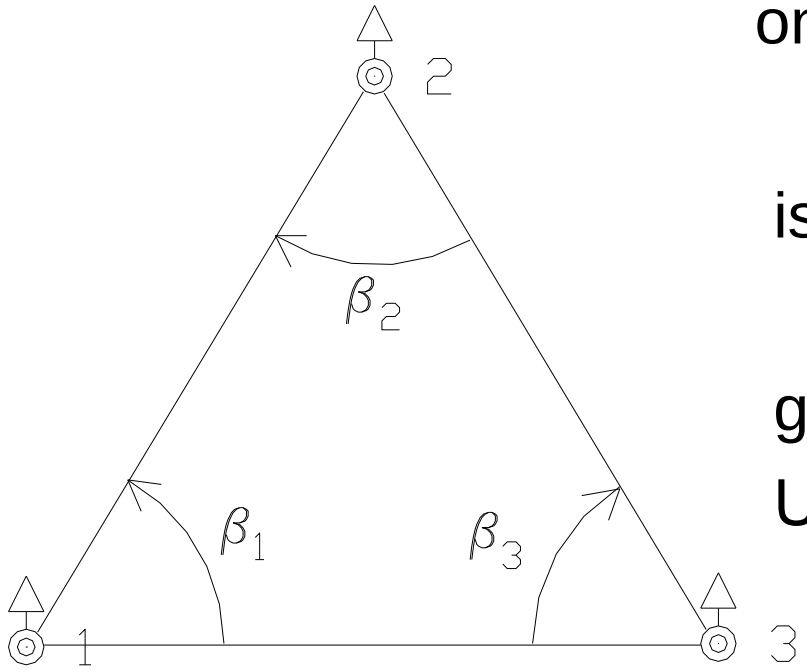
4. USLOVNO IZRAVNANJE MREŽA U PREMERU

4.1 USLOVNE JEDNAČINE FIGURE

USLOVNA JEDNAČINA TROUGLA-MERENI UGLOVI



Mereni uglovi $\beta_1, \beta_2, \beta_3$

Ako su u trouglu mereni uglovi

$$\beta_1 \ , \ \beta_2 \ , \ \beta_3$$

onda njihove izravnate vrednosti

$$\hat{\beta}_i = \beta_i + \upsilon_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

ispunjavaju matematički uslov

$$\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3 = 180^0$$

gde su υ_i poravke merenih uglova.

Uslovna jednačina trougla je

$$\upsilon_1 + \upsilon_2 + \upsilon_3 + \omega = 0$$

gde su koeficijenti i slobodan član

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1$$

$$\omega = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - 180^0 = M - T$$

4.1 USLOVNE JEDNAČINE FIGURE

USLOVNA JEDNAČINA TROUGLA-MERENI PRAVCI

Ako su u trouglu mereni pravci $\alpha_i \quad (i = 1, 2, ..., 6)$

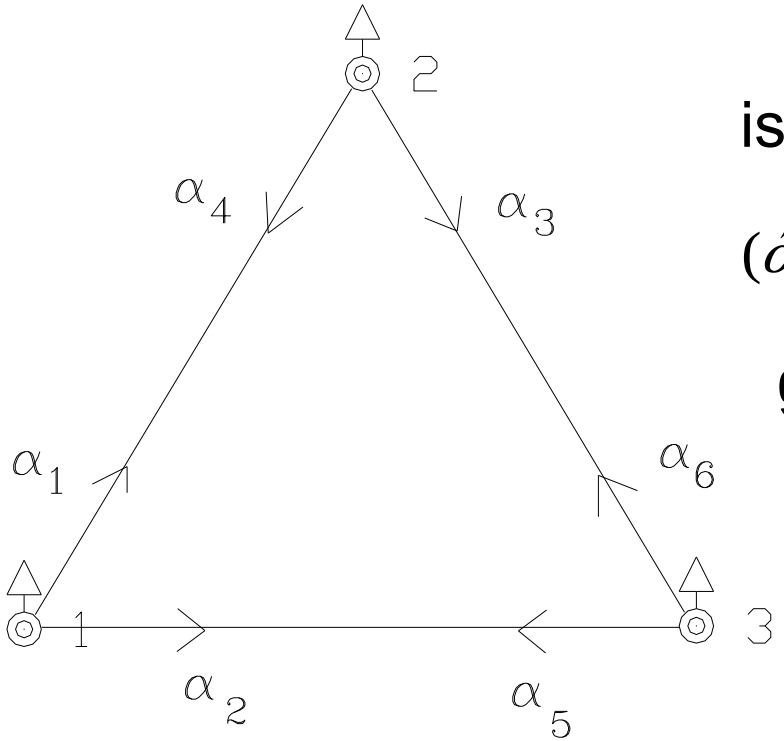
onda njihove izravnate vrednosti

$$\hat{\alpha} = \alpha_i + \upsilon_i \qquad (i = 1, 2, ..., 6)$$

ispunjavaju matematički uslov

$$(\hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_1) + (\hat{\alpha}_4 - \hat{a}_3) + (\hat{\alpha}_6 - \hat{\alpha}_5) = 180^0$$

gde su υ_i poravke merenih pravaca..



Mereni pravci $\alpha_i \quad (i = 1, 2, ..., 6)$

Uslovna jednačina trougla je

$$\upsilon_2 - \upsilon_1 + \upsilon_4 - \upsilon_3 + \upsilon_6 - \upsilon_5 + \omega = 0$$

gde su koeficijenti i slobodan član

$$a_1 = a_3 = a_5 = -1 \qquad a_2 = a_4 = a_6 = 1$$

$$\omega = (\alpha_2 - \alpha_1) + (\alpha_4 - \alpha_3) + (\alpha_6 - \alpha_5) - 180^0 = M - T$$

4.1 USLOVNE JEDNAČINE FIGURE

USLOVNA JEDNAČINA MNOGOUGLA

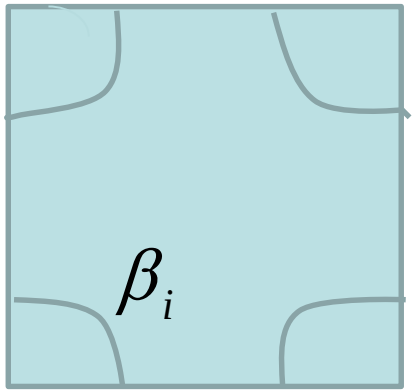
Ako su mereni unutrašnji uglovi $\beta_i \quad (i = 1, 2, ..., n)$

u mnogouglu od ***n*** tačaka onda, izravnate vrednosti

$$\hat{\beta}_i = \beta_i + \upsilon_i \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$

ispunjavaju matematički uslov

$$\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 + ... + \hat{\beta}_n = (n-2) \cdot 180$$



