



Универзитет у Београду - Грађевински
факултет

www@grf.bg.ac.rs

Студијски програми:

ГРАЂЕВИНАРСТВО, ГЕОДЕЗИЈА И ГЕОИНФОРМАТИКА

ПРВА ГОДИНА/ПРВИ СЕМЕСТАР

МАТЕМАТИКА 1 (БЗО1М1, БЗГ1М1, БЗ1М1)

Наставник: В. проф. др Зоран Пуцановић

Наслов предавања: Реалне функције

Датум: 26.12.2024.

Београд, 2024.

Сва ауторска права аутора презентације и/или видео снимака су заштићена. Снимац или презентација се могу користити само за наставу на даљину студента Грађевинског факултета Универзитета у Београду у школској 2024/2025 и не могу се користити за друге сврхе без писмене сагласности аутора материјала.

0.0.1 Основне особине реалних функција

- Увод. Дефиниција реалне функције и начини задавања.
- Основне особине. **Ограниченост, монотоност, периодичност, парност,...**
- Примери.
- Појам **елементарне и део по део елементарне функције**.

Под **елементарним функцијама** подразумевамо:

- 1°) Константне, степене, експоненцијалне и логаритамске функције.
- 2°) Тригонометријске и инверзне тригонометријске функције.
- 3°) Хиперболичке и инверзне хиперболичке функције.
- 4°) Функције које се могу добити од претходно наведених функција применом коначно много аритметичких операција $(+, -, \cdot, /)$ и коначно много композиција.

0.0.2 Гранична вредност функције

Дефиниција 0.1. Кошијева дефиниција граничне вредности. Нека $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ и нека је $a \in \mathbb{R}$ тачка нагомилавања скупа D . Реалан број A је **гранична вредност** или **лимес** функције f у тачки a , у ознаци $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ или $f(x) \rightarrow A$ када $x \rightarrow a$, ако важи:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D)(0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon). \quad (1)$$

- Детаљно објашњење дефиниције и илустрације.
- **Разумевање значења свих уведених ознака!**
- Примери.

Дефиниција 0.2. Леви и десни лимес. Нека је $a \in \mathbb{R}$ тачка нагомилавања скупа D . Реалан број A је **лева (десна) гранична вредност функције f у тачки a** , у ознаци $f(a^-)$ и $f(a^+)$, ако важе следећи услови:

$$f(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = A \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D)(0 < a - x < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon).$$

$$f(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D)(0 < x - a < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon).$$

Дефиниција 0.3. Уопштење Кошијеве дефиниције граничне вредности.

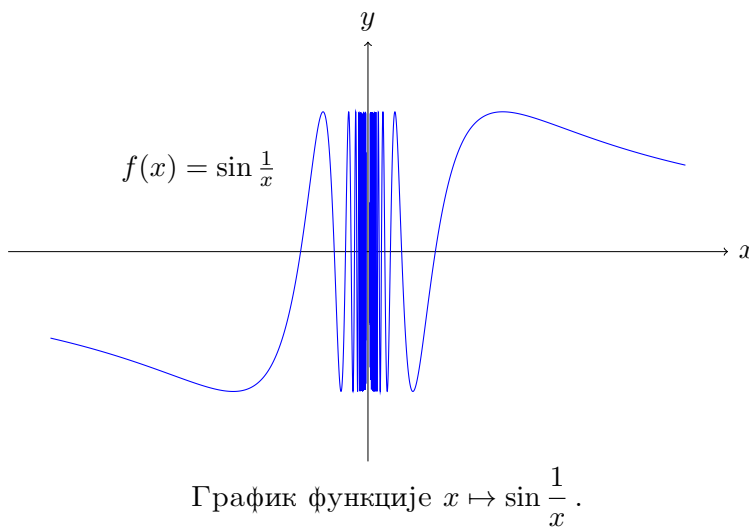
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \iff (\forall E > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D)(0 < |x - a| < \delta \implies f(x) > E).$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \iff (\forall E > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D)(0 < |x - a| < \delta \implies f(x) < -E).$
- Примери сличних уопштења.
- Дефиниција лimesа преко околине.

Дефиниција 0.4. Хајнеова дефиниција граничне вредности. Нека је $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ и нека је $a \in \overline{\mathbb{R}}$ тачка нагомилавања скупа D . Тада је $A \in \overline{\mathbb{R}}$ гранична вредност функције f када $x \rightarrow a$, ако

$$(\forall x_n \in D \setminus \{a\})(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A). \quad (2)$$

Теорема 0.1. Кошијева и Хајнеова дефиниција граничне вредности су еквивалентне.

