2. MATEMATIČKI MODELI IZRAVNANJA MREŽA U PREMERU

- METOD NAJMANJIH KVADRATA -

2.0 UVOD

U **teoriji** i **praktičnim primenama izravnanja geodetskih mreža**, postoji širok spektar različitih **matematičkih modela izravnanja**.

Osnovne komponente metoda izravnanja su:

- merene veličine,
- stohastički model,
- funkcionalni model,
- algoritam izravnanja,
- ocene parametara,
- ocena tačnosti i
- kontrola kvaliteta.

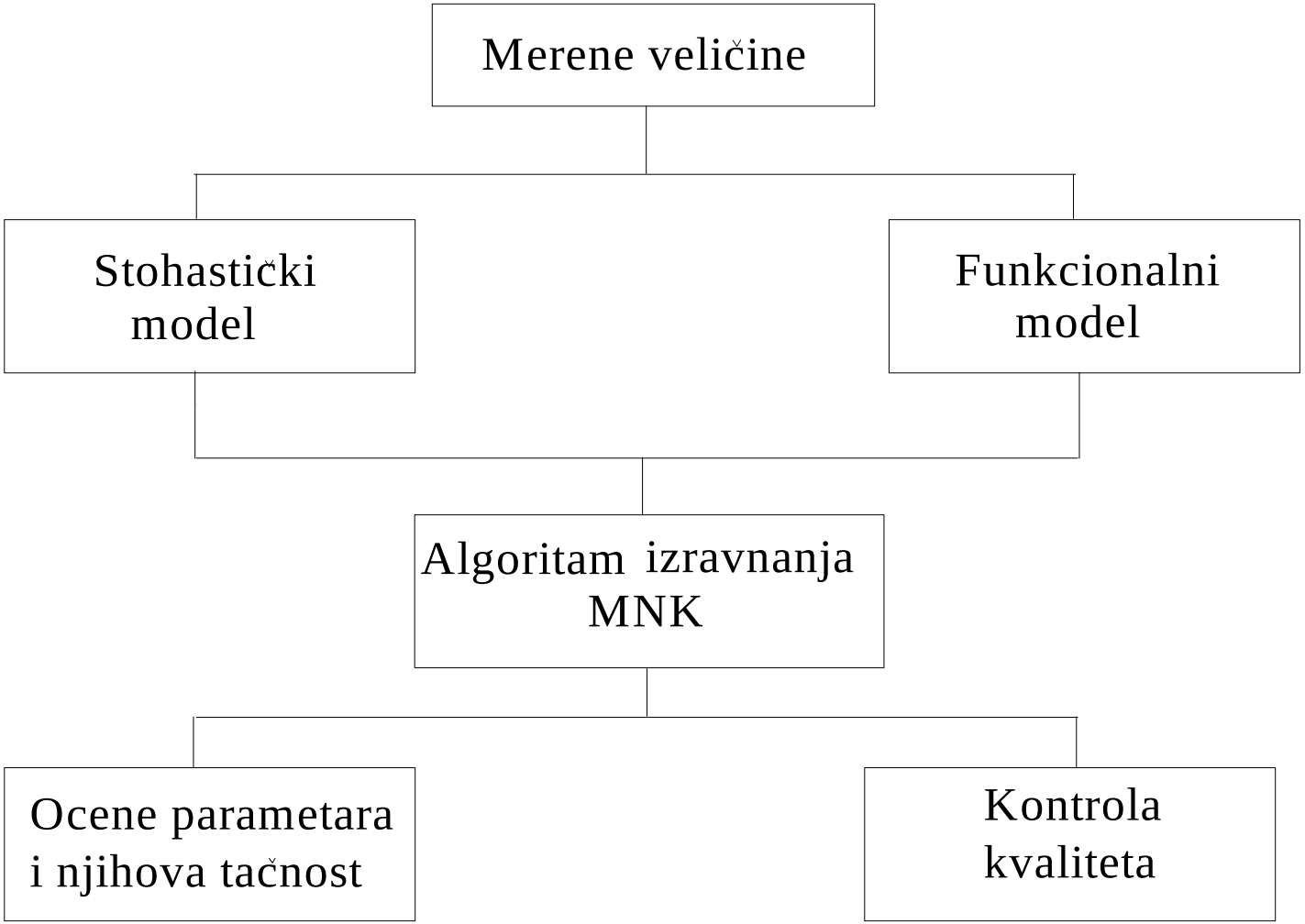
2.1 METOD NAJMANJIH KVADRATA

U teoriji izravnanja geodetskih mreža, koja se bazira na primeni **metoda najmanjih kvadrata (MNK)**, postoje različiti matematički modeli izravnanja.