Uslovna jednačina mnogougla je

$$\upsilon_1 + \upsilon_2 + ... + \upsilon_n + \omega = 0$$

gde su koeficijenti i slobodan član

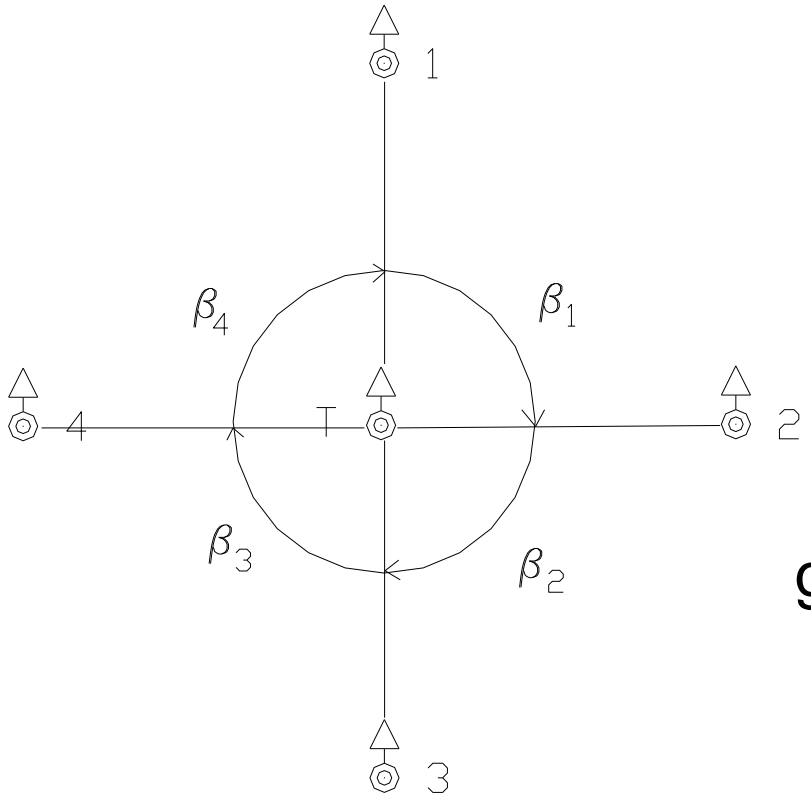
$$a_1 = a_2 = ... = a_n = 1$$

$$\omega = (\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_n) - (n-2) \cdot 180^0 = M - T$$

4.2 USLOVNA JEDNAČINA HORIZONTA

Ako su sa stanice izmereni svi uglovi $\beta_i \quad (i = 1, 2, ..., 4)$

onda zbir izravnatih uglova $\hat{\beta}_i = \beta_i + \upsilon_i$



zatvara horizont

$$\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3 + \hat{\beta}_4 = 360^0$$

Uslovna jednačina horizonta je

$$\upsilon_1 + \upsilon_2 + \upsilon_3 + \upsilon_4 + \omega = 0$$

gde su koeficijenti i slobodni član

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1,$$

$$\omega = (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4) - 360^0 = M - T$$

Mereni uglovi $\beta_i \quad (i = 1, 2, ..., 4)$

4.3 USLOVNA JEDNAČINA ZBIRA ILI RAZLIKE UGLOVA

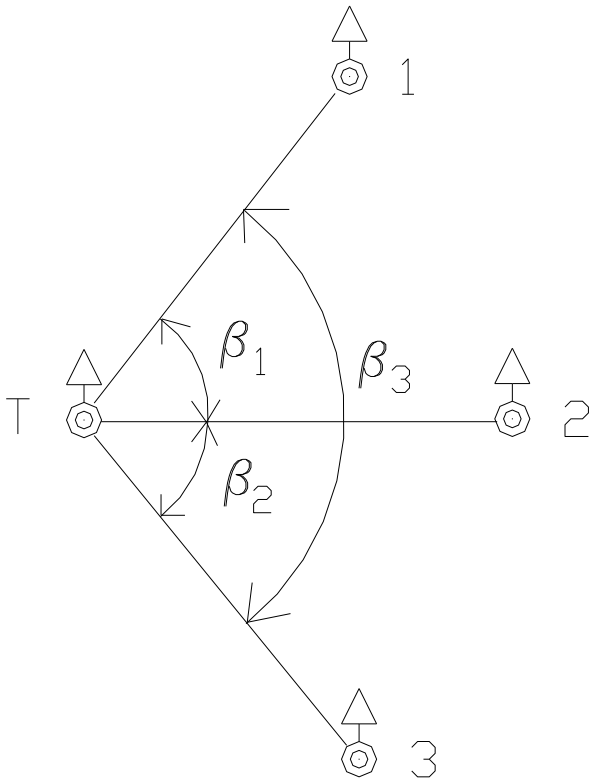
Ako su sva tri ugla $\beta_i \quad (i = 1, 2, 3)$ izmereni nezavisno

onda izravnate vrednosti

$$\hat{\beta}_i = \beta_i + \upsilon_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

ispunjavaju uslov zbira

$$\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 = \hat{\beta}_3$$



Mereni uglovi $\beta_i \quad (i = 1, 2, 3)$

Uslovna jednačina zbira uglova je

$$\upsilon_1 + \upsilon_2 - \upsilon_3 + \omega = 0$$

---

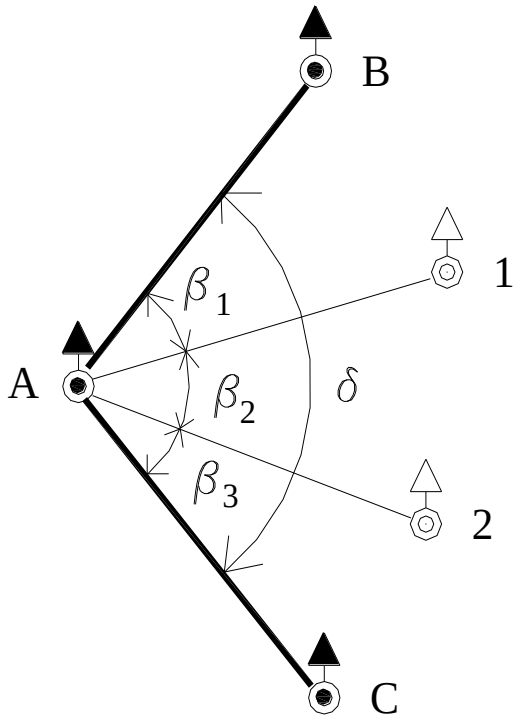
gde su koeficijenti i slobodni član

$$a_1 = a_2 = 1, a_3 = -1$$

$$\omega = \left(\beta_1 + \beta_2 - \beta_3\right) - 0 = M - T.$$

4.3 USLOVNA JEDNAČINA FIKSNOG UGLA

Date su koordinate tačaka A, B i C. Razlika direkcionih uglova daje fiksni ugao $\delta = \nu_A^C - \nu_A^B$.