- Доказ теореме. Књига, страна 187 - 188, Теорема 5.12.
- Примери.
- Функција $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. Објашњење.



0.0.3 Особине лимеса функције

- Еквивалентни докази. Примена теореме 0.1.

Тврђење 0.1. Ако постоји $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, онда је он јединствен.

Тврђење 0.2. Ако постоји $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, онда је f ограничена у некој околини тачке a .

Теорема 0.2. О монотоности лимеса функције. Нека су $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ и нека је $a \in \mathbb{R}$ тачка нагомилавања скупа D . Даље, нека постоји δ -околина $U = (a - \delta, a + \delta)$, таква да је

$$f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in D \cap (U \setminus \{a\}).$$

Ако постоје $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, онда је $A \leq B$.

Последица 0.1. 1°) Ако су испуњени услови теореме 0.2 и ако је $f(x) \leq M$ ($f(x) \geq m$), за све $x \in D \cap (U \setminus \{a\})$ и за неке $m, M \in \mathbb{R}$, онда је и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq M$ ($\lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq m$).

2°) Нека је $a \in \mathbb{R}$ тачка нагомилавања скупа D и нека је $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Онда постоји околина U тачке a , таква да је $f(x) > g(x)$ за све $x \in D \cap (U \setminus \{a\})$.

Теорема 0.3. Теорема о два полицајца за функције. Нека су $f, g, h: D \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ тачка нагомилавања скупа D и нека постоји δ -околина $U = (a - \delta, a + \delta)$, таква да је

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad \forall x \in D \cap (U \setminus \{a\}).$$

Ако је $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$, онда је и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$.

Теорема 0.4. Нека је $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ за неке $A, B \in \mathbb{R}$. Тада важи:

$$1^\circ) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B.$$

$$2^\circ) \lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = AB.$$

$$3^\circ) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \text{ где је } B \neq 0.$$

Тврђење 0.3. Нека су $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ и нека је $a \in \mathbb{R}$ тачка нагомилавања скупа D . Ако је $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ и ако је функција g ограничена у некој ε -околини $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \setminus \{a\}$, онда је

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = 0.$$

Тврђење 0.4. О лimesу сложене функције. Нека је $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$, $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$ и $f(D_f) \subseteq D_g$. Даље, нека је $a \in \mathbb{R}$ тачка нагомилавања скупа D_f , $b \in \mathbb{R}$ тачка нагомилавања¹ скупа D_g и нека је $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = A$. Ако за сваку ε -околину $V = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$, постоји δ -околина $U = (a - \delta, a + \delta)$, за коју је $f(U \setminus \{a\}) \subset V \setminus \{b\}$, онда је

$$\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = A.$$

¹Тврђење важи и ако су $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.

Докази. Књига, стране 189 - 192.

Задатак 0.1. Доказати да је

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e. \quad (4)$$

Пример 0.1. Следеће граничне вредности функција могу се добити из лимеса (3) или из (4), применом описаних правила за налажење лимеса функције.

$$1^\circ) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$$

$$2^\circ) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

$$3^\circ) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$$

$$4^\circ) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

$$5^\circ) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad a > 0, \quad a \neq 1. \quad \text{Специјално, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

$$6^\circ) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e, \quad a > 0, \quad a \neq 1. \quad \text{Специјално, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

$$7^\circ) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Доказивање граничних вредности $1^\circ) - 7^\circ)$ препушта се читаоцу. ◇

0.0.4 Асимптотско понашање функција

Дефиниција 0.5. Функција $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ је **бесконачно мала** (**инфинитезимала**) када $x \rightarrow a$, ако је $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$. Ако је $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ или је $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, кажемо да је f **бесконачно велика** када $x \rightarrow a$.

Дефиниција 0.6. Функција f је **бесконачно мала у односу на функцију** g када $x \rightarrow a$, у ознаци $f = o(g)$, $x \rightarrow a$ (читамо: f је мало o од g када $x \rightarrow a$), ако постоји функција $x \mapsto \alpha(x)$, тако да

$$f(x) = \alpha(x)g(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0. \quad (5)$$

Специјално, ако су функције f и g бесконачно мале када $x \rightarrow a$, онда кажемо да је f **бесконачно мала вишег реда** у односу на функцију g када $x \rightarrow a$.

Дефиниција 0.7. Функција f је **велико O од g** када $x \rightarrow a$, у ознаци $f = O(g)$, $x \rightarrow a$, ако постоји ограничена функција $x \mapsto \alpha(x)$, тако да у некој околини $(a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$, важи

$$f(x) = \alpha(x)g(x) \text{ и } |\alpha(x)| \leq M, \text{ за неко } M \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Ако је $f = O(g)$ и $g = O(f)$ када $x \rightarrow a$, онда кажемо да су f и g *истог реда* када $x \rightarrow a$.

