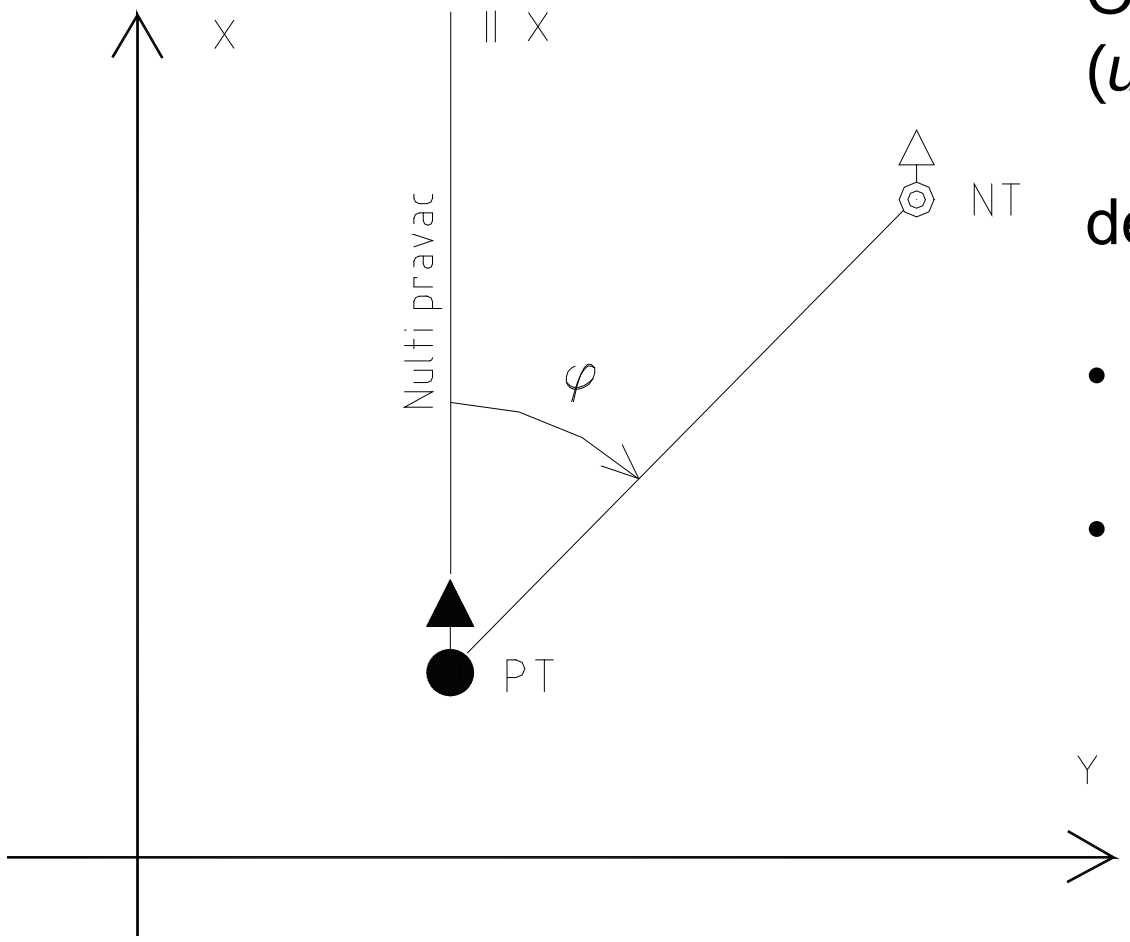
5. METODE ODREĐIVANJA KOORDINATA TAČAKA

5.1 ORIJENTACIJA PRAVACA



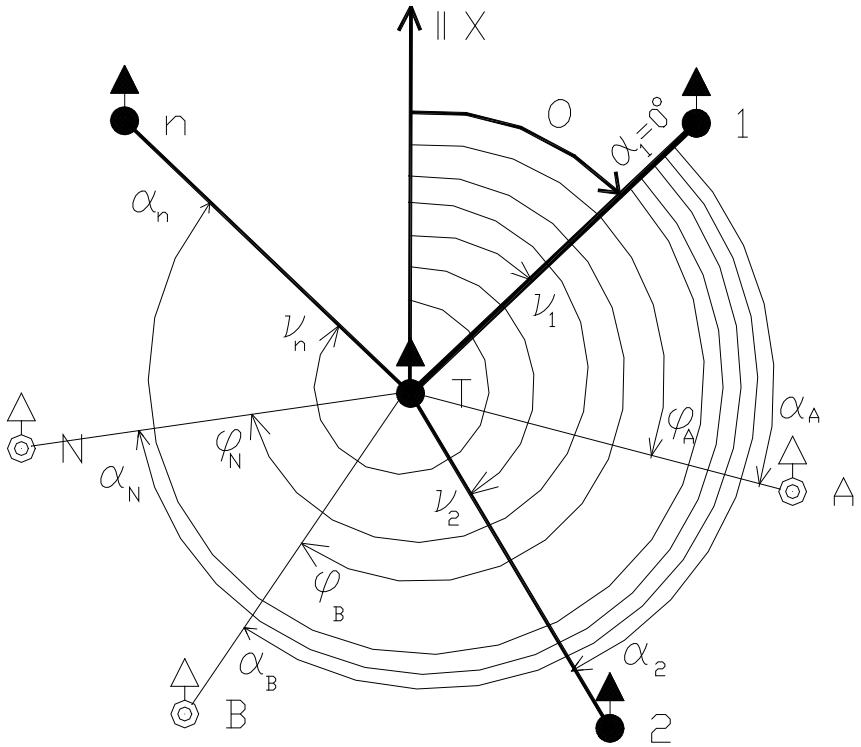
Orijentisani pravac

Orijentisani pravac (*ugao* φ)

definiše pravac sa:

- poznate tačke *(PT),*
- na nepoznatu *(NT).*

5.1 ORIJENTACIJA PRAVACA



Date tačke: T, 1, 2, ..., n

Nepoznate tačke: A, B, ..., N

Merenja:

$\alpha_1 = 0^0$, α_2 , ..., α_n , ka datim

α_A , α_B , ..., α_N ka nepoznatim

Određivanje orijentacionog ugla

$$o_i = \nu_i - \alpha_i \quad (i=1, 2, ..., n)$$

$$o = \frac{o_1 + o_2 + ... + o_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (\nu_i - \alpha_i) . \quad (1)$$

Orijentisani pravci

$$\varphi_i = \alpha_i + o \qquad (i=A, B, ..., N) \quad (2)$$

5.1 ORIJENTACIJA PRAVACA

TAČNOST ORIJENTISANOG PRAVCA

Ako se u izraz za orijentisani pravac ka tački A

$$\varphi_A = \alpha_A + o.$$

uvrsti izraz (1) onda sledi

$$\varphi_A = \alpha_A + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\nu_i - \alpha_i\right)$$

Diferencijalne promene orijentisanog pravca su

$$d\varphi_A = d\alpha_A - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d\alpha_i$$

5.1 ORIJENTACIJA PRAVACA

TAČNOST ORIJENTISANOG PRAVCA

Eksperimentalna varijansa je

$$s_{\varphi_A}^2 = s_{\alpha_A}^2 + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} s_{\alpha_i}^2$$

ili za homogenu tačnost merenja

$$s_{\alpha_A} = s_{\alpha_1} = s_{\alpha_2} = \ldots \; s_{\alpha_n} = s_{\alpha}$$

eksperimentalna varijansa postaje

$$s_{\varphi_A}^2 = s_{\alpha}^2 + \frac{1}{n} s_{\alpha}^2 = \frac{n+1}{n} \cdot s_{\alpha}^2 \qquad (3)$$

Ili eksperimentalna standardna devijacija orijentisanog pravca je

$$s_{\varphi_A} = s_{\alpha} \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n}}$$