Mereni uglovi

$\beta_i \quad (i = 1, 2, 3)$

Kada su mereni uglovi $\beta_i \quad (i = 1, 2, 3)$

zbir izravnatih vrednosti

$$\hat{\beta}_i = \beta_i + \upsilon_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

jednak je fiksnom uglu

$$\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3 = \delta$$

Uslovna jednačina fiksnog ugla je

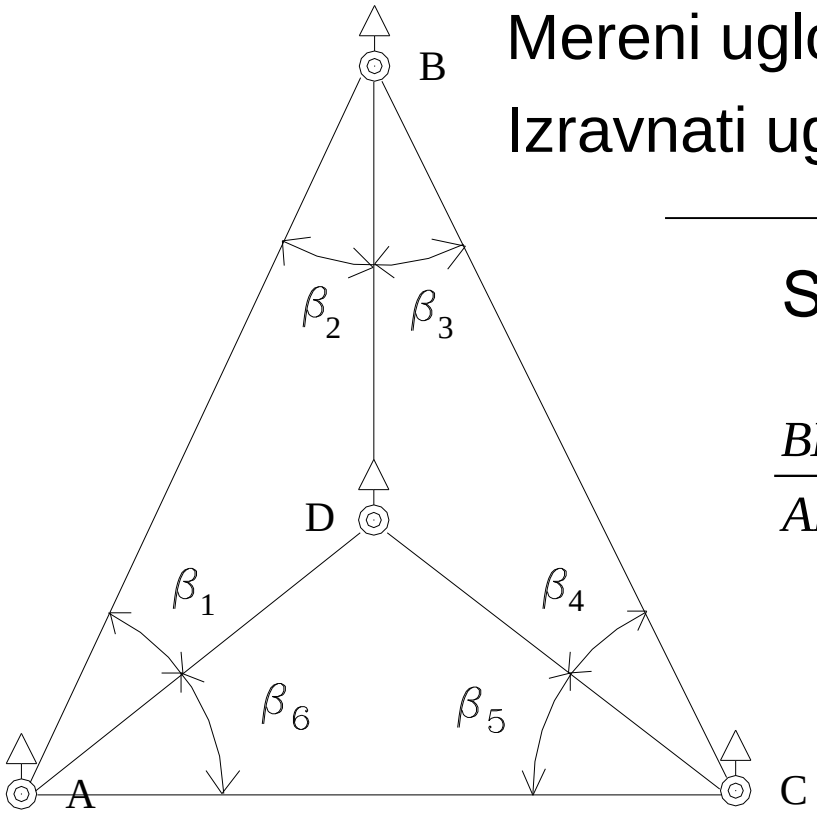
$$\upsilon_1 + \upsilon_2 + \upsilon_3 + \omega = 0$$

gde su koeficijenti i slobodni član

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1,$$

$$\omega = \left(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3\right) - \delta = M - T$$

4.4 SINUSNA USLOVNA JEDNAČINA



Mereni uglovi: $\beta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, 6)$

Izravnati uglovi: $\hat{\beta}_i = \beta_i + \upsilon_i \quad (i = 1, 2, \ldots, 6)$ *(1)*

Sinusne jednačine su oblika

$$\frac{BD}{AD} = \frac{\sin \hat{\beta}_1}{\sin \hat{\beta}_2} \qquad \frac{CD}{BD} = \frac{\sin \hat{\beta}_3}{\sin \hat{\beta}_4} \qquad \frac{AD}{CD} = \frac{\sin \hat{\beta}_5}{\sin \hat{\beta}_6}$$

odnosno njihov proizvod

Centralni sistem-mereni uglovi

$$\frac{BD}{AD} \cdot \frac{CD}{BD} \cdot \frac{AD}{CD} = \frac{\sin \hat{\beta}_1 \cdot \sin \hat{\beta}_3 \cdot \sin \hat{\beta}_5}{\sin \hat{\beta}_2 \cdot \sin \hat{\beta}_4 \cdot \sin \hat{\beta}_6} = 1 \quad (2)$$

4.4 SINUSNA USLOVNA JEDNAČINA

Zamenom *(1)* u *(2)* sledi

$$\frac{\sin(\beta_1+\upsilon_1)\cdot\sin(\beta_3+\upsilon_3)\cdot\sin(\beta_5+\upsilon_1)}{\sin(\beta_2+\upsilon_2)\cdot\sin(\beta_4+\upsilon_4)\cdot\sin(\beta_6+\upsilon_6)}=1 \qquad (3)$$

Sinusna uslovna jednačina (3) linearizuje se razvijanjem u Tajlorov red oblika

$$F(\beta_1,\beta_2,...,\beta_6)+\frac{\partial F}{\partial\beta_1}\upsilon_1+\frac{\partial F}{\partial\beta_2}\upsilon_2+...+\frac{\partial F}{\partial\beta_6}\upsilon_6=1 \qquad (4)$$

gde su:

4.4 SINUSNA USLOVNA JEDNAČINA

- vrednost funkcije čiji su argumenti merene veličine

$$F(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_6) = \frac{\sin \beta_1 \cdot \sin \beta_3 \cdot \sin \beta_5}{\sin \beta_2 \cdot \sin \beta_4 \cdot \sin \beta_6} \approx 1$$

- parcijalni izvodi funkcije u okolini merenih veličina

$$a_1 = \frac{\partial F}{\partial \beta_1} = \frac{\sin\beta_3 \sin\beta_5}{\sin\beta_2 \sin\beta_4 \sin\beta_6} \cos\beta_1 = \frac{\cos\beta_1}{sin\beta_1} = ctg\beta_1$$

$$a_3 = \frac{\partial F}{\partial \beta_3} = \frac{\sin\beta_1 \sin\beta_5}{\sin\beta_2 \sin\beta_4 \sin\beta_6} \cos\beta_3 = \frac{\cos\beta_3}{sin\beta_3} = ctg\beta_3$$

$$a_5 = \frac{\partial F}{\partial \beta_5} = \frac{\sin\beta_1 \sin\beta_3}{\sin\beta_2 \sin\beta_4 \sin\beta_6} \cos\beta_5 = \frac{\cos\beta_5}{sin\beta_5} = ctg\beta_5$$

