCIONALNI I STOHASTIČKI MODEL

Nepoznati parametri određuju se pod uslovom da suma kvadrata popravaka

$$v_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

bude minimalna

$$\mathbf{v}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{v} = \min$$

ili

$$\mathbf{v}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-\mathbf{1}} \cdot \mathbf{v} = \min$$

6.2 FUNKCIONALNI I STOHASTIČKI MODEL

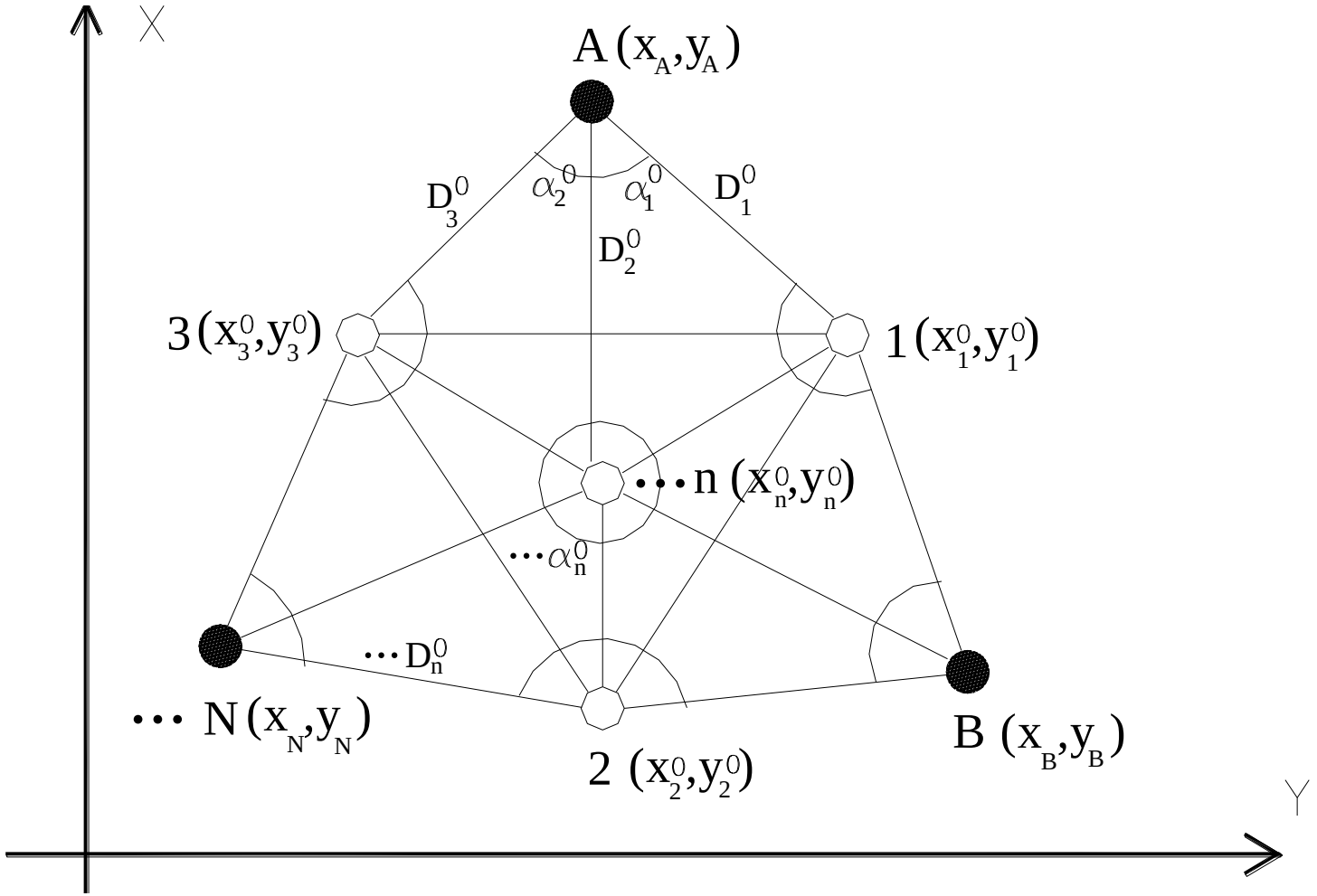
Neka je u cilju određivanja u nepoznatih parametara izmereno n fizičkih veličina. Funkcija veze između nepoznatih parametara i merenih veličina u opštem slučaju je oblika

$$\hat{l}_i = l_i + \upsilon_i = F_i(\hat{x}, \hat{y}, \ldots, \hat{t}) = F_i(x_0 + dx, y_0 + dy, \ldots, t_0 + dt)$$

gde su:

$l_1, l_2, \ldots, l_n$	merene veličine,
$\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_n$	popravke merenih veličina,
$\hat{l}_1, \hat{l}_2, \ldots, \hat{l}_n$	izravnate vrednosti (ocene) merenih veličina,
$x, y, \ldots, t$	istinite vrednosti nepoznatih parametara,
$\hat{x} = x_0 + dx$	
$\hat{y} = y_0 + dy$	izravnate vrednosti (ocene) parametara,
. . .	
$\hat{t} = t_0 + dt$	

6.2 FUNKCIONALNI I STOHASTIČKI MODEL



Privremene vrednosti parametara x_i^0, y_i^0 *dužina* D_i^0 *i uglova* α_i^0

6.2 FUNKCIONALNI I STOHASTIČKI MODEL

Ako su funkcije nelinearnog oblika, onda se svode na linearni oblik razvijanjem u Tajlorov red u okolini približnih vrednosti parametara $x_0, y_0, \ldots, t_0$

$$l_i + \upsilon_i = F_i(x_0, y_0, \ldots, t_0) + \frac{\partial F_i}{\partial x_0} dx + \frac{\partial F_i}{\partial y_0} dy + \ldots. + \frac{\partial F_i}{\partial t_0} dt$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

pa slede linearne jednačine popravaka oblika

$$\upsilon_i = a_i \cdot dx + b_i \cdot dy + \ldots + u_i \cdot dt + f_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

6.2 FUNKCIONALNI I STOHASTIČKI MODEL

Sistem linearnih jednačina popravaka je oblika

$$\upsilon_1 = a_1 \cdot dx + b_1 \cdot dy + ... + u_1 \cdot dt + f_1$$

$$\upsilon_2 = a_2 \cdot dx + b_2 \cdot dy + ... + u_2 \cdot dt + f_2$$

$$\vdots$$

$$\upsilon_n = a_n \cdot dx + b_n \cdot dy + ... + u_n \cdot dt + f_n$$

n

u

$(n > u)$

6.2 FUNKCIONALNI I STOHASTIČKI MODEL

gde su:

parcijalni izvodi funkcije po nepoznatim parametrima

$$a_i = \frac{\partial F_i}{\partial x_0}$$

$$b_i = \frac{\partial F_i}{\partial y_0} \qquad (i = 1, 2, \ldots, u)$$

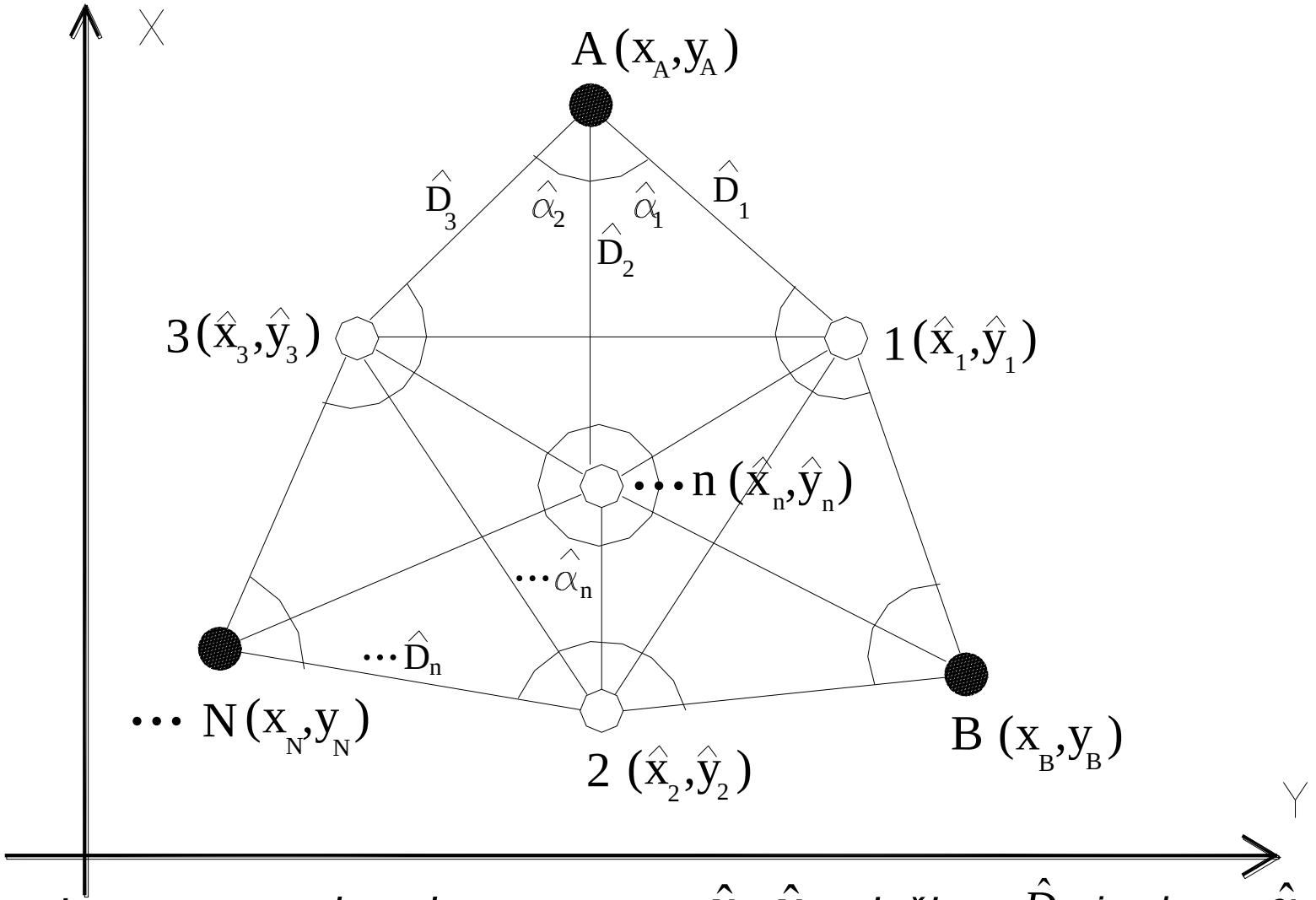
...

$$u_i = \frac{\partial F_i}{\partial t_0}$$

slobodni članovi

$$f_i = F_i(x_0, y_0, \ \ldots \ , t_0) - l_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

6.2 FUNKCIONALNI I STOHASTIČKI MODEL



Izravnate vrednosti parametara $\hat{x}_i, \hat{y}_i$ *dužina* $\hat{D}_i$ *i uglova* $\hat{\alpha}_i$

6.2 FUNKCIONALNI I STOHASTIČKI MODEL

Jednačine popravaka u matričnom obliku su

$$\begin{pmatrix} \upsilon_1 \\ \upsilon_2 \\ \vdots \\ \upsilon_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & u_1 \\ a_2 & b_2 & \cdots & u_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & b_n & \cdots & u_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ \vdots \\ dt \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

ili

6.2 FUNKCIONALNI I STOHASTIČKI MODEL

funkcionalni model

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{f}$$

gde su:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \upsilon_1 \\ \upsilon_2 \\ \vdots \\ \upsilon_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & u_1 \\ a_2 & b_2 & \cdots & u_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & b_n & \cdots & u_n \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ \vdots \\ dt \end{pmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

6.2 FUNKCIONALNI I STOHASTIČKI MODEL

Prethodno definisan linearni funkcionalni model posrednog izravnanja i stohastički model predstavljaju se u obliku:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{f}$$ Linearni funkcionalni model

(1)

$$\mathbf{K_l} = \sigma_o^2 \cdot \mathbf{Q_l}$$ Stohastički model

6.3 PRIMENA METODA NAJMANJIH KVADRATA

Kada su merene veličine stohastički nezavisne primenjuje se metod najmanjih kvadrata

$$\mathbf{v}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{v} = \min \qquad (2)$$