5.1 ORIJENTACIJA PRAVACA

TAČNOST ORIJENTISANOG PRAVCA

Ako se eksperimentalne varijanse napišu u obliku

$$P_F = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_F^2} \Rightarrow \sigma_F^2 = \frac{\sigma_0^2}{P_F} \Rightarrow s_{\varphi_A}^2 = \frac{s_0^2}{p_{\varphi_A}} \quad \text{i} \quad s_\alpha^2 = \frac{s_0^2}{p_\alpha}$$

onda prema *(3)* sledi

$$\frac{s_0^2}{p_{\varphi_A}} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{s_0^2}{p_\alpha}$$

ili

$$p_{\varphi_A} = \frac{n}{n+1} \cdot p_\alpha$$

odnosno, težine opažanog i orijentisanog pravca su

$$p_\alpha = 1 \qquad p_{\varphi_A} = \frac{n}{n+1} \quad .$$

5.1 ORIJENTACIJA PRAVACA

TAČNOST ORIJENTISANOG PRAVCA

Težina orijentisanih pravaca zavisi od broja opažanih okolnih datih tačaka

n	1	2	3	...	∞
p_φ	1/2	2/3	3/4	...	1

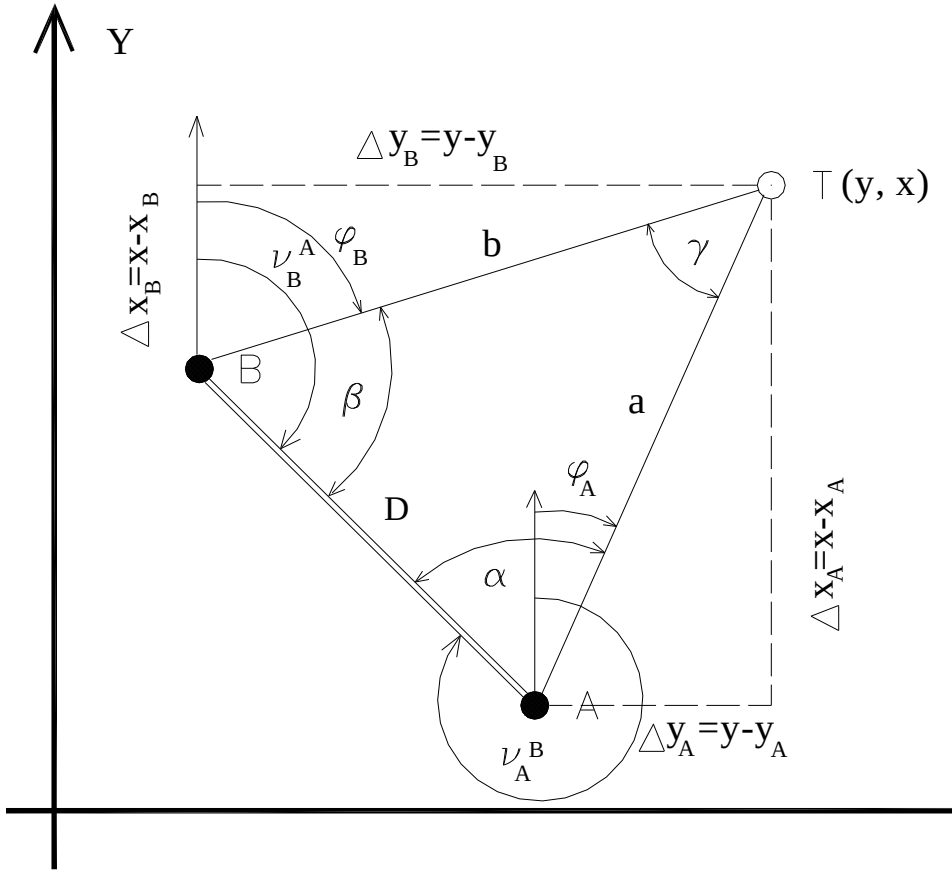
Ako je n veće, onda će težina orijentisanih pravaca biti bliža težini opažanih pravaca

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)=1$$

Pri praktičnim računanjima za $n\geq 3$ može se smatrati da su težine opažanih i orijentisanih pravaca identične i jednake jedinici

$$p_\alpha = p_\varphi = 1$$

5.2 ODREĐIVANJE KOORDINATA TAČAKA PRESECANJEM NAPRED



Presecanje napred

Dato: Yi, Xi (i=A, B)