4.4 SINUSNA USLOVNA JEDNAČINA

- vrednost funkcije čiji su argumenti merene veličine

$$F(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_6) = \frac{\sin\beta_1 \cdot \sin\beta_3 \cdot \sin\beta_5}{\sin\beta_2 \cdot \sin\beta_4 \cdot \sin\beta_6} \approx 1$$

- parcijalni izvodi funkcije u okolini merenih veličina

$$a_2 = \frac{\partial F}{\partial \beta_2} = -\frac{\sin\beta_1 \sin\beta_3 \sin\beta_5}{\sin\beta_4 \sin\beta_6} \cdot \frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2 \sin\beta_2} = -ctg\beta_2$$

$$a_4 = \frac{\partial F}{\partial \beta_4} = -\frac{\sin\beta_1 \sin\beta_3 \sin\beta_5}{\sin\beta_2 \sin\beta_6} \cdot \frac{\cos\beta_4}{\sin\beta_4 \sin\beta_4} = -ctg\beta_4$$

$$a_6 = \frac{\partial F}{\partial \beta_6} = -\frac{\sin\beta_1 \sin\beta_3 \sin\beta_5}{\sin\beta_2 \sin\beta_4} \cdot \frac{\cos\beta_6}{\sin\beta_6 \sin\beta_6} = -ctg\beta_6$$

4.4 SINUSNA USLOVNA JEDNAČINA

ili

$$a_i = \frac{\partial F}{\partial \beta_i} = ctg\,\beta_i \qquad (i = 1, 3, 5) \tag{5}$$

$$a_i = \frac{\partial F}{\partial \beta_i} = -ctg\,\beta_i \qquad (i = 2, 4, 6) \tag{6}$$

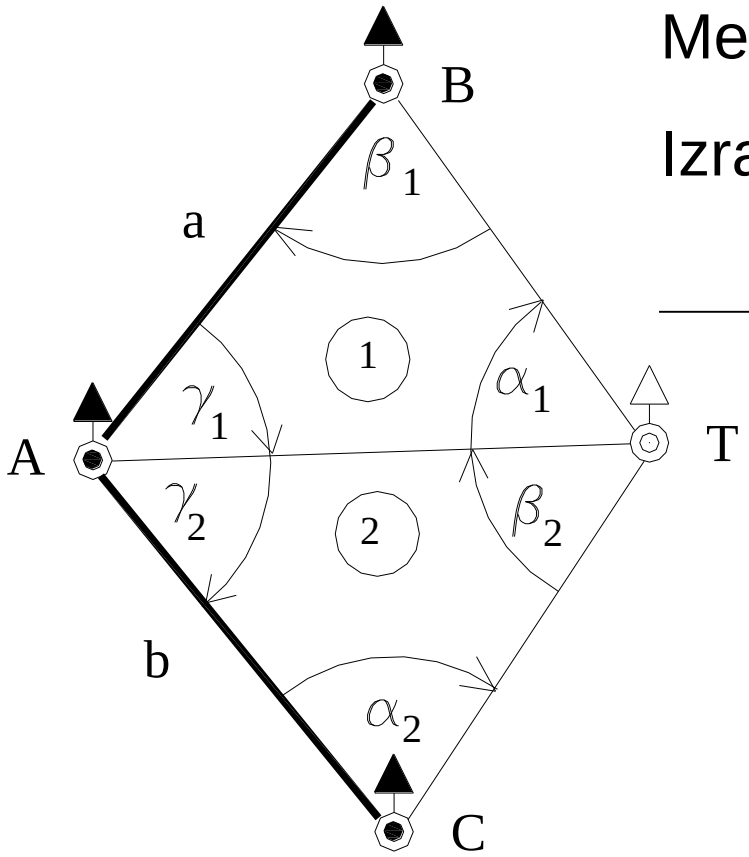
Zamenom (5) i (6) u sinusnu uslovnu jednačinu (4) ona postaje

$$a_1 \cdot \upsilon_1 + a_2 \cdot \upsilon_2 + \ldots + a_6 \cdot \upsilon_6 + \omega = 0$$

gde je slobodni član

$$\omega = \left(\frac{\sin \beta_1 \cdot \sin \beta_3 \cdot \sin \beta_5}{\sin \beta_2 \cdot \sin \beta_4 \cdot \sin \beta_6} - 1 \right) \cdot \rho''$$

4.5 BAZISNA USLOVNA JEDNAČINA



Mereni uglovi
Dužine konstante

Mereni uglovi: α_i , β_i , γ_i

Izravnati uglovi:

$$\hat{\alpha}_i = \alpha_i + \upsilon_{\alpha_i}$$

$$\hat{\beta}_i = \beta_i + \upsilon_{\beta_i} \qquad (1)$$

Sinusne jednačine su oblika

$$\frac{a}{AT} = \frac{\sin\hat{\alpha}_1}{\sin\hat{\beta}_1}, \qquad \frac{AT}{b} = \frac{\sin\hat{\alpha}_2}{\sin\hat{\beta}_2},$$

ili njihov proizvod

$$\frac{\sin\hat{\alpha}_1 \cdot \sin\hat{\alpha}_2}{\sin\hat{\beta}_1 \cdot \sin\hat{\beta}_2} \cdot \frac{b}{a} = 1 \qquad (2)$$

4.5 BAZISNA USLOVNA JEDNAČINA

Zamenom *(1)* u *(2)* sledi

$$\frac{\sin(\alpha_1+\upsilon_{\alpha_1})\cdot\sin(\alpha_2+\upsilon_{\alpha_2})}{\sin(\beta_1+\upsilon_{\beta_1})\cdot\sin(\beta_2+\upsilon_{\beta_2})}\cdot\frac{b}{a}=1$$

Nelinearna uslovna jednačina razvija se u Tajlorov red oblika

$$F(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)+\frac{\partial F}{\partial\alpha_1}\upsilon_{\alpha_1}+\frac{\partial F}{\partial\alpha_2}\upsilon_{\alpha_2}+\frac{\partial F}{\partial\beta_1}\upsilon_{\beta_1}+\frac{\partial F}{\partial\beta_2}\upsilon_2=1 \qquad (3)$$

gde su:

4.5 BAZISNA USLOVNA JEDNAČINA

- vrednost funkcije čiji su argumenti merene veličine

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = \frac{\sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2}{\sin \beta_1 \cdot \sin \beta_2} \cdot \frac{b}{a} \approx 1$$