Diferenciranjem (2) i iznalaženjem minimuma, sledi

$$\mathbf{dv}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{dv} = \mathbf{0}$$

ili kako je

$$(\mathbf{dv}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{v})^{\mathbf{T}} = \mathbf{v}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{dv}$$

6.3 PRIMENA METODA NAJMANJIH KVADRATA

dobija se

$$2 \cdot \mathbf{v}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{dv} = \mathbf{0}$$

odnosno

$$\mathbf{v}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{dv} = \mathbf{0} \qquad (3)$$

Diferenciranjem linearnog funkcionalnog modela *(1)*

$$\mathbf{dv} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{d\hat{x}} \qquad (4)$$

i zamenom *(4)* u *(3)* sledi

$$\mathbf{v}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{d\hat{x}} = \mathbf{0}$$

odnosno

$$\mathbf{v}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

ili nakon transpozicije

$$\mathbf{A}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \qquad (5)$$

6.3 PRIMENA METODA NAJMANJIH KVADRATA

Kada se *(1)* uvrsti u *(5)* dobijaju se normalne jednačine

$$\mathbf{A}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{l}} \cdot (\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{f}) = \mathbf{0}$$

odnosno

$$\mathbf{A}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

ili kratko

$$\mathbf{N} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

Normalne jednačine

(6)

gde je:

6.3 PRIMENA METODA NAJMANJIH KVADRATA

matrica koeficijenata normalnih jednačina

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{P_l} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} p_i a_i^2 & \sum_{i=1}^{n} p_i a_i b_i & \dots & \sum_{i=1}^{n} p_i a_i u_i \\ \sum_{i=1}^{n} p_i b_i a_i & \sum_{i=1}^{n} p_i b_i^2 & \dots & \sum_{i=1}^{n} p_i b_i u_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^{n} p_i u_i a_i & \sum_{i=1}^{n} p_i u_i b_i & \dots & \sum_{i=1}^{n} p_i u_i^2 \end{pmatrix}_{u,u}$$

6.3 PRIMENA METODA NAJMANJIH KVADRATA

vektor koeficijenata slobodnih članova

$$\mathbf{n} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} p_i a_i f_i \\ \sum_{i=1}^{n} p_i b_i f_i \\ \cdots \\ \sum_{i=1}^{n} p_i u_i f \end{pmatrix}_{u,1}$$

6.3 PRIMENA METODA NAJMANJIH KVADRATA

Iz *(6)* određuje se vektor nepoznatih parametara

$$\hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{N}^{-1} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{n}$$

gde je

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^{-1}$$

inverzna matrica $\mathbf{N}^{-1}$ identična matrici kofaktora $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$

6.3 PRIMENA METODA NAJMANJIH KVADRATA

matrica kofaktora nepoznatih parametara

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} Q_{x_1x_1} & Q_{x_1x_2} & \cdots & Q_{x_1x_u} \\ Q_{x_2x_1} & Q_{x_2x_2} & \cdots & Q_{x_2x_u} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{x_ux_1} & Q_{x_ux_2} & \cdots & Q_{x_ux_u} \end{pmatrix}$$

6.4 OCENA TAČNOSTI

VAŽNE RELACIJE

Kada se ne koriste približne vrednosti nepoznatih parametara, jednačine popravaka glase

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l}$$

gde je matematičko očekivanje

$$E(\mathbf{l}) = \mathbf{A} \cdot E(\hat{\mathbf{x}})$$

a vektor popravaka $\mathbf{v}$ može se izraziti u funkciji vektora merenja $\mathbf{l}$

$$\mathbf{v} = [\mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_{\mathbf{l}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_{\mathbf{l}} - \mathbf{I}] \cdot \mathbf{l}$$

6.4 OCENA TAČNOSTI

VAŽNE RELACIJE

Ako se uvedu približne vrednosti nepoznatih parametara, sledi

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot \left(\mathbf{x_0} + \hat{\mathbf{x}} \right) - \mathbf{l} = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{f}$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x_0} - \mathbf{l}$$

gde je matematičko očekivanje

$$E(\mathbf{f}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x_0} - E(\mathbf{l}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x_0} - \mathbf{A} \cdot E(\mathbf{x})$$