Mereno: φ_A i φ_B

Nepoznato: $T(y, x)$

Iz trougla ABT sledi

$$\alpha = 360^0 - (\nu_A^B - \varphi_A) = \varphi_A - \nu_A^B$$

$$\beta = \nu_B^A - \varphi_B$$

$$\gamma = \varphi_B - \varphi_A$$

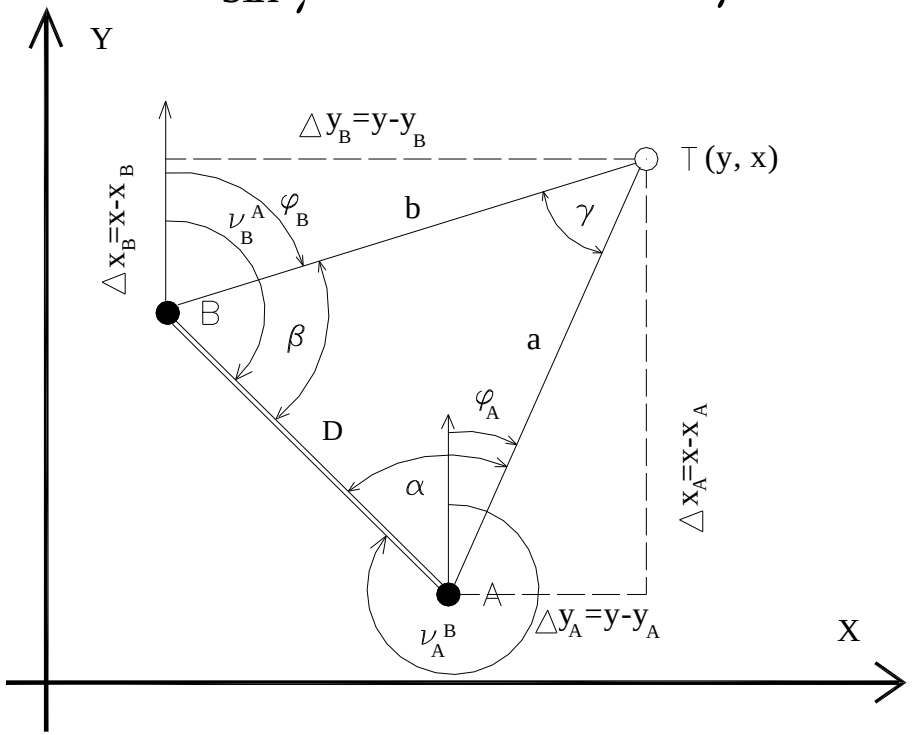
Kontrola: $\alpha + \beta + \gamma = 180^0.$

5.2 ODREĐIVANJE KOORDINATA TAČAKA PRESECANJEM NAPRED

PRIMENA SINUSNE FUNKCIJE

U trouglu ABT određuju se dužine

$$a = \frac{D}{\sin\gamma} \cdot \sin\beta \qquad b = \frac{D}{\sin\gamma} \cdot \sin\alpha$$



Koordinate tačke $T(y, x)$ su:

- u odnosu na poznatu tačku A

$$y = y_A + a \cdot \sin\varphi_A$$

$$x = x_A + a \cdot \cos\varphi_A$$

- u odnosu na poznatu tačku B

$$y = y_B + b \cdot \sin\varphi_B$$

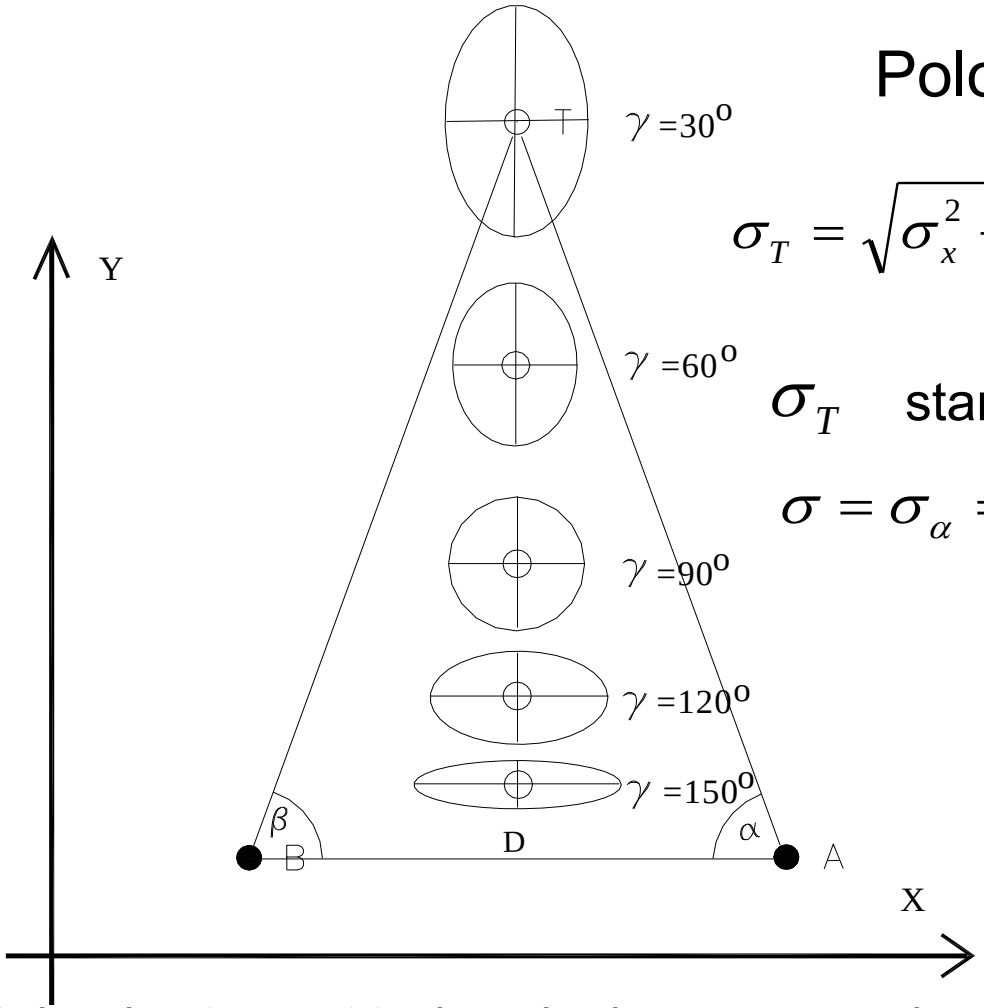
$$x = x_B + b \cdot \cos\varphi_B \ .$$

Napomena: moguća je primena *tg* i *ctg* funkcije.

i

5.2 ODREĐIVANJE KOORDINATA TAČAKA PRESECANJEM NAPRED

TAČNOST PRESECANJA NAPRED



Položajna tačnost tačke

$$\sigma_T = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} = D \cdot \frac{\sigma}{\rho} \cdot \frac{\sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta}}{\sin^2\gamma}$$

σ_T standardna devijacija položaja tačke

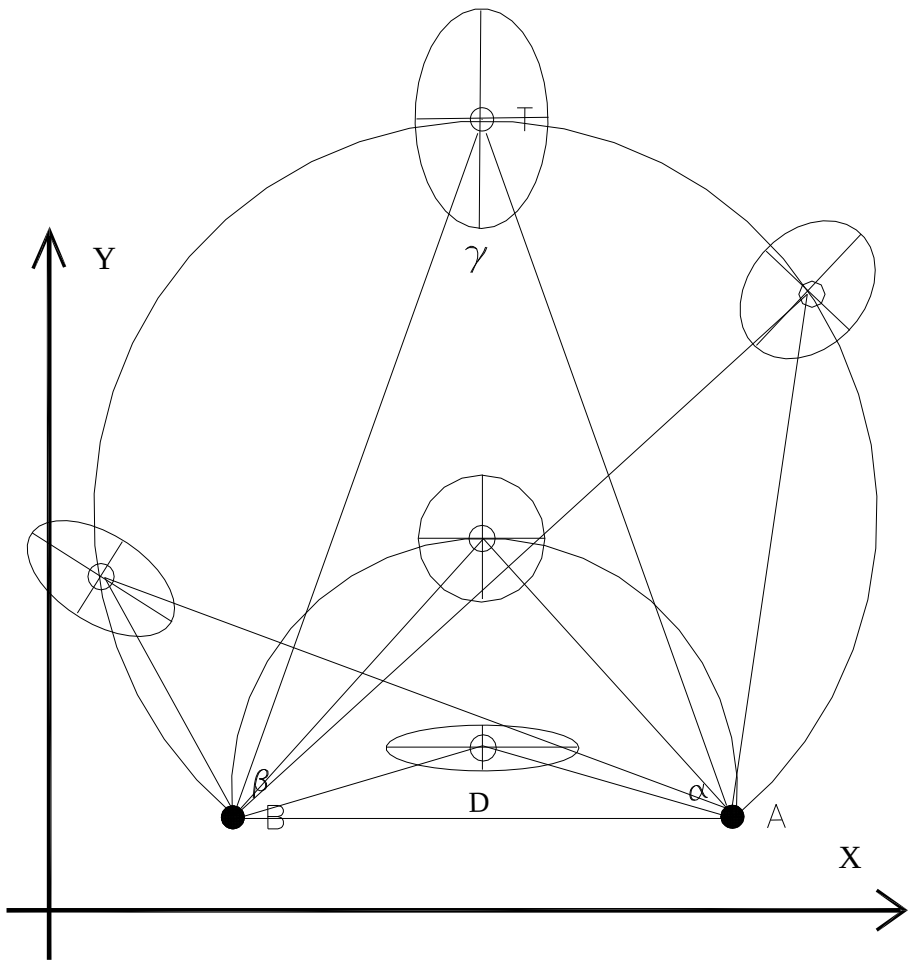
$\sigma = \sigma_\alpha = \sigma_\beta$ standardna devijacija uglova α i β

