

Инжењерска геодезија 2 – Вежбе

Предметни асистент:

Доц. др Милутин Пејовић, дипл. геод. инж.

8 Април 2024.

1. Задатак

Одређује се растојање између два стуба индиректно мерењем две дужине и захваћеног угла.
Резултати мерења су следећи:

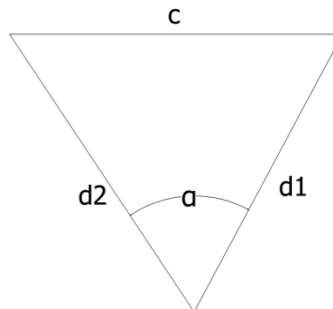
Угао α :

Први положај	60°00'15"	3"	21"	22"	8"	31"	31"	19"	23"	21"
Други положај	240°00'38"	47"	34"	01'01"	38"	41"	50"	40"	39"	01'15"

Оцена дужине $D_1 = 35.002 \text{ m}$ и $D_2 = 33.012 \text{ m}$ са стандардом мерења $\sigma_D = 3 \text{ mm}$.

У задатку се тражи следеће:

- На основу датих података оценити вредност угла α са оценом тачности.
- На основу оцењених вредности оценити растојање између два стуба са оценом тачности.
- Тестирати хипотезу: пројектовано растојање износи 34.05m.



Теоријске основе - Обрада и анализа резултата мерења

Геодетска мерења подложна су разним непредвиђеним утицајима који се различито рефлектују на резултате мерења: производе систематске грешке, корелацију мерења и слично. Од геодетског стручњака се очекује да те утицаје што боље проучи и да их узме у обзир приликом анализе геодетских мреже.

Анализа резултата мерења треба да покаже да у резултатима мерења нема ни грубих ни систематских грешака. Против појаве систематских грешака у резултатима мерења можемо се борити,

- методом рада,
- условима при мерењу
- условима тачности, и
- увођењем поправака.

Услови тачности подразумевају избор самог инструмента са којим ће се вршити мерења, дефинисање тачности са којом треба извршити мерења, дефинисање тачности са којом одређене осе треба доводити у правилан положај, са којом тачношћу треба прикупљати параметре атмосфере и слично. Условима при мерење, постављају се одређени услови који се морају испоштовати приликом мерења, као што су, положај ногара статива приликом мерења у нивелманском влаку, да се мерење изводи у периоду мирних и јасних ликова и слично. Као резултат анализе резултата мерења добијају се оцене мерених величина са оценом тачности.

Тестирање резултата мерења на присуство грубих грешака

Као што је већ речено, поједини резултати мерења могу бити оптерећени грубим грешкама и релативно их је лако открити јер „одскачу“ од осталих резултата мерења. Након што су завршена мерења на терену уз њихову непосредну анализу, праћење критеријума за праћење и контролу мерења, приступа се статистичкој анализи резултата мерења, тј. примени статистичких тестова за откривање грубих грешака у резултатима мерења.

Резултати мерења сматрају се случајним величинама које се поковавају закону нормалног распореда, $X_i \sim N(0,1)$. Суштина тестирања резултата на присуство грубих грешака је да се статистички утврди да ли неки резултат мерења садржи грубу грешку, тј. одступа од нормалног распореда.

Тестирање резултата мерења на присуство грубих грешака применом критеријума значајности
Тестирање резултата мерења на присуство грубих грешака применом критеријума значајности је итеративан поступак.

Први корак: За низ резултата мерења X_i , $i = 1, 2, 3, \dots, n$, једне величине X одреди се:

- средња вредност мерења,

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i \quad [?]$$

- варијанса мерења – рачуна се само ако није познато стандардно одступање мерења,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad [?]$$

- број степени слободе – број сувишних мерења,

$$f = n - 1 \quad [?]$$

Други корак: Нађе се резултат мерења X_k који највише одступа од средње вредности $\bar{X}$ ($\max |X_i - \bar{X}|$) и тај резултат прогласи се за сумњиву вредност. Након избацивања сумњивог резултата мерења X_k из скупа резултата мерења, одреди се:

- нова средња вредност резултата мерења,

$$\bar{X}_1 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} X_i \quad [?]$$

- нова варијанса мерења,

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n-2} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} (X_i - \bar{X}_1)^2 \quad [?]$$