U praktičnim primenama izravnanja geodetskih mreža najčešće se koriste sledeće metode:

- izravnanje po metodi posrednih merenja,
- izravnanje po metodi uslovnih merenja,
- izravnanje po metodi uslovnih merenja sa nepoznatim parametrima,
- izravnanje po metodi posrednih merenja kada su parametri u određenim matematičkim uslovima.

2.1 METOD NAJMANJIH KVADRATA



Komponente metoda izravnanja po MNK

2.1 METOD NAJMANJIH KVADRATA MERENE VELIČINE

Za merene veličine $l_1, l_2, ..., l_n$ formira se:

$$\mathbf{l} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \dots \\ l_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{K_l} = \begin{pmatrix} \sigma_{l_1}^2 & \sigma_{l_1 l_2} & \dots & \sigma_{l_1 l_n} \\ \sigma_{l_2 l_1} & \sigma_{l_2}^2 & \dots & \sigma_{l_2 l_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{l_n l_1} & \sigma_{l_n l_2} & \dots & \sigma_{l_n}^2 \end{pmatrix}$$

Merene veličine su slučajne veličine koje slede normalnu raspodelu verovatnoća simbolično izraženo u obliku

$$\mathbf{l} \sim N(\boldsymbol{\mu}_\mathbf{l}, \mathbf{K_l})$$

gde je: σ_{li} standardna devijacija

$\sigma_{lilj} = \rho_{ij} \cdot \sigma_{li} \cdot \sigma_{lj}$ kovarijansa.

2.1 METOD NAJMANJIH KVADRATA

STOHASTIČKI MODEL

Stohastički model je identičan za sve metode izravnanja jer se odnosi na vektor merenih veličina $\mathbf{l}$.

Kada su merene veličine u geodetskim mrežama stohastički zavisne veličine treba koristiti kovarijacionu matricu

$$\mathbf{K}_\mathbf{l} = \sigma_o^2 \cdot \mathbf{Q}_\mathbf{l} \qquad (1)$$

gde su:

σ_o	standardna devijacija jedinice težine
$\mathbf{K}_\mathbf{l}$	kovarijaciona matrica
$\mathbf{Q}_\mathbf{l}$	matrica kofaktora

2.1 METOD NAJMANJIH KVADRATA

Kada su merene veličine stohastički nezavisne onda su svi elementi van glavne dijagonale kovarijacione matrice jednaki nuli

$$\mathbf{K_l} = \begin{pmatrix} \sigma_{l_1}^2 & & & \\ & \sigma_{l_2}^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_{l_n}^2 \end{pmatrix} = \sigma_o^2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{p_1} & & & \\ & \frac{1}{p_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{p_n} \end{pmatrix} = \sigma_o^2 \cdot \mathbf{P_l^{-1}}$$

gde je:

$p_i = \frac{\sigma_o^2}{\sigma_{l_i}^2}$ težine rezultata merenja

$\rho_{ij} = 0$ koeficijent korelacije

$\sigma_{lilj} = \rho_{ij} \cdot \sigma_{li} \cdot \sigma_{lj} = 0$ kovarijansa.

2.1 METOD NAJMANJIH KVADRATA

gde je

$$\mathbf{P_l^{-1}} = \begin{pmatrix} 1/p_1 & & & \\ & 1/p_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/p_n \end{pmatrix}$$

odnosno, matrica težina, biće

$$\mathbf{P_l} = \begin{pmatrix} p_1 & & & \\ & p_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_n \end{pmatrix} = Diag\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

2.1 METOD NAJMANJIH KVADRATA

Iz izraza za kovarijacionu matricu (1) sledi matrica kofaktora merenih veličina u obliku

$$\mathbf{Q_l} = \frac{1}{\sigma_o^2} \cdot \mathbf{K_l} \qquad (2)$$

Matrica težina merenih veličina po definiciji je

$$\mathbf{P_l} = \mathbf{Q_l^{-1}} = \boldsymbol{\sigma}_\mathbf{o}^\mathbf{2} \cdot \mathbf{K_l^{-1}} \qquad (3)$$

i ona reprezentuje stohastički model rezultata merenja.