Дефиниција 0.8. Кажемо да се **функција f понаша као функција g** када $x \rightarrow a$, или да су f и g **асимптотски еквивалентне** када $x \rightarrow a$, у ознаци $f \sim g$, $x \rightarrow a$, ако постоји функција $x \mapsto \alpha(x)$, тако да у некој околини $(a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$ важи

$$f(x) = \alpha(x)g(x) \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 1. \quad (7)$$

Теорема 0.5. За функције f и g дефинисане у некој δ -околини $(a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$ тачке a , важи:

$$f \sim g, \ x \rightarrow a \iff f = g + o(g), \ x \rightarrow a. \quad (8)$$

О поређењу бесконачно малих

Нека су f и g бесконачно мале када $x \rightarrow a$ и нека постоји $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. Тада:

- f је вишег реда у односу на g (брже тежи нули) када $x \rightarrow a$, ако је $L = 0$.
Тада пишемо $f = o(g)$ када $x \rightarrow a$.
- f је нижег реда у односу на g (спорије тежи нули) када $x \rightarrow a$, ако је $|L| = +\infty$.
Записујемо $g = o(f)$ када $x \rightarrow a$.
- f и g су истог реда када $x \rightarrow a$ ($f = O(g)$ и $g = O(f)$), ако је $L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- $f \sim g$ када $x \rightarrow a$ (f и g су еквивалентне бесконачно мале), ако је $L = 1$.

Тврђење 0.5. Важе следећа правила:

1°) $o(f) + o(f) = o(f), \ x \rightarrow a.$

2°) $O(f) + O(f) = O(f), \ x \rightarrow a.$

3°) $o(f) + O(f) = O(f), \ x \rightarrow a.$

4°) $f \cdot o(g) = o(fg), \ x \rightarrow a.$

- Илустрације и примери.



Универзитет у Београду - Грађевински
факултет

www@grf.bg.ac.rs

Студијски програм:

ГРАЂЕВИНАРСТВО, ГЕОДЕЗИЈА И ГЕОИНФОРМАТИКА

ПРВА ГОДИНА/ПРВИ СЕМЕСТАР

МАТЕМАТИКА 1 (БЗО1М1, БЗГ1М1, БЗ1М1)

Наставник:

В. проф. др Зоран Пуцановић

Наслов предавања:

Непрекидност функције

Датум:

26.12.2024.

Београд, 2024.

Сва ауторска права аутора презентације и/или видео снимака су заштићена. Снимац или презентација се могу користити само за наставу на даљину студента Грађевинског факултета Универзитета у Београду у школској 2024/2025 и не могу се користити за друге сврхе без писмене сагласности аутора материјала.

0.0.1 Дефиниција непрекидности функције

Дефиниција 0.1. Нека је $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ и нека је $a \in D$ тачка нагомилавања скупа D . Функција f је **непрекидна у тачки a** ако је:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D)(|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon) \quad (1)$$

$$\iff (\forall x_n \in D) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a) \right) \quad (2)$$

Дефиниција 0.2. Нека је f дефинисана у некој околини $[a, a + \varepsilon)$ ($(a - \varepsilon, a]$). Кажемо да је f **непрекидна слева у тачки a** , ако је $f(a^-) = f(a)$. Аналогно, f је **непрекидна здесна у тачки a** , ако је $f(a^+) = f(a)$.

Тврђење 0.1. Нека је a унутрашња тачка скупа D . Тада важи:

$$f \text{ је непрекидна у } a \iff f(a^-) = f(a^+) = f(a). \quad (3)$$

- Тврђења која непосредно следе из Кошијеве дефиниције (стр. 197).
- Непрекидност елементарних функција.
- Примери.

0.0.2 Тачке прекида

Дефиниција 0.3. Тачка $a \in D_f$ је *тачка прекида* функције f ако f није непрекидна у a .

- Дискусија претходне дефиниције.

Дефиниција 0.4. Врсте прекида. Нека је $a \in D_f$ тачка нагомилавања домена и нека f има прекид у тачки a .

- Прекид у a је **прве врсте**, ако постоје (коначни) $f(a^-)$ и $f(a^+)$, али није испуњена једнакост $f(a^-) = f(a^+) = f(a)$.
- Прекид у тачки a је **друге врсте**, ако није прве врсте.