- нови број степени слободе,

$$f_1 = n - 2 \quad [?]$$

- разлика између сумњивог резултата и средње вредности без тог резултата

$$\Delta n = |X_k - \bar{X}_1| \quad [?]$$

Дозвољено одступање резултата мерења од средње вредности без тог резултата одређује се на следећи начин:

- уколико је познато стандардно одступање мерења,

$$\Delta G = z_{\alpha/2} \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{n-1}{n}} \quad [?]$$

- уколико није познато стандардно одступање мерења

$$\Delta G = z_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_1 \cdot \sqrt{\frac{n}{n-1}} \quad [?]$$

Уколико је $\Delta n > \Delta G$, то значи да је резултат мерења X_k оптерећен грубом грешком и тај резултат се избацује из скупа резултата мерења, а укупан број мерења постаје $n = n - 1$ и поступак се понавља. Уколико сумњиви резултат мерења заправо није оптерећен грубом грешком усвајају се вредности броја мерења, средње вредности и варијансе мерења из претходне итерације.

Тестирање хомогености резултата мерења

Тестирање припадности резултата мерења серији мерења, истом скупу мерења, односно да ли су постојали повољни услови приликом мерења.

Ако се претпостави да су мерења реализована у двије независне серије мерења, са нормалном расподелом,

$$\begin{aligned} x_i | i=1, 2, \dots, n & \quad x_i \sim N(a_1, \sigma_1^2) \\ x_j | j=1, 2, \dots, m & \end{aligned}$$

Могу се израчунати средње вредности ове две серије мерења, као и њихове дисперзије,

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i)$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (x_j)$$

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_1)^2$$

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (x_j - \bar{x}_2)^2$$

Тестирање хомогености резултата може се извести применом Ф-теста, тестирање две дисперзије и помоћу Бартлетовог теста, тестирање две или више дисперзија.

Ф-тест

$$H_0 : M(\hat{\sigma}_1^2) = M(\hat{\sigma}_2^2)$$

$$H_a : M(\hat{\sigma}_1^2) \neq M(\hat{\sigma}_2^2)$$

$$T = \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2} \sim F_{1-\frac{\alpha}{2}}(f_1, f_2), \quad \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

$$T = \frac{\hat{\sigma}_2^2}{\hat{\sigma}_1^2} \sim F_{1-\frac{\alpha}{2}}(f_2, f_1), \quad \sigma_2^2 > \sigma_1^2$$

Уколико је потребно извршити тестирање више диспредија примењује се следећи поступак,

$$\sigma^2 = \frac{f_1 \cdot \sigma_1^2 + f_2 \cdot \sigma_2^2 + \dots + f_k \cdot \sigma_k^2}{f_1 + f_2 + \dots + f_k}$$

$$\sigma_i^2 = \frac{SSD - f_i \cdot \sigma_i^2}{f_i}$$

$$SSD = \sum f_i \cdot \sigma_i^2$$

Упутство за рад

Оцена угла са оценом тачности:		
1.	$2C = (II \pm 180) - I$	Оцена двоструке колимационе грешке
2.	$\alpha_i = I_i + \frac{2C_i}{2}$	Оцена појединачне вредности редукованог правца (угла)
3.	n	Број мерења
4.	$\bar{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i$	Оцена средње вредности мереног угла
5.	$\sigma_{\alpha} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \bar{\alpha})^2}$	Оцена средње квадратне грешке мереног угла
6.	$c = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2 \cos \bar{\alpha}}$	Оцена индиректно мерене дужине „с“
7.	$\sigma_c^2 = \left(\frac{\partial c}{\partial d_1}\right)^2 \cdot \sigma_d^2 + \left(\frac{\partial c}{\partial d_2}\right)^2 \cdot \sigma_d^2 + \left(\frac{\partial c}{\partial \alpha}\right)^2 \cdot \sigma_{\alpha}^2$	Варијанса (дисперзија) дужине „с“
	$\frac{\partial c}{\partial d_1} =$	Извод по дужини d_1
	$\frac{\partial c}{\partial d_2} =$	Извод по дужини d_2
	$\frac{\partial c}{\partial \alpha} =$	Извод по углу α
Статистичко тестирање сагласности пројектоване и оцењене дужине:		
8.	$H_0 : M(\hat{c} - 34.05) = 0$ $H_a : M(\hat{c} - 34.05) \neq 0$	
9.	$T = \frac{\hat{c} - 34.05}{\sigma_c} \sim t_p(f)$ $p = 0.975$ $f = n - 1$	
Тест одлука:		
10.	$T < t_p(f) \rightarrow$	
	$T > t_p(f) \rightarrow$	