2.1 METOD NAJMANJIH KVADRATA

Za stohastički nezavisna merenja matrica težina (3) ima oblik

$$\mathbf{P_l} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_o^2}{\sigma_{l_1}^2} & & & \\ & \frac{\sigma_o^2}{\sigma_{l_2}^2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{\sigma_o^2}{\sigma_{l_n}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & & & \\ & p_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_n \end{pmatrix}$$

gde je: $\rho_{ij} = 0$ koeficijent korelacije

$\sigma_{lilj} = \rho_{ij} \cdot \sigma_{li} \cdot \sigma_{lj} = 0$ kovarijansa.

2.1 METOD NAJMANJIH KVADRATA

gde su težine pojedinih rezultata merenja

$$p_i = \frac{\sigma_o^2}{\sigma_{l_i}^2} \qquad (4)$$

Težine merenih veličina izražavaju stepen poverenja u rezultate merenih veličina.

2.1 METOD NAJMANJIH KVADRATA

Za rezultate merenja homogene tačnosti važi

$$\sigma_{l_1} = \sigma_{l_2} = \ldots = \sigma_{l_n} = \sigma_o$$

pa matrica težina (3) postaje jedinična matrica

$$\mathbf{P_l} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$$

2.1 METOD NAJMANJIH KVADRATA

FUNKCIONALNI MODEL

Oblik funkcionalnog modela zavisi od metoda izravnanja geodetske mreže i njene geometrije.

U opštem slučaju funkcije veze u modelima izravnanja su nelinearne i pišu se u implicitnom vektorskom obliku.

Kada je kreiran funkcionalni modeli izravnanja neophodno je odrediti i korespondentan stohastički model izravnanja.

2.1 METOD NAJMANJIH KVADRATA

OPŠTI NELINEARNI FUNKCIONALNI MODEL POSREDNOG IZRAVNANJA

U opštem slučaju funkcije veze su nelinearne i pišu se u implicitnom vektorskom obliku

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{F}(\hat{\mathbf{X}})$$

2.1 METOD NAJMANJIH KVADRATA

gde su vektori

$$\hat{\mathbf{l}} = \begin{pmatrix} \hat{l}_1 \\ \hat{l}_2 \\ \vdots \\ \hat{l}_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{l} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \upsilon_1 \\ \upsilon_2 \\ \vdots \\ \upsilon_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{F}(\hat{\mathbf{X}}) = \begin{pmatrix} F_1(\hat{\mathbf{X}}) \\ F_2(\hat{\mathbf{X}}) \\ \vdots \\ F_n(\hat{\mathbf{X}}) \end{pmatrix}$$

gde je:

$\hat{\mathbf{l}}$	vektor izravnatih (ocenjenih) veličina,
$\mathbf{l}$	vektor merenih veličina,
$\mathbf{v}$	vektor popravaka merenih veličina,
$\mathbf{F}(\hat{\mathbf{X}})$	vektor nelinearnih matematičkih funkcija i
$\hat{\mathbf{X}}$	vektor izravnatih (ocenjenih) parametara.

2.1 METOD NAJMANJIH KVADRATA

Vektor izravnatih parametara je

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{X_0} + \hat{\mathbf{x}}$$

gde su vektori

$$\hat{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \vdots \\ \hat{t} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{X_0} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \vdots \\ t_0 \end{pmatrix} \qquad \hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ \vdots \\ dt \end{pmatrix}$$

2.1 METOD NAJMANJIH KVADRATA

Opšti nelinearni funkcionalni model posrednog izravnanja i stohastički model imaju oblik

$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + v = \mathbf{F}(\hat{\mathbf{X}})$	Opšti nelinearni funkcionalni model posrednog izravnanja.
$\mathbf{K}_\mathbf{l} = \sigma_o^2 \cdot \mathbf{Q}_\mathbf{l}$	Opšti stohastički model.

2.1. METOD NAJMANJIH KVADRATA

OPŠTI NELINEARNI FUNKCIONALNI MODEL USLOVNOG IZRAVNANJA

U opštem slučaju uslovne jednačine su nelinearne i pišu se u implicitnom vektorskom obliku

$$\mathbf{F}(\hat{\mathbf{l}}) = \mathbf{F}\left(\mathbf{l} + \mathbf{v}\right) = \mathbf{T}$$

2.1. METOD NAJMANJIH KVADRATA

gde su vektori

$$\mathbf{F}(\hat{\mathbf{I}}) = \begin{pmatrix} F_1(\hat{\mathbf{I}}) \\ F_2(\hat{\mathbf{I}}) \\ \vdots \\ F_r(\hat{\mathbf{I}}) \end{pmatrix} \qquad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_r \end{pmatrix}$$

gde je: $\mathbf{F}(\hat{\mathbf{I}})$ vektor nelinearnih matematičkih uslovnih jednačina,

$\mathbf{T}$ vektor teorijskih vrednosti funkcija.