- parcijalni izvodi funkcije u okolini merenih veličina

$$a_i = \frac{\partial F}{\partial \beta_i} = ctg\,\alpha_i \qquad (i = 1, 2) \text{ (u broiocu)} \qquad (4)$$

$$a_i = \frac{\partial F}{\partial \beta_i} = -ctg\,\beta_i \qquad (i = 1, 2) \text{ (u imeniocu)} \qquad (5)$$

4.5 BAZISNA USLOVNA JEDNAČINA

Zamenom *(4)* i *(5)* u *(3)* dobija se sinusna uslovna jednačina

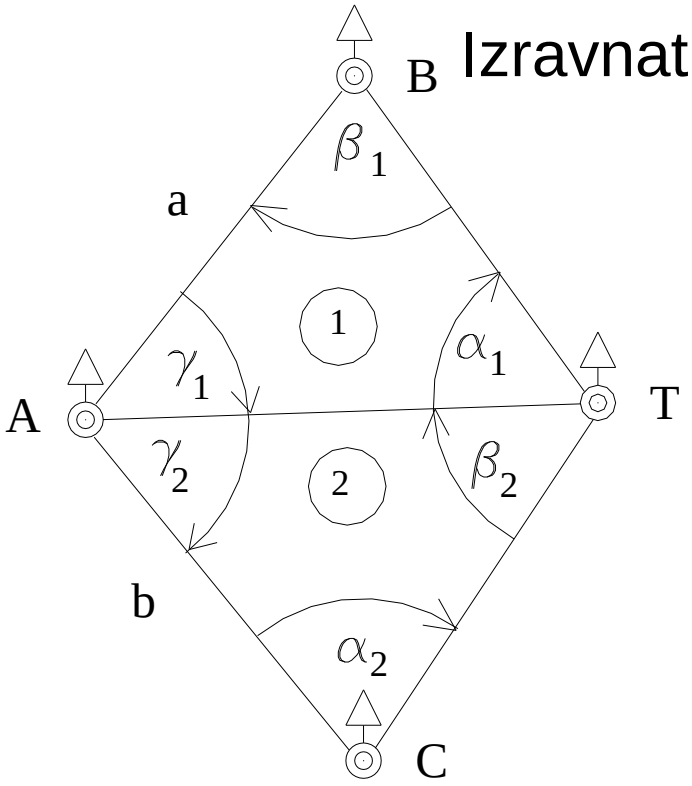
$$a_1 \cdot \upsilon_{\alpha_1} + a_2 \cdot \upsilon_{\alpha_2} + a_3 \cdot \upsilon_{\beta_1} + a_4 \cdot \upsilon_{\beta_2} + \omega = 0$$

gde je slobodni član

$$\omega = \left(\frac{\sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2}{\sin \beta_1 \cdot \sin \beta_2} \cdot \frac{b}{a} - 1 \right) \cdot \rho''$$

4.5 BAZISNA USLOVNA JEDNAČINA

Mereni uglovi i dužine: α_i , β_i , γ_i , a , b



Izravnati veličine: $\hat{\alpha}_i = \alpha_i + \upsilon_{\alpha_i}$ $\hat{\beta}_i = \beta_i + \upsilon_{\beta_i}$ *(6)*

$\hat{a} = a + \upsilon_a$ $\hat{b} = b + \upsilon_b$

Sinusna uslovna jednačina je oblika

$$\frac{\sin\hat{\alpha}_1 \cdot \sin\hat{\alpha}_2}{\sin\hat{\beta}_1 \cdot \sin\hat{\beta}_2} \cdot \frac{\hat{b}}{\hat{a}} = 1 \qquad (7)$$

Mereni uglovi
Merene dužine

4.5 BAZISNA USLOVNA JEDNAČINA

Zamenom *(6)* u *(7)* sledi

$$\frac{\sin(\alpha_1+\upsilon_{\alpha_1})\cdot\sin(\alpha_2+\upsilon_{\alpha_2})}{\sin(\beta_1+\upsilon_{\beta_1})\cdot\sin(\beta_2+\upsilon_{\beta_2})}\cdot\frac{(b+\upsilon_b)}{(a+\upsilon_a)}=1$$

Nelinearna uslovna jednačina razvija se u Tajlorov red oblika

$$F(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,a,b)+\frac{\partial F}{\partial\alpha_1}\upsilon_{\alpha_1}+\frac{\partial F}{\partial\alpha_2}\upsilon_{\alpha_2}+\frac{\partial F}{\partial\beta_1}\upsilon_{\beta_1}+\frac{\partial F}{\partial\beta_2}\upsilon_2+\frac{\partial F}{\partial a}\upsilon_a+\frac{\partial F}{\partial b}\upsilon_b=1 \qquad (8)$$

gde su:

4.5 BAZISNA USLOVNA JEDNAČINA

- vrednost funkcije čiji su argumenti merene veličine

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, a, b) = \frac{\sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2}{\sin \beta_1 \cdot \sin \beta_2} \cdot \frac{b}{a} \approx 1$$

- parcijalni izvodi funkcije u okolini merenih uglova

$$a_i = \frac{\partial F}{\partial \beta_i} = ctg\,\alpha_i \qquad (i = 1, 2) \qquad \text{(u broiocu)} \qquad (9)$$

$$a_i = \frac{\partial F}{\partial \beta_i} = -ctg\,\beta_i \qquad (i = 1, 2) \qquad \text{(u imeniocu)} \qquad (10)$$

- parcijalni izvodi funkcije u okolini merenih dužina

$$a_5 = \frac{\partial F}{\partial a} = -\frac{sin\,\alpha_1 \cdot sin\,\alpha_2}{sin\,\beta_1 \cdot sin\,\beta_2} \cdot \frac{b}{a\,a} = -\frac{1}{a} = -\frac{\rho}{a}$$

$$a_6 = \frac{\partial F}{\partial b} = \frac{sin\,\alpha_1 \cdot sin\,\alpha_2}{sin\,\beta_1 \cdot sin\,\beta_2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{\rho}{b} \qquad (11)$$

4.5 BAZISNA USLOVNA JEDNAČINA

Zamenom *(9)* (10) i *(11)* u *(8)* dobija se sinusna uslovna jednačina

$$a_1 \cdot \upsilon_{\alpha_1} + a_2 \cdot \upsilon_{\alpha_2} + a_3 \cdot \upsilon_{\beta_1} + a_4 \cdot \upsilon_{\beta_2} + a_5 \cdot \upsilon_a + a_6 \cdot \upsilon_b + \omega = 0$$