Дефиниција 0.5. Прекид прве врсте је **отклоњив**, ако је $f(a^-) = f(a^+) \neq f(a)$. Ако је $f(a^-) = f(a) \neq f(a^+)$, кажемо да је f **непрекидна слева** у тачки a . Аналогно, ако је $f(a^+) = f(a) \neq f(a^-)$, кажемо да је f **непрекидна здесна** у тачки a .

- Детаљно објашњење дефиниције и илустрације.

0.0.3 Особине непрекидне функције на одсечку

Прецизирамо: **f је непрекидна на одсечку $[c, d]$** ако је непрекидна здесна у c , непрекидна слева у d и непрекидна на (c, d) , односно:

- $f(c) = f(c^+)$, $f(d) = f(d^-)$ и $f(a^-) = f(a^+) = f(a)$, за све $a \in (c, d)$.

Теорема 0.1. О егзистенцији нула. *Ако је функција f непрекидна на $[a, b]$ и ако је $f(a)f(b) < 0$, онда постоји тачка $c \in (a, b)$ таква да је $f(c) = 0$.*

Доказ. Књига, стр. 202, Теорема 5.7.

- Примери.
- Графичке илустрације и примена.

Теорема 0.2. Болцано-Кошијева теорема о међувредности. *Нека је f непрекидна на $[a, b]$. Тада f узима све вредности између $f(a)$ и $f(b)$.*

Доказ. Књига, стр. 203, Теорема 5.8.

- Примери.

Теорема 0.3. Болцано-Вајерштрасова теорема. *Ако је f непрекидна на $[a, b]$, онда је она ограничена на $[a, b]$ и достиже своју највећу и најмању вредност на том сегменту.*

Доказ. Књига, стр. 203-204, Теорема 5.9.

- Примери.

Последица 0.1. *Ако је f непрекидна на $[a, b]$, онда је $f([a, b]) = [m, M]$, где је m најмања, а M највећа вредност функције f на сегменту $[a, b]$.*

Теорема 0.4. О непрекидности инверзне функције. *Нека је f непрекидна и строго монотона функција на интервалу I . Тада постоји инверзна функција f^{-1} дефинисана на $J = f(I)$ и та инверзна функција је непрекидна и строго монотона на $f(J)$. Притом је f^{-1} строго растућа, ако је f строго растућа и строго опадајућа, ако је f строго опадајућа.*

Доказ. Књига, стр. 204, Теорема 5.11.

- Примери.

0.0.4 Равномерна непрекидност

Дефиниција 0.6. Функција $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ је **равномерно (униформно)** непрекидна на D ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in D)(|x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon). \quad (4)$$

- Објашњење. Сличности и разлике у односу на обичну непрекидност.
- Примери.

Теорема 0.5. Функција $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ је равномерно непрекидна на D ако

$$(\forall (x_n) \in D)(\forall (y_n) \in D) \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - y_n| = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n) - f(y_n)| = 0. \quad (5)$$

Теорема 0.6. Канторова теорема о равномерној непрекидности. Ако је f непрекидна на одсечку $[a, b]$, онда је она равномерно непрекидна на $[a, b]$.

Доказ. Књига, стр. 207, Теорема 5.13.



Универзитет у Београду - Грађевински
факултет

www@grf.bg.ac.rs

Студијски програм:

ГРАЂЕВИНАРСТВО, ГЕОДЕЗИЈА И ГЕОИНФОРМАТИКА

ПРВА ГОДИНА/ПРВИ СЕМЕСТАР

МАТЕМАТИКА 1 (БЗО1М1, БЗГ1М1, БЗ1М1)

Наставник:

В. проф. др Зоран Пуцановић

Наслов предавања:

Диференцијални рачун

Датум:

26.12.2024.

Београд, 2024.

Сва ауторска права аутора презентације и/или видео снимака су заштићена. Снимац или презентација се могу користити само за наставу на даљину студента Грађевинског факултета Универзитета у Београду у школској 2024/2025 и не могу се користити за друге сврхе без писмене сагласности аутора материјала.

0.0.1 Извод и диференцијал

- Веза са тангентом и геометријска интуиција.
- Геометријска и механичка интерпретација.
- Примери.

Дефиниција 0.1. Нека је $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана у некој околини тачке x_0 . Ако постоји коначан лимес

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad (1)$$

онда $f'(x_0)$ зовемо **изводом** функције f у тачки x_0 и кажемо да је f **диференцијабилна** у тачки x_0 .

- Изводи елементарних функција.
- Диференцијал функције.
- Геометријска интерпретација.
- Примена.