2.1 METOD NAJMANJIH KVADRATA

Opšti nelinearni funkcionalni model uslovnog izravnanja i stohastički model imaju oblik

$\mathbf{F}(\hat{\mathbf{l}}) = \mathbf{F}(\mathbf{l} + \mathbf{v}) = \mathbf{T}$	Opšti nelinearni funkcionalni model uslovnog izravnanja.
$\mathbf{K}_l = \sigma_o^2 \cdot \mathbf{Q}_l$	Opšti stohastički model.

2.1 METOD NAJMANJIH KVADRATA

OPŠTI NELINEARNI FUNKCIONALNI MODEL USLOVNOG IZRAVNANJA SA NEPOZNATIM PARAMETRIMA

U opštem slučaju uslovne jednačine su nelinearne i pišu se u implicitnom vektorskom obliku

$$\mathbf{F}(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{X}}) = \mathbf{F}\left(\mathbf{l} + \mathbf{v}, \hat{\mathbf{X}}\right) = \mathbf{T}$$

2.1 METOD NAJMANJIH KVADRATA

Opšti nelinearni funkcionalni model uslovnog izravnanja sa nepoznatim parametrima i stohastički model imaju oblik

$\mathbf{F}(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{X}}) = \mathbf{F}(\mathbf{l} + \mathbf{v}, \hat{\mathbf{X}}) = \mathbf{T}$	Opšti nelinearni funkcionalni model uslovnog izravnanja sa nepoznatim parametrima.
$\mathbf{K}_1 = \sigma_o^2 \cdot \mathbf{Q}_1$	Opšti stohastički model.

2.1 METOD NAJMANJIH KVADRATA

U svim metodama izravnanja nelinearni funkcionalni modeli prevode se u linearne modele aproksimacijom linearnog dela Tajlorovog reda.

Za tačke razvoja u Tajlorov red koriste se:

- rezultati merenja $\mathbf{l}$
- privremene vrednosti nepoznatih parametara $\mathbf{X}_0$

2.1 METOD NAJMANJIH KVADRATA

U opštem metodu, uslovnog izravnanja sa nepoznatim parametrima Tajlorov red je oblika

$$\mathbf{F}(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{X}}) = \mathbf{F}(\mathbf{l} + \mathbf{v}, \mathbf{X}_0 + \mathbf{dx}) = \mathbf{F}(\mathbf{l}, \mathbf{X}_0) + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{l}}\mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}_0}\mathbf{dx} = \mathbf{T}$$

U narednim poglavljima posvećenim metodama izravnanja detaljno se razmatraju linearizacije nelinearnih funkcionalnih modela primenom Tajlorovog reda kao i sistemi linearnih jednačina.

2.1 METOD NAJMANJIH KVADRATA

ALGORITAM IZRAVNANJA

Najznačajnija komponenta metoda izravnanja je algoritam izravnanja odnosno primena MNK.

Linearni sistemi su nesaglasni odnosno imaju višeznačna rešenja.

Primenom MNK obezbeđuju se jednoznačni rezultati, odnosno od mnoštva mogućih dobijaju se najbolja rešenja primenom uslova minimuma:

2.1 METOD NAJMANJIH KVADRATA

- za nezavisne merene veličine

$$\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{P}_l \cdot \mathbf{v} = \min$$

- za zavisne merene veličine

$$\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{Q}_l^{-1} \cdot \mathbf{v} = \min$$

gde je:

$\mathbf{v}$	vektor popravaka merenih veličina,
$\mathbf{P}_l$	matrica težina merenih veličina,
$\mathbf{Q}_l$	matrica kofaktora merenih veličina .

2.1 METOD NAJMANJIH KVADRATA

OCENA PARAMETARA

Komponenta metoda izravnanja koja se odnosi na ocene parametara i njihovu tačnost daje potpune informacije o rezultatima izravnanja.