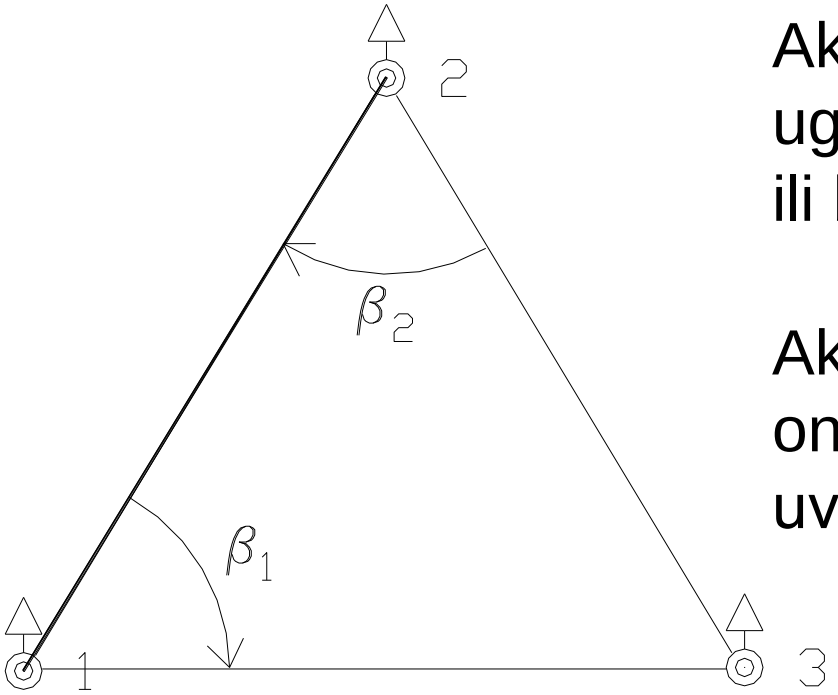
gde je slobodni član

$$\omega = \left(\frac{\sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2}{\sin \beta_1 \cdot \sin \beta_2} \cdot \frac{b}{a} - 1 \right) \cdot \rho''$$

4.6 BROJ USLOVNIH JEDNAČINA

1. SLOBODNA MREŽA

Dve tačke (1 i 2) određuju stranu. Svaka sledeća tačka određuje se na osnovu 2 ugla.



Ako u mreži ima **N** tačaka onda je za određivanje **(N-2)** tačaka neophodno meriti **2(N-2)** uglova.

Ako je u mreži izmereno ukupno **U** uglova onda je broj suvišnih merenja ili broj stepeni slobode

$$R_U = U - 2(N-2) = U - 2N + 4$$

Ako je u mreži izmereno **r** dužina onda se broj stepeni slobode uvećava za **r-1**

$$R_U = U - 2N + 4 + r - 1$$

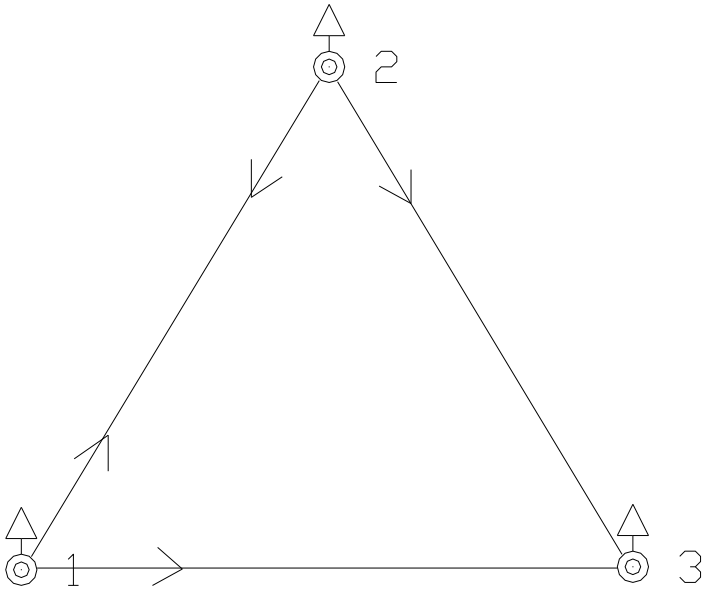
4.6 BROJ USLOVNIH JEDNAČINA

1. SLOBODNA MREŽA

Ako su u mreži opažani pravci onda je neophodan broj merenja

$$N_1+2(N-2)$$

gde je N_1 broj stanica.



Ako je ukupan broj merenih pravaca **P** onda je broj suvišnih merenja ili broj stepeni slobode

$$R_P= P-N_1-2(N-2)= P-N_1-2N+4$$

Ako je u mreži izmereno **r** dužina onda se broj stepeni slobode uvećava za **r-1**

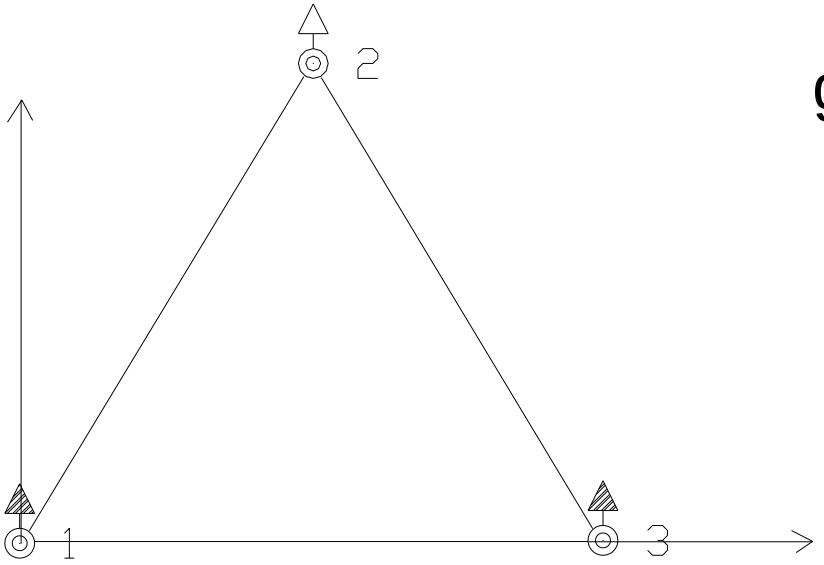
$$R_P= P-N_1-2N+4+r-1$$

4.6 BROJ USLOVNIH JEDNAČINA

2. NESLOBODNA MREŽA

Svaka suvišno data veličina u mreži omogućuje postavljanje jednog nezavisnog matematičkog uslova. Jednačina za 2-D mreže je

$$t = 2\,(D-2)$$



gde je: ***D*** broj datih tačaka

t broj stepeni slobode

Za merene uglove važi

$$R_U = U-2N+4+t$$

ili za merene pravce važi

$$R_P = P-N_1-2N+4+t$$

Ako je mereno ***r*** dužina onda se broj stepeni uvećava za (***r-1***).