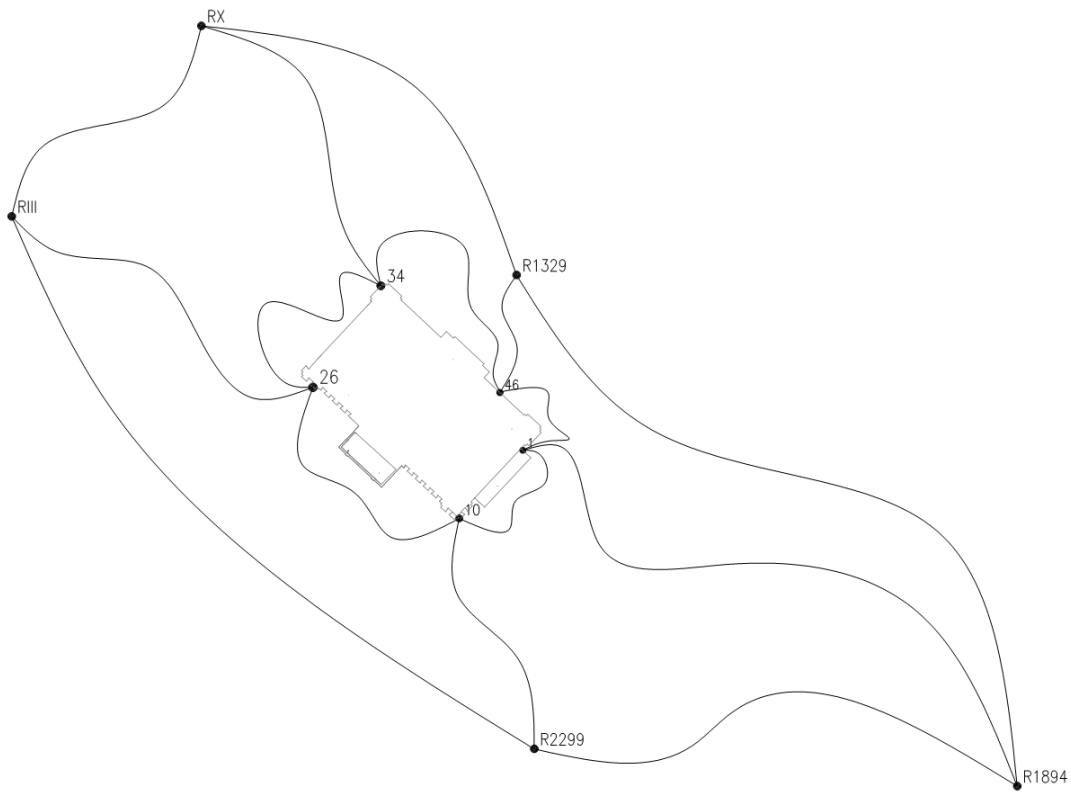
2. Задатак

За потребе праћења слегања објекта „НН“ потребно је оценити висине репера са оценом тачности и мерама квалитета мреже за случај:

- Датум мреже је дефинисан минималним трагом на свим тачкама,
- Датум мреже је дефинисан висином репера _____.

Стандард мерења висинске разлике на станици је $\sigma_{\Delta h} = 0.2mm$.

Скица мреже:



Теоријске основе - Математички модел геодетске мреже

Изравнање геодетских мрежа је заснована је на математичком моделу који представља математички опис претпоставки о мерењима и њиховој функционалној вези са непознатим параметрима (најчешће координатама тачака). Изравнање геодетских мрежа нам омогућава да добијемо статистички најбољу оцену непознатих параметара, као и оцену тачности непознатих параметара и мерених величина (или боље рећи оцену прецизности). Поред тога, изравнање мреже нам пружа и својеврсну контролу мерења у геодетској мрежи. Ако нам статистички тест адекватности модела потврди адекватност функционалног и стохастичког модела, ми можемо рећи и да мерења нису оптерећена грубим грешкама и да су нам претпоставке везане за функционални и стохастички модел адекватне. Математички модел који се најчешће користи приликом изравнања геодетских мрежа је **Гаусс-Марковљев модел**, који за оцене параметара модела користи **метод најмањих квадрата** (МНК). У наредном тексту ће бити детаљније представљен.