D dužina između datih tačaka

Položajna tačnost tačke određene presecanjem napred

5.2 ODREĐIVANJE KOORDINATA TAČAKA PRESECANJEM NAPRED

TAČNOST PRESECANJA NAPRED



Položajna tačnost određivanja tačke metodom presecanja napred zavisi od:

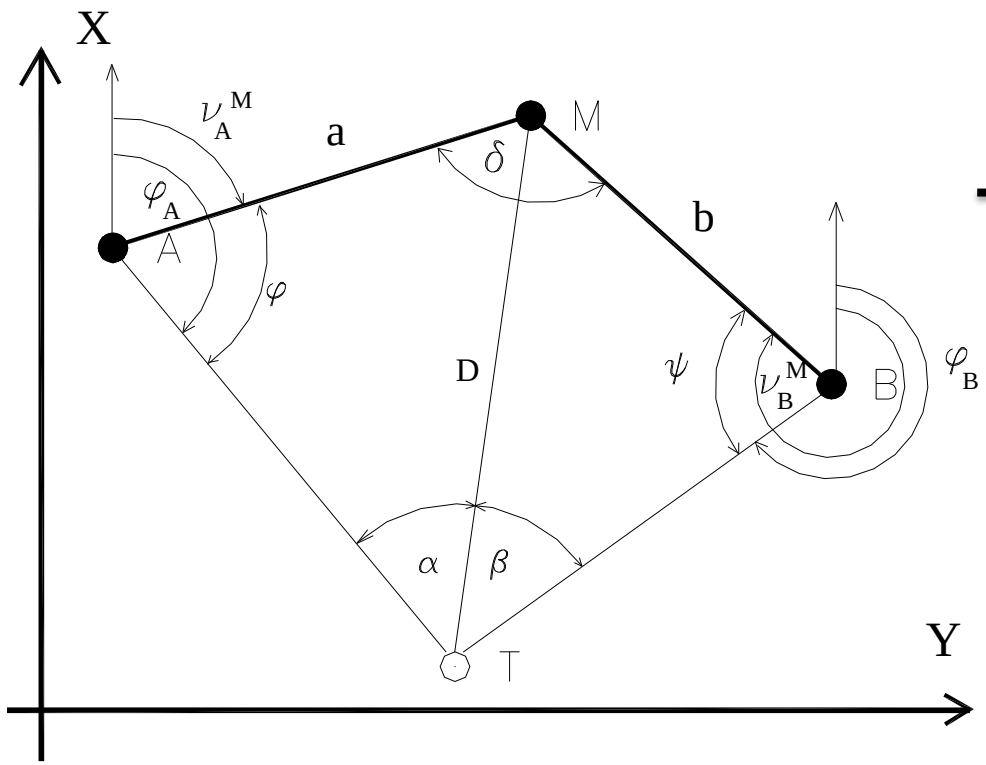
1. tačnosti merenja uglova

α β

2. geometrijskog oblika odnosno

dužine D i ugla γ

5.3 ODREĐIVANJE KOORDINATA TAČAKA PRESECANJEM NAZAD



Presecanje nazad

Dato: Yi, Xi (i=A, M, B)