4.7 IZRAVNANJE SLOBODNE MREŽE

RAČUNANJE KOORDINATA TAČAKA

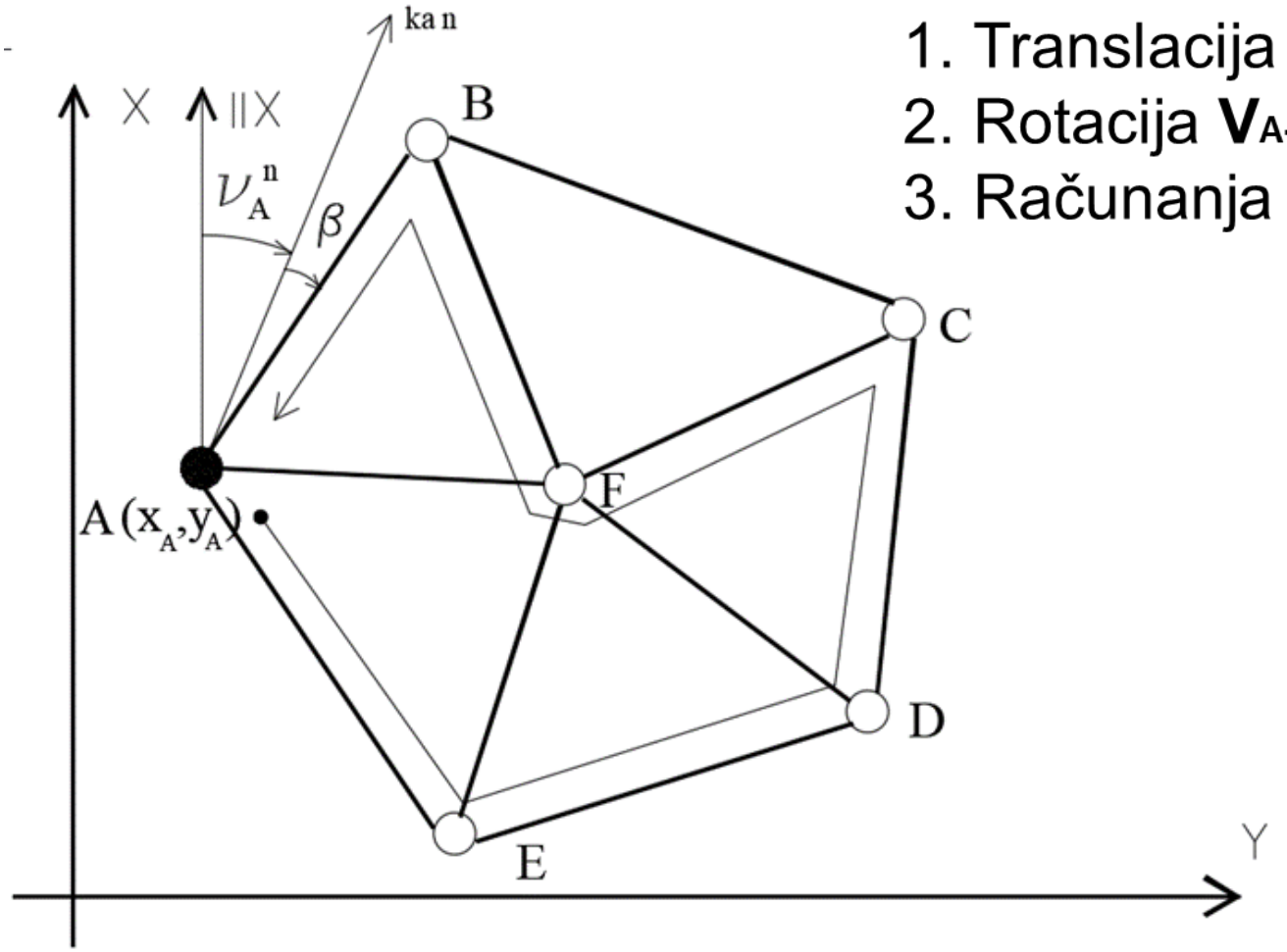
Kada je osnovni cilj izravnanja ostvaren, odnosno kad se stvori matematički definisana mreža, pristupa se računanju koordinata tačaka u mreži poznatim metodama.

Planom računanja, koji može biti proizvoljan, treba obuhvatiti sve tražene tačke u mreži.

Kod slobodnih mreža, gde nema datih veličina, prvo treba definisati koordinatni sistem pa tek onda pristupiti računanju koordinata.