6.4 OCENA TAČNOSTI

VAŽNE RELACIJE

Vektor popravaka $\mathbf{v}$ postaje

$$\mathbf{v} = -\mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}_{\mathbf{l}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}_{\mathbf{l}}\mathbf{f} + \mathbf{f} = [\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}_{\mathbf{l}}\mathbf{A})\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}_{\mathbf{l}}](\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}_{\mathbf{0}} - \mathbf{l}) =$$

$$= \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}_{\mathbf{o}} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}_{\mathbf{l}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}_{\mathbf{l}}\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}_{\mathbf{o}} + [\mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}_{\mathbf{l}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}_{\mathbf{l}} - \mathbf{I}]\cdot\mathbf{l}$$

$$\mathbf{v} = [\mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}_{\mathbf{l}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}_{\mathbf{l}} - \mathbf{I}]\cdot\mathbf{l}$$

Kada su merene veličine stohastički zavisne, onda umesto matrice težina treba koristiti matricu kofaktora

$$\mathbf{P}_{\mathbf{l}} = \mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-\mathbf{1}}$$

6.4 OCENA TAČNOSTI

KOVARIJACIONE MATRICE IZRAVNATIH VELIČINA

Vektori $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{l}}$, $\mathbf{v}$ i $\hat{\mathbf{y}}$ mogu se izraziti u funkciji vektora $\mathbf{l}$

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{l}$$

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{l}$$

$$\mathbf{v} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{l}} - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{l}$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{l}$$

6.4 OCENA TAČNOSTI

KOVARIJACIONE MATRICE IZRAVNATIH VELIČINA

Za prethodne vektore obrazuje se zajednički vektor $\mathbf{h}$ oblika

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{l}} \\ \mathbf{v} \\ \hat{\mathbf{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{P} \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{l}} \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{l}} - \mathbf{I} \\ \mathbf{G} \cdot \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{l}} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{l} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{l}$$

Kovarijaciona matrica vektorske funkcije je oblika

$$\mathbf{K}_{\mathbf{h}} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{K}_{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{H}^{\mathbf{T}} = s_o^2 \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{Q}_{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{H}^{\mathbf{T}} = s_o^2 \cdot \mathbf{Q}_{\mathbf{H}}$$

gde je matrica kofaktora

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{H}} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{Q}_{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{H}^{\mathbf{T}}$$

6.4 OCENA TAČNOSTI

KOVARIJACIONE MATRICE IZRAVNATIH VELIČINA

odnosno

$$\mathbf{Q}_{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}} & \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{l}} & \mathbf{Q}_{\hat{x}v} & \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{y}} \\ \mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{x}} & \mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}} & \mathbf{Q}_{\hat{l}v} & \mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{y}} \\ \mathbf{Q}_{v\hat{x}} & \mathbf{Q}_{v\hat{l}} & \mathbf{Q}_{vv} & \mathbf{Q}_{v\hat{y}} \\ \mathbf{Q}_{\hat{y}\hat{x}} & \mathbf{Q}_{\hat{y}\hat{l}} & \mathbf{Q}_{\hat{y}v} & \mathbf{Q}_{\hat{y}\hat{y}} \end{pmatrix}$$

6.4 OCENA TAČNOSTI

KOVARIJACIONE MATRICE IZRAVNATIH VELIČINA

ili

$$Q_H = \begin{pmatrix} Q_{\hat{x}\hat{x}} & Q_{\hat{x}\hat{x}}A^T & 0 & Q_{\hat{x}\hat{x}}G^T \\ AQ_{\hat{x}\hat{x}} & AQ_{\hat{x}\hat{x}}A^T & 0 & AQ_{\hat{x}\hat{x}}G^T \\ 0 & 0 & Q_{ll} - AQ_{\hat{x}\hat{x}}A^T & 0 \\ GQ_{\hat{x}\hat{x}} & GQ_{\hat{x}\hat{x}}A^T & 0 & GQ_{\hat{x}\hat{x}}G^T \end{pmatrix}$$