Mereno: α i β

Nepoznato: $T(y, x)$

Osnovni metod - određivanje:

$$\varphi_A = \nu_A^M + \varphi$$
$$\varphi_B = \nu_B^M - \psi.$$

⇒ MPNapred

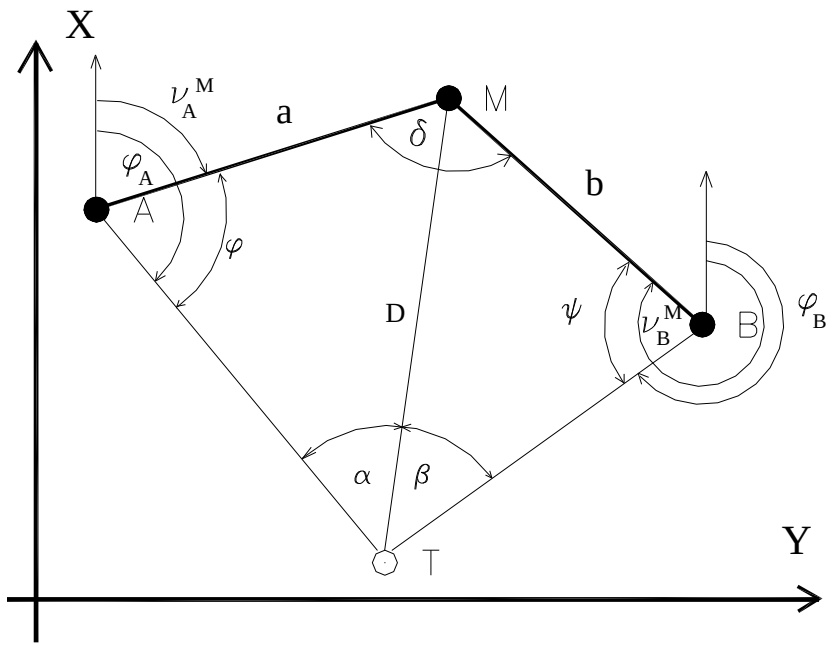
odnosno određuju se uglovi

φ i ψ.

5.3 ODREĐIVANJE KOORDINATA TAČAKA PRESECANJEM NAZAD

Iz trouglova *AMT* i *BTM* primenom sinusne teoreme dobija se dužina D u obliku

$$D = \frac{a}{\sin\alpha}\sin\varphi = \frac{b}{\sin\beta}\sin\psi$$



ili važi

$$\frac{\sin\psi}{\sin\varphi} = \frac{a\cdot\sin\beta}{b\cdot\sin\alpha} = tg\,\mu \qquad (1)$$

gde je

$$tg\mu \in (-\infty, +\infty).$$

5.3 ODREĐIVANJE KOORDINATA TAČAKA PRESECANJEM NAZAD

Jednačini (1) dopiše se jednakost *1=1* pa sledi sistem jednačina oblika

$$\frac{\sin\psi}{\sin\varphi} = \frac{a\cdot\sin\beta}{b\cdot\sin\alpha} = tg\,\mu \qquad (1)$$

1=1 (2)

Zbir i razlika jednačina (1) i (2) daju

$$1+\frac{\sin\psi}{\sin\varphi} = 1+tg\,\mu \qquad \text{(2) + (1)}$$

$$1-\frac{\sin\psi}{\sin\varphi} = 1-tg\,\mu \qquad \text{(2) - (1)}$$

ili

5.3 ODREĐIVANJE KOORDINATA TAČAKA PRESECANJEM NAZAD

$$\frac{\sin\varphi + \sin\psi}{\sin\varphi} = 1 + tg\,\mu \qquad (3)$$

$$\frac{\sin\varphi - \sin\psi}{\sin\varphi} = 1 - tg\,\mu \qquad (4)$$

odnosno nakon deljenja ove dve jednačine sledi

$$\frac{sin\,\varphi + sin\,\psi}{sin\,\varphi - sin\,\psi} = \frac{1 + tg\mu}{1 - tg\mu} \qquad (5)$$

ili nakon uvođenja transformacija

5.3 ODREĐIVANJE KOORDINATA TAČAKA PRESECANJEM NAZAD

$$\frac{2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi-\psi}{2}}{2\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\cdot\sin\frac{\varphi-\psi}{2}}=\frac{tg\,45^{o}+tg\,\mu}{1-tg\,45^{o}\cdot tg\,\mu}=tg\,(\mu+45^{o})$$