4.7 IZRAVNANJE SLOBODNE MREŽE

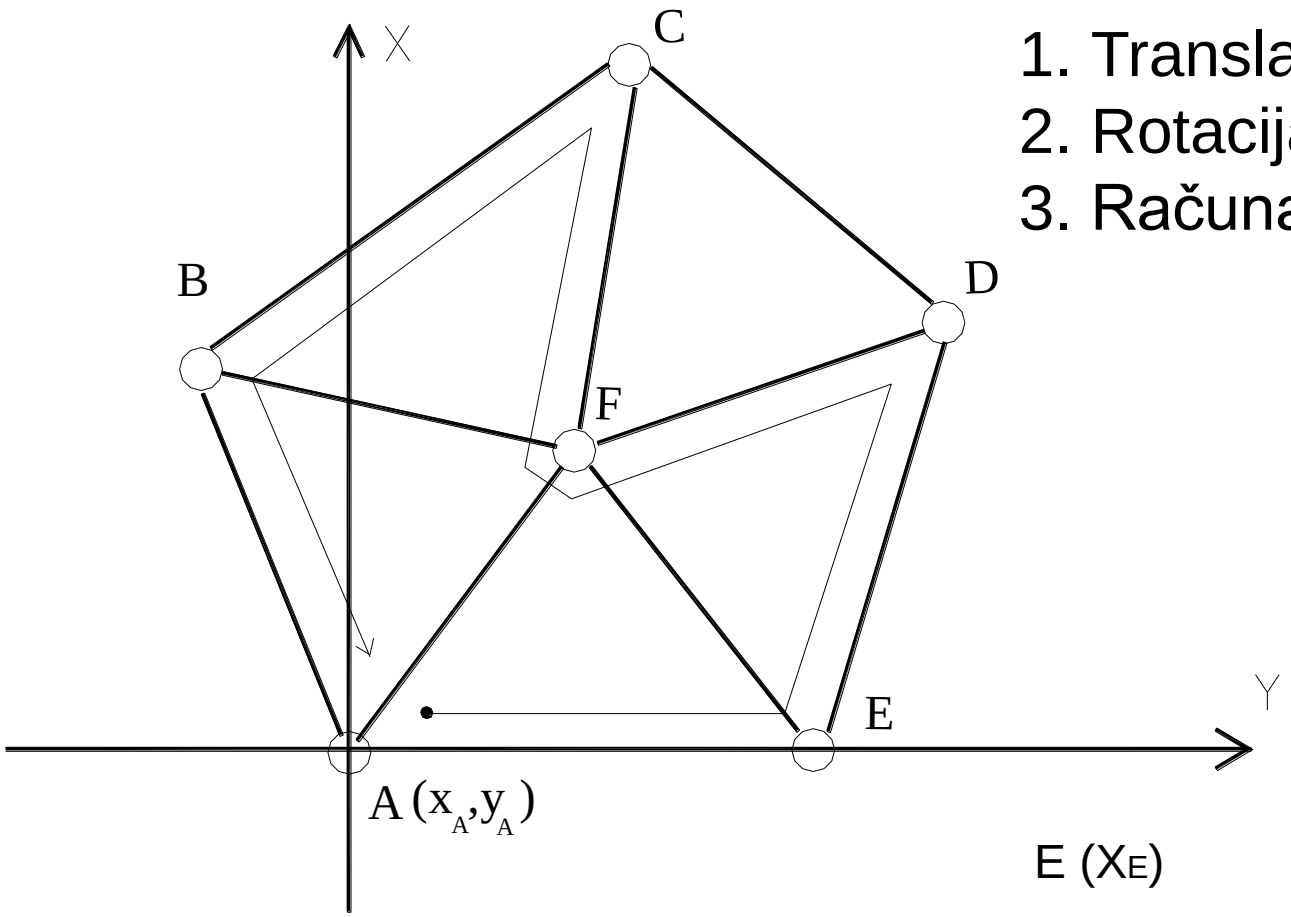
RAČUNANJE KOORDINATA TAČAKA



1. Translacija **A (X_A, Y_A)**
2. Rotacija **V_{A-B}**
3. Računanja **Xi, Yi**

Definisanje parametara datuma

4.7 IZRAVNANJE SLOBODNE MREŽE
RAČUNANJE KOORDINATA TAČAKA

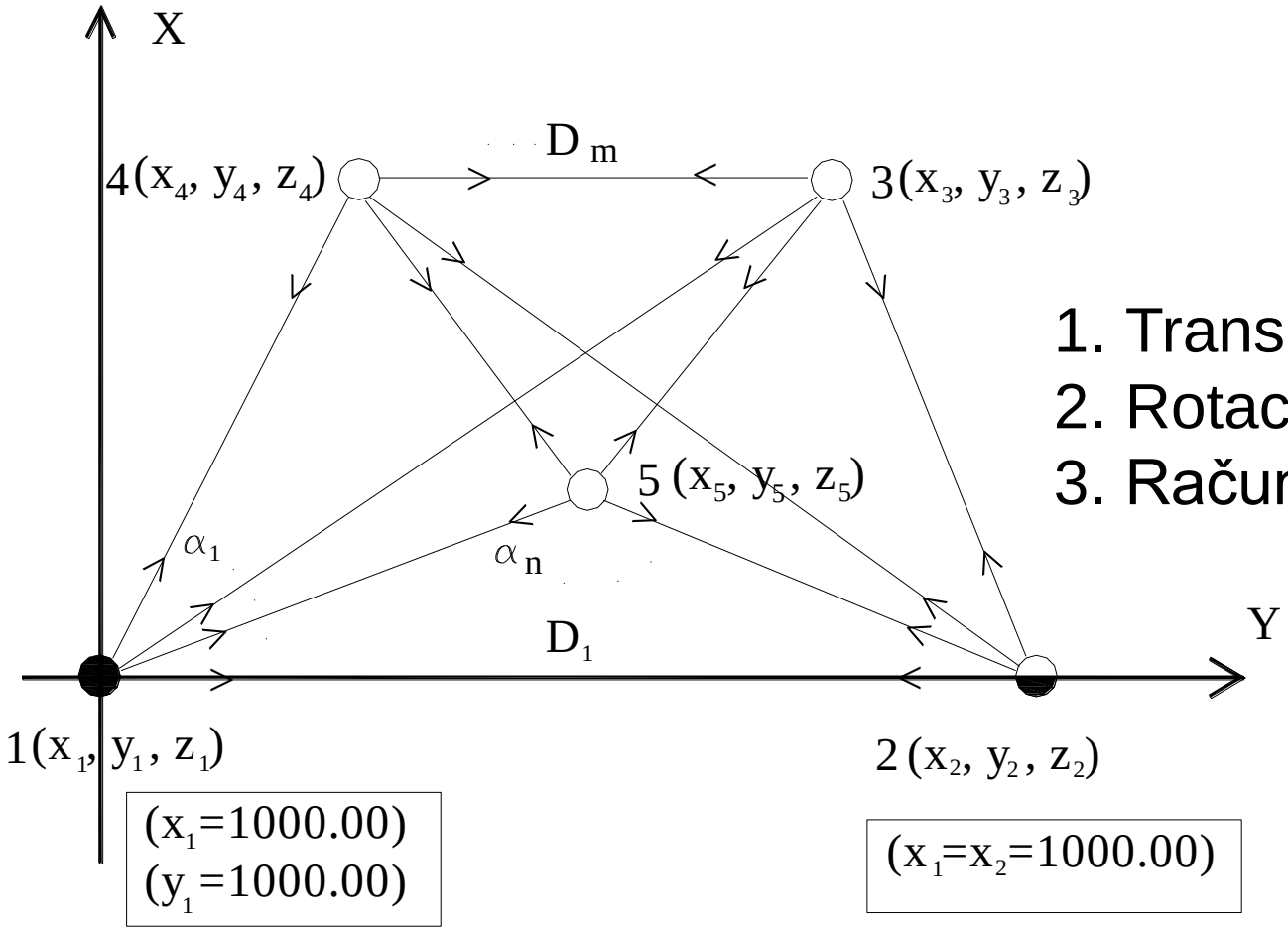


1. Translacija **A (X_A, Y_A)**
2. Rotacija **X_E**
3. Računanja **Xi, Yi**

Definisanje parametara datuma

4.7 IZRAVNANJE SLOBODNE MREŽE

RAČUNANJE KOORDINATA TAČAKA



1. Translacija **1 (X_1, Y_1)**
2. Rotacija **X_2**
3. Računanja **Xi, Yi**

Definisanje parametara datuma