Дефиниција 0.2. Нека је f диференцијабилна у тачки x . Функција $x \mapsto f'(x)\Delta x$ зове се **диференцијал** функције f у тачки x и означава се са $df(x) = f'(x)\Delta x$.

0.0.2 Леви и десни извод

- Полутангента.
- Геометријска интерпретација. Шпицеви функције.
- Примери: $f(x) = |x|$ и слични.

Дефиниција 0.3. Нека је f дефинисана на неком интервалу I и нека је $x_0 \in I$. Ако постоје (коначне) граничне вредности

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{и} \quad f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad (2)$$

зовемо их **левим и десним изводом** функције f у тачки x_0 , а за функцију f кажемо да је диференцијабилна слева (здесна) у тачки x_0 .

0.0.3 Диференцијабилност и непрекидност

Теорема 0.1. Ако је f диференцијабилна у x_0 , онда је f непрекидна у x_0 .

Доказ. Књига, стр. 218, Теорема 6.2.

0.0.4 Правила диференцирања

Теорема 0.2. Извод збира, производа и количника. Нека су f и g диференцијабилне у тачки x . Тада су функције $f \pm g$, $\lambda \cdot f$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \cdot g$ и f/g (за функцију f/g , уз посебан услов, $g(t) \neq 0$ у околини тачке x) диференцијабилне у тачки x и притом важи:

$$1^\circ) (f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x).$$

$$2^\circ) (\lambda f)'(x) = \lambda f'(x).$$

$$3^\circ) (f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

$$4^\circ) \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Доказ. Књига, стр. 219, Теорема 6.3.

Теорема 0.3. Извод сложене функције. Нека је $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилна у тачки x_0 , нека је $g(D_g) \subset D_f$ и нека је $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилна у тачки $g(x_0)$. Онда је композиција функција $f \circ g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилна у тачки x_0 и важи формула:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0). \quad (3)$$

Доказ. Књига, стр. 220, Теорема 6.4.

Теорема 0.4. Извод инверзне функције. Нека је f непрекидна и строго монотона на (a, b) и нека у тачки $x_0 \in (a, b)$ има коначан извод $f'(x_0) \neq 0$. Онда је инверзна функција f^{-1} диференцијабилна у тачки $y_0 = f(x_0)$ и притом важи

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad (4)$$

Доказ. Књига, стр. 221, Теорема 6.5.

- Параметарски и логаритамски извод.
- Таблица извода. Примери.

0.0.5 Основне теореме диференцијалног рачуна

- Увод и илустрације.
- Дефиниције локалног екстремума, глобалног екстремума и стационарне тачке.

Теорема 0.5. Фермаова теорема. *Ако функција f има локални екстремум у тачки c и ако је диференцијабилна у тој тачки, онда је $f'(c) = 0$.*

Доказ. Књига, стр. 224, Теорема 6.6.

Теорема 0.6. Ролова теорема. *Нека је f непрекидна на $[a, b]$ и диференцијабилна на (a, b) . Ако је $f(a) = f(b)$, онда постоји тачка $c \in (a, b)$ таква да је $f'(c) = 0$.*

Доказ. Књига, стр. 225, Теорема 6.7.

Теорема 0.7. Лагранжова теорема. *Ако је f непрекидна на $[a, b]$ и диференцијабилна на (a, b) , онда постоји тачка $c \in (a, b)$ тако да је*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \quad (5)$$

Доказ. Књига, стр. 226, Теорема 6.8.

Теорема 0.8. Кошијева теорема. *Нека су функције f и g непрекидне на $[a, b]$, диференцијабилне на (a, b) и нека је $g'(x) \neq 0$ за свако $x \in (a, b)$. Онда постоји $c \in (a, b)$ тако да је*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad (6)$$

Доказ. Књига, стр. 229, Теорема 6.11.

- Геометријска интерпретација.
- Илустрације.
- Примери.

0.0.6 Последице основних теорема диференцијалног рачуна

Теорема 0.9. Извод и монотоност. Нека је f диференцијабилна на (a, b) , $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$.

- 1°) Ако је $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) за све $x \in (a, b)$, онда f расте (опада) на (a, b) .
- 2°) Ако је $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) за све $x \in (a, b)$, онда f строго расте (опада) на (a, b) .
- 3°) Ако је f непрекидна на $[a, b]$ и $f'(x) = 0$ за све $x \in (a, b)$, онда је f константна на $[a, b]$.

Доказ. Књига, стр. 228, Теорема 6.9.

Последица 0.1. Нека је $f'(x) = g'(x)$ на интервалу (a, b) . онда је

$$f(x) = g(x) + c,$$

за све $x \in (a, b)$ и неко $c \in \mathbb{R}$.