Određuju se jedinstvene ocene za:

$\hat{\mathbf{x}}$ vektor nepoznatih parametara

$\hat{\mathbf{l}}$ vektor izravnatih rezultata merenja

$\mathbf{v}$ vektor popravaka.

2.1 METOD NAJMANJIH KVADRATA

Pored ocena vrednosti pojedinih veličina neophodno je odrediti i njihovu tačnost.

Tačnost pojedinih veličina određuje se kovarijacionim matricama:

$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}$ nepoznatih parametara

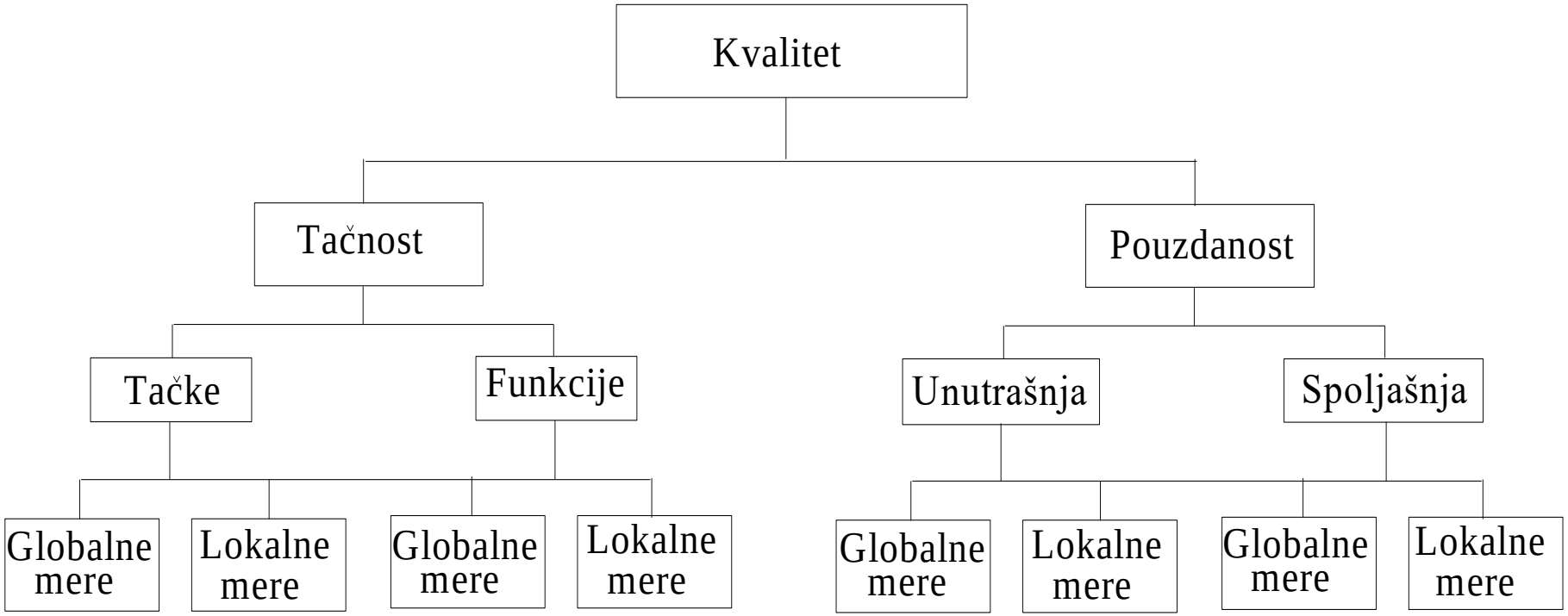
$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{l}}}$ izravnatih rezultata merenja

$\mathbf{K}_{\mathbf{v}}$ popravaka.

2.2 METOD NAJMANJIH KVADRATA

KONTROLA KVALITETA

Kvalitet geodetskih mreža nakon izravnanja određen je sa dve podjednako važne komponenete: tačnost i pouzdanost.



Koncept kvaliteta geodetskih mreža

2.2 METOD NAJMANJIH KVADRATA

KONTROLA KVALITETA

Prva komponenta se odnosi na globalne i lokalne mere tačnosti tačaka ili funkcija.

Druga komponenta se odnosi na globalne i lokalne mere pouzdanosti unutrašnje ili spoljašnje.

Koncept kvaliteta primenjuje se u analizi geodetskih mreža nakon izravnanja, pri projektovanju geodetskih mreža u okviru prethodne anlize tačnosti i optimizacije geodetskih mreža.