Функционална веза између мерених величина и непознатих параметара може се изразити као:

$$L_i = l_i(X, Y, Z, \dots, T) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

где су:

- L_i - величине које меримо у мрежи – **мерене величине**,
- l_i – резултати мерења – **опажања**,
- $X, Y, Z, \dots, T$ - непознати параметри (константе) којих има $u < n$.

Резултати мерења се могу представити као $l_i = L_i + \varepsilon_i$, где величина ε_i представља грешку мерења (**опажање = права вредност + грешка**), из чега следи $L_i = l_i - \varepsilon_i$. Величина " $-\varepsilon_i$ " назива се поправка мерења и означава се са " v ".

Слично томе, непознати параметри се могу представити као збир приближних вредности и диференцијалних прираштаја:

$$X = X_0 + x, Y = Y_0 + y, Z = Z_0 + z, \dots, T = T_0 + t,$$

где су:

- $X_0, Y_0, Z_0, \dots, T_0$ - приближне вредности;
- $x, y, z, \dots, t$ - диференцијални прираштаји непознатих параметара.

Како **Гаус-Марковљев** модел подразумева линеарност функција веза, тако функције које повезују мерења и непознате параметре (ако нису линеарне) се морају линеаризовати:

$$L_i = l_i(X, Y, Z, \dots, T) \Rightarrow L_i = l_{i0} + a_i x + b_i y + c_i z + \dots + g_i t$$

Како је $L_i = l_i - \varepsilon_i$, следи да је: $-\varepsilon_i = v_i = a_i x + b_i y + c_i z + \dots + g_i t + l_{i0} - l_i$.

Последње једначине називају се **једначине (везе) поправака** и у њима фигурирају:

- $l_{i0} - l_i = f_i$, ($i = 1, 2, \dots, n$) – слободни чланови;
- $l_{i0} = l_i(X_0, Y_0, Z_0, \dots, T_0)$, ($i = 1, 2, \dots, n$) – приближне вредности мерених величина " L_i " добијене из приближних вредности непознатих параметара;
- $a_i = \left(\frac{\partial L_i}{\partial x}\right)$, $b_i = \left(\frac{\partial L_i}{\partial y}\right)$, $c_i = \left(\frac{\partial L_i}{\partial z}\right)$, $\dots$, $g_i = \left(\frac{\partial L_i}{\partial t}\right)$ – познати коефицијенти.

Једначине (везе) поправака у матричном облику могу се написати као:

$$v = Ax + f$$

где је:

- $v_{n \times 1} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ – вектор поправака;
- $A_{n \times u} = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & t_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & \dots & t_n \end{bmatrix}$ – матрица коефицијената (Матрица дизајна);
- $x_{u \times 1} = \begin{bmatrix} x \\ \vdots \\ t \end{bmatrix}$ – вектор диференцијалних прираштаја непознатих параметара;
- $f_{n \times 1} = l_0 - l = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$ – вектор слободних чланова.

Изнете функционалне везе дефинишу први део **Гаус-Марковљевог** модела који се зове **функционални модел**.

Геодетска мерења подложна су разним непредвиђеним утицајима који се различито рефлектују на резултате мерења: производе систематске грешке, корелацију мерења и слично. Од геодетског стручњака се очекује да те утицаје што боље проучи и да их узме у обзир приликом анализе геодетских мрежа. Неке претпоставке које се односе на природу мерења (резултате мерења) су неопходне, како би математички модел што боље репрезентовао стварно стање система какав је геодетска мрежа.