Iz prethodnog izraza dobija se polurazlika uglova φ i ψ

$$tg\,\frac{\varphi-\psi}{2}=tg\,\frac{\varphi+\psi}{2}\cdot ctg\,(\mu+45^{o}) \qquad (6)$$

Iz četvorougla *AMBT* dobija se poluzbir uglova φ i ψ

$$\frac{\varphi+\psi}{2}=180^{o}-\frac{\alpha+\beta+\delta}{2} \qquad (7)$$

5.3 ODREĐIVANJE KOORDINATA TAČAKA PRESECANJEM NAZAD

Na osnovu polurazlike *(6)* i poluzbira *(7)* dobijaju se uglovi φ i ψ u zavisnosti od veličine ugla μ :

- za $\mu<45^0$

$$\varphi = \frac{\varphi + \psi}{2} + \frac{\varphi - \psi}{2}$$

$$\psi = \frac{\varphi + \psi}{2} - \frac{\varphi - \psi}{2}$$

- za $\mu>45^0$

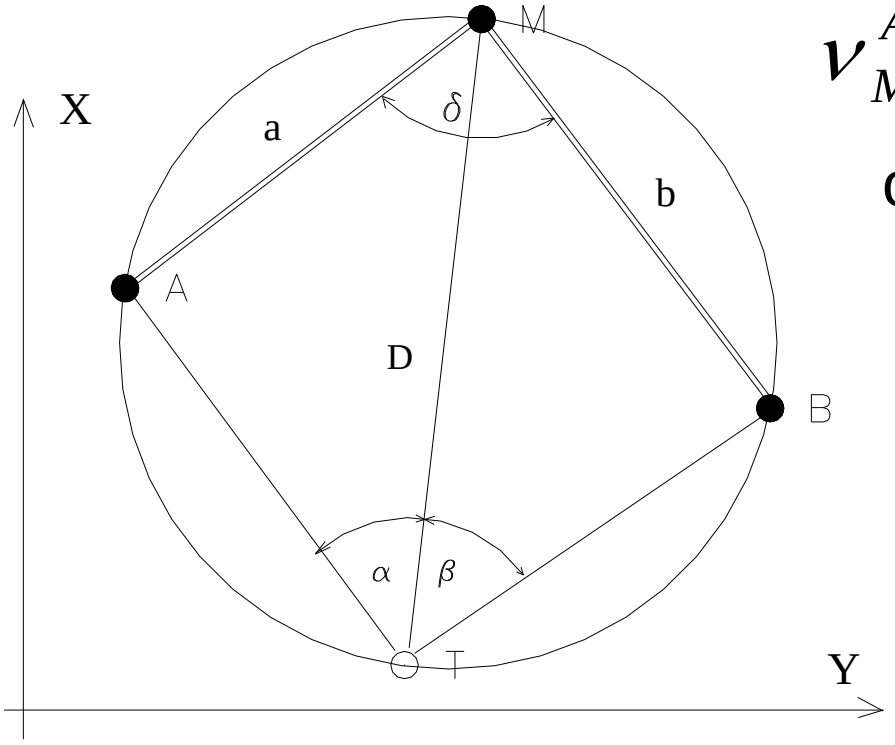
$$\varphi = \frac{\varphi + \psi}{2} - \frac{\varphi - \psi}{2}$$

$$\psi = \frac{\varphi + \psi}{2} + \frac{\varphi - \psi}{2}$$

Kada se uglovi φ i ψ uvrste u polazne jednačine, dobijaju se orijentisani pravci i primenjuje se metod presecanja napred.

5.3 ODREĐIVANJE KOORDINATA TAČAKA PRESECANJEM NAZAD

PRESECANJE NAZAD - NEODREĐEN ZADATAK



Ako važi jednakost

$$\nu_M^A - \nu_M^B + \alpha + \beta = 180^0 .$$

onda je neodređen zadatak.

Treba težiti da je zbir uglova

$$\alpha + \beta + \delta \neq 180^0$$

odnosno

$$\left|\alpha + \beta + \delta - 180^0\right| > 5^0$$