Теорема 0.10. Прекиди извода. Нека је f непрекидна на $[a, b]$ и диференцијабилна на (a, b) .

- 1°) Ако постоји $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$, онда постоји и $f'_+(a)$ и они су једнаки.
- 2°) Ако постоји $\lim_{x \rightarrow b^-} f'(x)$, онда постоји и $f'_-(b)$ и они су једнаки.
- 3°) Функција $x \mapsto f'(x)$ не може имати прекиде прве врсте на (a, b) .

Теорема 0.11. Лопиталово правило. Нека су функције f и g диференцијабилне на (a, c) , $g'(x) \neq 0$ за свако $x \in (a, c)$ и нека је

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0 \quad \text{или} \quad \pm \infty.$$

Тада је

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad (7)$$

уколико лимес са десне стране постоји у $\overline{\mathbb{R}}$.

Доказ. Књига, стр. 229-230, Теорема 6.12.

- Илустрације и примери.



Универзитет у Београду - Грађевински
факултет

www@grf.bg.ac.rs

Студијски програм:

ГРАЂЕВИНАРСТВО, ГЕОДЕЗИЈА И ГЕОИНФОРМАТИКА

ПРВА ГОДИНА/ПРВИ СЕМЕСТАР

МАТЕМАТИКА 1 (БЗО1М1, БЗГ1М1, БЗ1М1)

Наставник:

В. проф. др Зоран Пуцановић

Наслов предавања:

Тејлорова формула

Датум:

26.12.2024.

Београд, 2024.

Сва ауторска права аутора презентације и/или видео снимака су заштићена. Снимац или презентација се могу користити само за наставу на даљину студента Грађевинског факултета Универзитета у Београду у школској 2024/2025 и не могу се користити за друге сврхе без писмене сагласности аутора материјала.

0.0.1 Изводи и диференцијали вишег реда

Дефиниција 0.1. Нека функција $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ има извод реда $n - 1$, $n \in \mathbb{N}$, на неком подскупу $A \subseteq D_f$, у ознаци $f^{(n-1)}$. Ако је $f^{(n-1)}$ диференцијабилна на $B \subseteq A$, онда је са

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x) \quad (1)$$

дефинисана функција $f^{(n)}: B \rightarrow \mathbb{R}$, коју зовемо **n -тим изводом функције f** . Извод реда 1 зовемо **првим изводом**, извод реда два **другим изводом**, итд. Ако је $n \leq 3$, онда користимо ознаке f' , f'' и f''' . Извод реда нула је сама функција, $f^{(0)}(x) = f(x)$. Ако f има извод реда n , онда кажемо да је функција **n -пута диференцијабилна**.

- Примери.
- n -тим изводи функција $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \ln(1+x)$ и $x \mapsto (1+x)^\alpha$.
- Лајбницова формула.

Теорема 0.1. Лајбницова формула. Ако су функције f и g диференцијабилне n пута у тачки x , онда је и функција $f \cdot g$ диференцијабилна n пута у тачки x и важи формула:

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} f^{(n-j)}(x) g^{(j)}(x). \quad (2)$$

Доказ. Књига, стр. 232, Теорема 6.13.

0.0.2 Тејлорова формула

- Увод и геометријска интуиција.

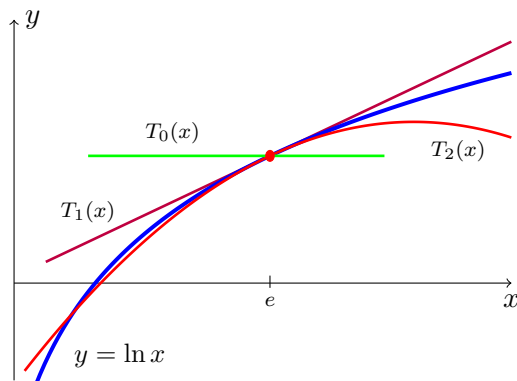
Дефиниција 0.2. Нека је f диференцијабилна n -пута у тачки a . Полином

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \quad (3)$$

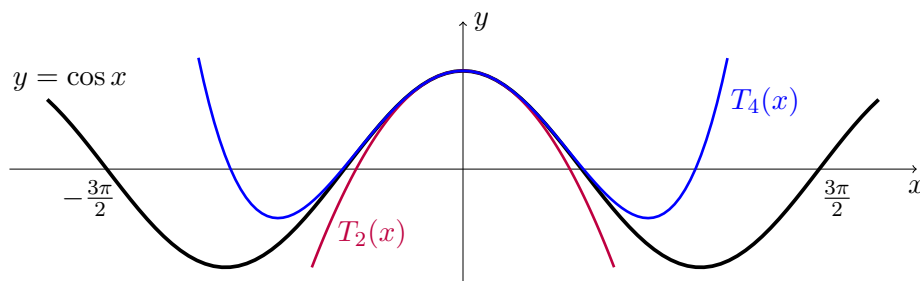
је **Тејлоров полином степена n за функцију f у околини тачке a** .