Основна претпоставка о мерењима, под којом важи метод најмањих квадрата, јесте да математичко очекивање грешке мерења буде нула:

$$M(\varepsilon) = M(v) = 0, \quad \varepsilon \sim N(0, K_l)$$

Односно да грешке мерења следе нормалну расподелу, са математичким очекивањем нула и ковариационом матрицом мерења " K_l ". Ковариациона матрица K_l описује степен варијације и коваријације мерења (опажања) и према томе дефинише други део **Гаус-Марковљевог** модела који се зове **Стохастички модел**. Општи модел ковариационе матрица подразумева постојање и познавање степена коваријације између мерења која су различите

прецизности: $K_l = \sigma_0^2 Q_l$, где Q_l представља кофакторску матрицу мерења. Међутим, у пракси се најчешће користи случај када се претпоставља да су мерења некорелисана, па је матрица Q_l представљена са матрицом P^{-1} . Матрица " P " је дијагонална матрица тежина и носи информације о степену поверења у одређено мерење у поступку оптимизације. Формира се тако што се сваком мерењу додели "тежина", као однос квадрата апприори дисперзионог фактора и квадрата стандарда појединог мерења: $P = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$. Такође присутан модел је модел који претпоставља да су мерења некорелисана и једнаке прецизности. У том случају је $Q_l = E$.

Тако се **Гаус-Марковљев** модел може сажето написати:

- $v = Ax + f \Leftrightarrow M(f) = -Ax; r(A) = r \leq u$ – **функционални модел**
- $M(v) = 0, M(vv^T) = K_l = \sigma_0^2 Q_l, (Q_l = P^{-1})$ – **стохастички модел**

При чему су:

- σ_0^2 – Апприорни дисперзиони фактор,
- $K_{l\ n \times n}$ – Ковариациона матрица мерења,
- $Q_{l\ n \times n}$ – Кофакторска матрица мерења.

Проблем датума геодетске мреже

Када је дефинисан функционални модел (матрица A), односно стохастички модел (матрица P), оцена непознатих параметара (прираштаја координата непознатих тачака) према методи најмањих квадрата је једнака $\hat{x} = -N^{-1} \times n = -Q_x \times n$, где је $N = Q_x = A^T P A$, а $n = A^T P f$. Међутим, геодетске мреже у инжењерским радовима се често анализирају као „слободне“. У том случају непознати параметри су координате свих тачака у мрежи и тада се јавља **проблем датума геодетске мреже**. Проблем датума геодетске мреже проузрокован је појавом линеарно зависних колона у матрици A . Тада је $r(A) = r < u$, где је u - број непознатих параметера. Величина $r(A) = r$ представља **ранг функционалног модела**, (односно ранг матрице A).

Величина $d = u - r$ се зове **дефект функционалног модела (мреже)**. Дефект функционалног модела једнак је минималном броју параметара неопходних за отклањање проблема датума геодетске мреже, односно за дефинисање датума геодетске мреже. Ти параметри називају се **датумски параметри** и њима се, у ствари, дефинише положај геодетске мреже у координатном систему.

Проблем датума геодетске мреже проузрокује **сингуларитет** матрице нормалних једначина " N ", а тиме и немогућност њене инверзије, па самим тим и немогућност оцене непознатих параметара. Према томе, начин на који ће се „избећи“ проблем датума, односно на који ће се дефинисати датум директно утиче на оцену непознатих параметара (прираштаја координата). У геодетској пракси, постоје два начина решавања датумског проблема:

- „Фиксирање” параметара (класично дефинисан датум);
- Увођењем датумских услова који омогућавају решење са минималним трагом матрице $Q_{\hat{x}}$ (минимални траг матрице $Q_{\hat{x}}$).

Фиксирање параметара подразумева искључивање одређеног броја параметара из модела, што интуитивно значи фиксирање мреже за одређене тачке мреже, тако што се за датумске параметре усвоје координате тих тачака. Класично дефинисање датума изводи се тако што се из матрице A искључе оне колоне које се односе на координате тачака које ће дефинисати датум мреже. Дефинисањем датумских параметара отклања се дефект мреже, односно, матрица A постаје матрица са потпуним рангом колоне $r(A) = r = u \Rightarrow d = 0$. Након отклањања проблема датума, може се приступити оцени непознатих параметара за класично дефинисан датум:

$$\hat{x} = -N^{-1} \times n = -Q_{\hat{x}} \times n, \text{ где је } N = A^T P A, n = A^T P f.$$

Дефинисање датума минималним трагом матрице $Q_{\hat{x}}$ постиже се увођењем одређених датумских услова. Интуитивно, то представља везивање мреже за координатни систем преко геометријског тежишта мреже.

Траг квадратне матрице $Q_{\hat{x}}$ једнак је збиру елемената на главној дијагонали и означава се са $tr(Q_{\hat{x}})$. Збир елемената на главној дијагонали кофакторске матрице може послужити и као мера тачности мреже.