6.4 OCENA TAČNOSTI

1. Eksperimentalna standardna devijacija jedinice težine (a posteriori standarna devijacija)

$$s_o = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^{\mathbf{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1}\mathbf{v}}{trag\,\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1}\mathbf{Q}_{\mathbf{v}}}} = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^{\mathbf{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1}\mathbf{v}}{n-u}}$$

gde je

$$\mathbf{v}^{\mathbf{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1}\mathbf{v} = \mathbf{f}^{\mathbf{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1}\mathbf{f} + \mathbf{n}^{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{f}^{\mathbf{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{v}}\mathbf{f}$$

Standardna devijacija jedinice težine daje informacije o globalnoj tačnosti merenih veličina koje učestvuju u izravnanju.

6.4 OCENA TAČNOSTI

2. Matrice kofaktora veličina $\mathbf{l}$, $\hat{\mathbf{l}}$, $\mathbf{v}$

Ako je $\mathbf{l} = \hat{\mathbf{l}} - \mathbf{v}$ onda je matrica kofaktora

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{l}} = \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}} + \mathbf{Q}_{\mathbf{v}} - 2\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}\mathbf{v}} = \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}} + \mathbf{Q}_{\mathbf{v}}$$

jer je $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}\mathbf{v}} = \mathbf{0}$

3. Trag proizvoda matrica $\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1}\mathbf{Q}_{\mathbf{v}}$

$$trag\,\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1}\mathbf{Q}_{\mathbf{v}} = trag\,\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1}(\mathbf{Q}_{\mathbf{l}} - \mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}) =$$

$$= trag\,\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1}\mathbf{Q}_{\mathbf{l}} - trag\,\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1}\mathbf{A} =$$

$$= trag\,\underset{n\cdot n}{\mathbf{I}} - trag\,\mathbf{N}^{-1}\mathbf{N} = trag\,\underset{n\cdot n}{\mathbf{I}} - trag\,\underset{u\cdot u}{\mathbf{I}} = n - u$$

6.4 OCENA TAČNOSTI

4. Trag proizvoda matrica $\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-\mathbf{1}}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}}$

$$trag\,\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-\mathbf{1}}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}} = trag\,\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-\mathbf{1}}(\mathbf{Q}_{\mathbf{l}} - \mathbf{Q}_{\mathbf{v}}) =$$

$$= trag\,\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-\mathbf{1}}\mathbf{Q}_{\mathbf{l}} - trag\,\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-\mathbf{1}}\mathbf{Q}_{\mathbf{v}} =$$

$$= trag\ \underset{n\cdot n}{\mathbf{I}} - (n-u) = n - (n-u) = u$$

5. Kovarijaciona matrica nepoznatih parametara

$$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}} = s_o^2 \cdot \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = s_o^2 \cdot \mathbf{N}^{-\mathbf{1}} = s_o^2 \cdot (\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}_{\mathbf{l}}\mathbf{A})^{-1}$$

6.4 OCENA TAČNOSTI

6. Kovarijaciona matrica izravnatih veličina

$$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{l}}} = s_o^2 \cdot \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}} = s_o^2 \cdot \mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^{\mathbf{T}} = s_o^2 \cdot \mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}_{\mathbf{l}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$$

7. Kovarijaciona matrica popravaka

$$\mathbf{K}_{\mathbf{v}} = s_o^2 \cdot \mathbf{Q}_{\mathbf{v}} = s_o^2 \cdot (\mathbf{Q}_{\mathbf{l}} - \mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^{\mathbf{T}})$$

8. Intervali poverenja

$$\hat{x}_i - t_{r,\alpha/2} \cdot s_{x_i} \le \mu_x \le \hat{x}_i + t_{r,\alpha/2} \cdot s_{x_i}$$

$$\hat{l}_i - t_{r,\alpha/2} \cdot s_{\hat{l}_i} \le \mu_l \le \hat{l}_i + t_{r,\alpha/2} \cdot s_{\hat{l}_i}$$

9. Eksperimentalna standardna devijacija funkcije

$$\sigma_F = s_o \cdot \sqrt{\mathbf{G}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{G}}$$

6.5 ALGORITAM IZRAVNANJA

ALGORITAM IZRAVNANJA

Model izravnanja	
$\mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{f}$	Linearni funkcionalni model.
$\mathbf{K_l} = \sigma_o^2 \cdot \mathbf{Q_l}$	Stohastički model.