- Грешка апроксимације и примери.
- **Маклоренов полином** као специјалан случај Тејлоровог полинома.

$$M_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \quad (4)$$



Апроксимација функције $x \mapsto \ln x$ у околини тачке $x_0 = e$ полиномима T_0 , T_1 и T_2 .



Апроксимација функције $x \mapsto \cos x$ у околини нуле полиномима M_2 и M_4 .

Теорема 0.2. Тејлорова формула. Нека је f $(n+1)$ - пута диференцијабилна у неком отвореном интервалу који садржи тачке a и x . Тада постоји тачка c између a и x , тако да важи:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \quad (5)$$

Доказ. Књига, стр. 236, Теорема 6.14.

Дефиниција 0.3. Ако се формула (5) напише у облику

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

онда израз $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, $a < c < x$, зовемо **грешком** или **остатком у Лагранжовом облику**. Може се писати и

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1. \quad (6)$$

Може се показати да за функцију f диференцијабилну n -пута у тачки a и њен Тејлоров полином $T_n(x)$, важи

$$f(x) = T_n(x) + o((x-a)^n), \quad x \rightarrow a, \quad \text{где је } R_n(x) = o((x-a)^n), \quad (7)$$

остатак у Пеановом облику.

Маклоренова формула са остатком у Лагранжовом облику:

$$f(x) = M_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1. \quad (8)$$

Маклоренова формула са остатком у Пеановом облику:

$$f(x) = M_n(x) + o(x^n), \quad x \rightarrow a. \quad (9)$$

Табличне Маклоренове формуле

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \rightarrow 0. \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}), \quad x \rightarrow 0. \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \rightarrow 0. \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad x \rightarrow 0. \\ (1+x)^\alpha &= \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Теорема 0.3. Теорема о јединствености Тејлоровог полинома. Нека је функција f диференцијабилна n -пута у тачки a и нека постоји полином n -тог степена P_n за који важи $f(x) = P_n(x) + o((x-a)^n)$, $x \rightarrow a$. Онда је $P_n(x) = T_n(x)$.

Доказ. Књига, стр. 239, Теорема 6.15.

Теорема 0.4. Примена Тејлорове формуле на одређивање карактера стационарне тачке. Нека функција f има непрекидан n -ти извод у околини тачке a и нека је

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{и} \quad f^{(n)}(a) \neq 0. \quad (10)$$

1°) Ако је n непаран, тачка a није тачка локалног екстремума.

2°) Ако је n паран и $f^{(n)}(a) > 0$, онда у тачки a функција има локални минимум.

3°) Ако је n паран и $f^{(n)}(a) < 0$, онда у тачки a функција има локални максимум.

Доказ. Књига, стр. 241, Теорема 6.16.

- Примери и примене.

0.0.3 Интервали монотоности функције

Теорема 0.5. *Довољни услови за егзистенцију локалног екстремума. Нека је функција f дефинисана у некој околини $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ тачке x_0 . Ако је f непрекидна у x_0 и диференцијабилна на $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$, онда важи:*

- 1°) *Ако f' не мења знак проласком кроз x_0 , онда x_0 није тачка локалног екстремума.*
- 2°) *Ако f' мења знак проласком кроз x_0 , из негативног ка позитивном, онда је x_0 тачка локалног минимума.*
- 3°) *Ако f' мења знак проласком кроз x_0 , из позитивног ка негативном, онда је x_0 тачка локалног максимума.*

Алгоритам за одређивање локалних екстремума непрекидне функције f дефинисане на интервалу (a, b) :

- Одредимо стационарне тачке, тј. решења једначине $f'(x) = 0$ на (a, b) , а затим и тачке из (a, b) у којима f није диференцијабилна. Ове тачке су кандидати за локалне екстремуме функције на задатом интервалу.
 - Одредимо знак првог извода функције на интервалу (a, b) .
 - Анализирамо промене знака извода при проласку кроз тачке које су кандидати за локалне екстремуме и применимо теорему 0.5. Карактер стационарних тачака можемо утврдити и применом теореме 0.4, уколико f има изводе вишег реда.
- Примери.