Дефинисање датума минималним трагом матрице $Q_{\hat{x}}$ остварује се увођењем матрице датумских услова B . Димензије матрице датумских услова B су $d \times u$ где је d - дефект мреже (у случају 2Д мреже је $d = 3$, у случају 1Д мреже $d = 1$), а u - број непознатих параметара. Минимализација трага матрице $Q_{\hat{x}}$ може се изводити и на делу тачака, самим тим и на делу матрице $Q_{\hat{x}}$.

Дефинисање датума минималним трагом матрице $Q_{\hat{x}}$ има за ефекат равномерну распоређеност грешака у мрежи око њеног тежишта, што се манифестује кроз приближну једнакост мера прецизности. Тако дефинисан датум повишава степен хомогености тачности у мрежи.

2Д мрежа

Матрица датумских услова за 2Д мрежу која испуњава услов минимизације трага матрице Q_x може имати различиту форму, а једна од њих је следећа:

$$\mathbf{B}_{[d \times u]}^T = \begin{bmatrix} dy_1 & dx_1 & dy_2 & dx_2 & \dots & dy_m & dx_m & dz_1 & \dots & dx_k \\ \frac{1}{\sqrt{m}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{m}} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\sqrt{m}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{m}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{m}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{m}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\xi_1}{g} & \frac{\eta_1}{g} & -\frac{\xi_2}{g} & \frac{\eta_2}{g} & \dots & -\frac{\xi_n}{g} & \frac{\eta_n}{g} & \frac{\rho''}{g} & \dots & \frac{\rho''}{g} \end{bmatrix}$$

где је,

m - број тачака у мрежи,

k - број тачака у мрежи са којих су опажани правци,

$$\xi_i = X_i^0 - \bar{X}^0, \quad \eta_i = Y_i^0 - \bar{Y}^0,$$

$$g = \sqrt{\sum_{i=1}^n (Y_i^0 - \bar{Y}^0)^2 + \sum_{i=1}^n (X_i^0 - \bar{X}^0)^2 + k \cdot \rho''^2},$$

$$\bar{Y}^0 = \frac{1}{n} \cdot \sum_i Y_i^0, \quad \bar{X}^0 = \frac{1}{n} \cdot \sum_i X_i^0$$

Напомена: Веома је важно ускладити јединице матрице B са јединицама које су усвојене приликом креирања функционалног модела. Према томе, ако је усвојено да прираштају буду оцењени у милиметрима, вредности у матрици B морају такође бити рачунате на основу координата изражених у милиметрима.

1Д мрежа

Матрица датумских услова за 1Д мрежу која испуњава услов минимизације трага матрице Q_x може имати различиту форму, а једна од њих је следећа:

$$\mathbf{B}_{[d \times u]}^T = \begin{bmatrix} \frac{dH_1}{\sqrt{m}} & \frac{dH_2}{\sqrt{m}} & \frac{dH_3}{\sqrt{m}} & \frac{dH_4}{\sqrt{m}} & \dots & \frac{dH_n}{\sqrt{m}} \\ \frac{1}{\sqrt{m}} & \frac{1}{\sqrt{m}} & \frac{1}{\sqrt{m}} & \frac{1}{\sqrt{m}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{m}} \end{bmatrix}$$

Где је m - број тачака (репера) у мрежи који учествују у дефинисању датума.

Након што је формирана матрица B , инверзију матрице N можемо добити на следећи начин:

$$Q_{\tilde{x}} = N_{u \times u}^+ = (N + B \times B^T)^{-1} - B \times B^T$$

Напомена: Инверзија матрице N која се добија на овај начин зове се **псеудоинверзија**, и означавамо је са N^+ . Да би се направила разлика у односу на резултате добијене са класично дефинисаним датумом, оцене при датуму дефинисаним минималним трагом означавамо са „ $\sim$ “.