6.5 ALGORITAM IZRAVNANJA

Algoritam izravnanja	
$\mathbf{l}^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \dots & l_n \end{pmatrix}_{1 \cdot n}$	Vektor merenih veličina.
$\mathbf{x}^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} x & y & \dots & t \end{pmatrix}_{1 \cdot n}$	Vektor nepoznatih parametara.
$\mathbf{x_0^T} = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & \dots & t_0 \end{pmatrix}_{1 \cdot n}$	Vektor približnih vrednosti nepoznatih parametara.
$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \dots & u_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & u_2 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_n & b_n & \dots & u_n \end{pmatrix}_{n \cdot u}$	Matrica koeficijenata (dizajna).
$\mathbf{P_l} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_n \end{pmatrix}_{n \cdot n}$	Matrica težina merenih veličina.
$\mathbf{f}^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \end{pmatrix}_{1 \cdot n}$	Vektor slobodnih članova.

6.5 ALGORITAM IZRAVNANJA

$\mathbf{N} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{n} = \mathbf{0}$	Normalne jednačine.
$\mathbf{N} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{A}$	Matrica koeficijenata normalnih jednačina.
$\mathbf{n} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{f}$	Vektor slobodnih članova normalnih jednačina.
$\hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{N}^{-\mathbf{1}} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{n}$	Vektor rešenja nepoznatih parametara.

6.5 ALGORITAM IZRAVNANJA

$\mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{f}$	Vektor popravaka merenih veličina.
$\mathbf{v}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{v} = \mathbf{f}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{f} + \mathbf{n}^T \hat{\mathbf{x}}$	Kontrola određivanja vektora $\mathbf{v}$ i $\hat{\mathbf{x}}$.
$\hat{x} = x_0 + dx$ $\hat{y} = y_0 + dy$ . . . $\hat{t} = t_0 + dt$	Izravnate vrednosti (ocene) parametara.
$\hat{l}_i = l_i + v_i$	Izravnate vrednosti merenih veličina.
$L_i = F_i(\hat{x}, \hat{y}, \ldots, \hat{t})$	Izravnate vrednosti merenih veličina.
$L_i = \hat{l}_i$	Definitivna kontrola izravnanja. Ako je $L_i \neq \hat{l}_i$ nekorektno je formiran funkcionalni model.

6.5 ALGORITAM IZRAVNANJA

Ocena tačnosti	
$s_o = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T\mathbf{Q}_l^{-1}\mathbf{v}}{trag\mathbf{Q}_l^{-1}\mathbf{Q}_v}} = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T\mathbf{Q}_l^{-1}\mathbf{v}}{n-u}}$	Eksperimentalna standardna devijacija jedinice težine određena iz izravnanja (a posteriori standarna devijacija).
$s_{x_i} = s_o \cdot \sqrt{Q_{x_i x_i}}$	Eksperimentalna standardne devijacije nepoznatih parametara.
$s_{\hat{l}_i} = s_o \cdot \sqrt{Q_{\hat{l}_i \hat{l}_i}}$	Eksperimentalna standardne devijacije izravnatih veličina.
$s_F = s_o \cdot \sqrt{\mathbf{G}^T \cdot \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{G}}$	Eksperimentalna standardna devijacija funkcije nepoznatih parametara.

6.5 ALGORITAM IZRAVNANJA

Intervali poverenja	
$\hat{x}_i - t_{r,\alpha/2} \cdot s_{x_i} \le \mu_x \le \hat{x}_i + t_{r,\alpha/2} \cdot s_{x_i}$	$z_1 s_o \le \sigma_o \le z_2 s_o$
$F - t_{r,\alpha/2} \cdot s_F \le \mu_F \le F + t_{r,\alpha/2} \cdot s_F$ Po argumentu α i $r = n - u$ iz tabele IV uzima se broj $t_{r,\alpha/2}$.	$z_1 s_F \le \sigma_F \le z_2 s_F$ Po argumentu $p = 1 - \alpha$ i $r = n - u$ iz tabele III uzimaju se brojevi z_1 i z_2.