0.0.4 Конвексност функције

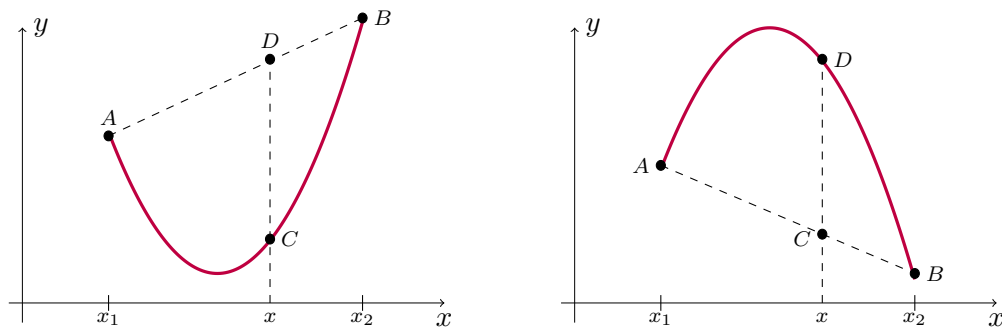
Дефиниција 0.4. Функција $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ је **конвексна** (**конкавна**) на (a, b) ако за све $x_1, x_2 \in (a, b)$ и за све $p_1, p_2 \in \mathbb{R}_0^+$ за које је $p_1 + p_2 = 1$, важи

$$f(p_1x_1 + p_2x_2) \leq p_1f(x_1) + p_2f(x_2) \quad (\text{за конвексну}), \quad (11)$$

$$f(p_1x_1 + p_2x_2) \geq p_1f(x_1) + p_2f(x_2) \quad (\text{за конкавну}). \quad (12)$$

Ако се у неједнакости (11) захтева строга неједнакост за $x_1 \neq x_2$ и $p_1, p_2 > 0$, онда је f **строго конвексна** на (a, b) . Аналогно се дефинише **строго конкавна** функција.

- Илустрације.
- Геометријски смисао уведене дефиниције.
- Практични критеријуми за проверу конвексности диференцијабилне функције.



Графици конвексне и конкавне функције.

Теорема 0.6. Диференцијабилна функција $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ је конвексна (конкавна) на (a, b) ако је f' растућа (оппадајућа) функција на (a, b) .

Доказ. Књига, стр. 245, Теорема 6.18.

Теорема 0.7. Нека је f два пута диференцијабилна на (a, b) . Тада је f конвексна (конкавна) на (a, b) ако је $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) за све $x \in (a, b)$.

Доказ. Књига, стр. 245, Теорема 6.19.

Теорема 0.8. Критеријум конвексности. Диференцијабилна функција $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ је конвексна на (a, b) ако и само ако тачке њеног графика нису испод тачака њене тангенте у произвољној тачки из интервала (a, b) .

Доказ. Књига, стр. 246, Теорема 6.20.

Дефиниција 0.5. Нека је f дефинисана у некој околини $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ тачке x_0 . Ако је f конвексна на $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ и конкавна на $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ или обрнуто, онда кажемо да је x_0 **превојна тачка** функције f .

Тврђење 0.1. Ако је f два пута диференцијабилна у превојној тачки x_0 , онда је $f''(x_0) = 0$.

Доказ. Књига, стр. 247, Тврђење 6.21.

Теорема 0.9. Нека је функција f диференцијабилна у некој околини $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ и два пута диференцијабилна у околини $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$. Онда важи:

- 1°) Ако f'' не мења знак проласком кроз x_0 , онда x_0 није превојна тачка функције f .
- 2°) Ако f'' мења знак проласком кроз x_0 , из негативног ка позитивном, или обрнуто, онда је x_0 превојна тачка функције f .

Доказ. Књига, стр. 247, Теорема 6.22.

- Асимптоте.
- Ток и график функције.

Домаћи задатак

- Г1) Низови: 24 и 32. Непрекидност: 8 и 54. Диференцијабилност: 2 и 28.
Г2) Низови: 22 и 33. Непрекидност: 3 и 48. Диференцијабилност: 1 и 31.
Г3) Низови: 40 и 55. Непрекидност: 4 и 59. Диференцијабилност: 7 и 35.
Г4) Низови: 15 и 50. Непрекидност: 27 и 66. Диференцијабилност: 8 и 40.
Г5) Низови: 12 и 29. Непрекидност: 28 и 62. Диференцијабилност: 3 и 42.
Г6) Низови: 23 и 46. Непрекидност: 50 и 60. Диференцијабилност: 9 и 53.