Након отклањања проблема датума, може се приступити оцени непознатих параметара за датум дефинисан минималним трагом:

$$\tilde{x} = -N^+ \times n = -Q_{\tilde{x}} \times n, \text{ где је } N = A^T P A, n = A^T P f$$

Оцена поправака мерења

Према функционалном моделу, поправке мерења једнаке су:

- У случају класично дефинисаног датума:

$$\hat{v} = A\hat{x} + f$$

- У случају датума дефинисаног минималним трагом:

$$\tilde{v} = A\tilde{x} + f$$

Оцена дисперзионог фактора

- У случају класично дефинисаног датума:

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{\hat{v}^T \cdot P \cdot \hat{v}}{n - u}}$$

- У случају датума дефинисаног минималним трагом:

$$\tilde{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{\tilde{\mathbf{v}}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \tilde{\mathbf{v}}}{n-u+d}}$$

Напомена: Поправке мерења, а тиме и оцењени дисперзиони фактор су инваријантне величина, што значи да су непроменљиве у односу на промену датума.

Глобални тест или тест адекватности модела (Гаус-Марковљевог модела)

Глобалним тестом адекватности модела контролишу се и функционални и стохастички део модела. Такође проверава се да ли постоје неоткривене грубе грешке.

Тест гласи:

$$H_0 : M(\hat{\sigma}_0^2) = \sigma_0^2$$

$$H_a : M(\hat{\sigma}_0^2) \neq \sigma_0^2$$

примењује се F тест

$$\text{у случају да је } \hat{\sigma}_0 > \sigma_0 : \quad F = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \sim F_{1-\alpha}(n-u+d, \infty)$$

$$\text{у случају да је } \hat{\sigma}_0 < \sigma_0 : \quad F = \frac{\sigma_0^2}{\hat{\sigma}_0^2} \sim F_{1-\alpha}(\infty, n-u+d)$$

Уколико глобални тест „не прође“ (уколико усвојимо алтернативну хипотезу), узрок можемо тражити управо у неадекватности функционалног и стохастичког модела, односно у постојању грубих грешака. Грубе грешке у мерењима обично проузрокују велику разлику између $\hat{\sigma}_0$ и σ_0 . Исти је случај када приближне координате нису довољно добре (што није случај у овом задатку). Уколико разлика није велика, решење можемо потражити у стохастичком моделу. На пример, уколико је $\hat{\sigma}_0$ веће од σ_0 и тест покаже да модел није адекватан, то нам указује да су нам мерења изведена са слабијом прецизности од оне коју смо усвојили приликом креирања матрице P. Аналогно, уколико је $\hat{\sigma}_0$ мање од σ_0 , то нам указује да су мерења изведена са бољом прецизности од оне коју смо усвојили приликом креирања матрице P.

Појединачни тест на грубе грешке

Уколико тест адекватности модела покаже несагласност две варијансе $\hat{\sigma}_0$ и σ_0 (тј. уколико не прође), анализом поправака мерења, може се претпоставити да у мерењима постоји груба грешка. Један од општеприхваћених тестова за лоцирање резултата мерења који је оптерећен грубом грешком, је **Baarda-in Data-snooping** тест. То је појединачни итеративни тест. Он полази од претпоставке да у мерењима постоји само једно опажање оптерећено грубом грешком. Појединачни се каже, јер се мерења појединачно анализирају, тако што се формира тест статистика за свако мерење. А итеративни, јер се полази од претпоставке да је само једно мерење оптерећено грубом грешком. Ако тест статистика покаже да има више мерења оптерећених грубом грешком, одбацује се само једно (оно које највише одступа) и понавља се поступак изравнања.

Напомена: Пре тестирања појединачних мерења на присуство грубих грешака, препорука је да се за појединачни тест усвоји модификован ниво значајности α_0 , који се рачуна према формули $\alpha_0 = 1 - (1 - \alpha)^{1/n}$, где је α усвојени ниво значајности, а n - број мерења.

Хипотезе **Data-snooping** теста гласе:

H_{0i} : Опажање I_i садржи грубу грешку

H_{ai} : Опажање I_i не садржи грубу грешку

Тест статистика гласи:

$$t_i = \frac{|\hat{v}_i|}{\sigma_0 \cdot \sqrt{Q_{\hat{v}_{ii}}}} \sim t_{1-\frac{\alpha_0}{2}} \mid H_0$$

Тест одлука гласи:

$\max |t_i| < t_{1-\alpha/2} \rightarrow$ прихвата се H_0 хипотеза

$\max |t_i| > t_{1-\alpha/2} \rightarrow$ прихвата се H_a хипотеза

Мере квалитета мреже

Мере прецизности

Прецизност геодезских мрежа представља статистички квалитет оцена величина (функција или непознатих параметара). Мере прецизности нам, пре свега, дају информацију о присуству и утицају случајних грешака.

Мере прецизности које се најчешће усвајају као пројектни параметри, узимају се:

- Стандардне девијације положаја тачака.
- Елипсе грешака положаја тачака и
- Оцене варијанси оценљивих функција;

Основни извор информација о мерама прецизности геодезских мрежа је ковариациона матрица непознатих параметара. Уколико за рачунање коваријационе матрице непознатих параметара користимо оцењену вредност дисперзионог фактора (стандардне девијације јединице тежине) тада говоримо о емпиријској оцени коваријационе матрице:

$$K_{\hat{x}} = \hat{\sigma}_o^2 \cdot Q_{\hat{x}} = \hat{\sigma}_o^2 \cdot (A^T P A)^{-1}$$

На дијагонали ковариационе матрице налазе се стандардне девијације непознатих параметара:

$$\hat{\sigma}_{x_i} = \hat{\sigma}_o \cdot \sqrt{Q_{x_i x_i}}$$

где је σ_o априори стандардна девијација, а $Q_{x_i x_i}$ су елементи на главној дијагонали симетричне матрице кофактора непознатих параметара

$$Q_{\hat{x}} = \begin{pmatrix} Q_{x_1 x_1} & Q_{x_1 x_2} & \cdots & Q_{x_1 x_u} \\ Q_{x_2 x_1} & Q_{x_2 x_2} & \cdots & Q_{x_2 x_u} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{x_u x_1} & Q_{x_u x_2} & \cdots & Q_{x_u x_u} \end{pmatrix}$$

Након израчунатог стандардног одступања по координатним осама може се израчунати и стандардно одступање тачке по положају:

$$\hat{\sigma}_p = \sqrt{\hat{\sigma}_{x_i}^2 + \hat{\sigma}_{y_i}^2}$$

Елипсе поверења (грешака) положаја тачака представља стандардну меру прецизности тачака 2Д мреже. Она представља просторни обухват користи се у 2Д мрежама и пружа информацију о евентуално slabим зонама усвојене геометрије мреже. Често се у пракси рачунају нпр. 95% елипсе грешака. Оне представљају просторни обухват оцена непознатих параметара у случају када би се 100 пута поновио експеримент (мерења и оцена параметара) под истим условима, 95% параметара би се нашло унутар 95%-не елипсе грешака. Једнакост

(неједнакост) полуоса елипси грешака пружа информацију о изотропности мреже, док једнакост (неједнакост) елипси грешака између тачака пружа информацију о хомогености мреже. Елементи елипсе грешака положаја тачака су велика полуоса (A), мала полуоса (B) и оријентациони угао (θ). Уколико за рачунање елемената елипси грешака користимо оцењену вредност дисперзионог фактора (стандардне девијације јединице тежине) тада говоримо о емпиријским (експерименталним) вредностима елемената елипси грешака:

$$A = \hat{\sigma}_o \cdot \sqrt{\lambda_1} = \hat{\sigma}_o \cdot \sqrt{\lambda_A} = \hat{\sigma}_o \cdot \sqrt{\frac{1}{2}(Q_{xx} + Q_{yy} + k)}$$

$$B = \hat{\sigma}_o \cdot \sqrt{\lambda_2} = \hat{\sigma}_o \cdot \sqrt{\lambda_B} = \hat{\sigma}_o \cdot \sqrt{\frac{1}{2}(Q_{xx} + Q_{yy} - k)}$$

$$\theta = \frac{1}{2} \arctg \frac{2Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}}$$

Gде су:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(Q_{xx} + Q_{yy} + k)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(Q_{xx} + Q_{yy} - k)$$

$$k = \sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{xy}^2}$$

У пракси се често рачунају 95%-не елипсе грешака.

$$A = \hat{\sigma}_o \cdot \sqrt{2 \cdot \lambda_A \cdot F_{2,f,1-\alpha}} = A \cdot \sqrt{2 \cdot F_{2,f,1-\alpha}}$$

$$B = \hat{\sigma}_o \cdot \sqrt{2 \cdot \lambda_B \cdot F_{2,f,1-\alpha}} = B \cdot \sqrt{2 \cdot F_{2,f,1-\alpha}}$$

$$\theta = \frac{1}{2} \arctg \frac{2Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}}$$

Где је $f = n - u$ или $(f = n - u + d)$ број степени слободе. Уколико се приликом рачунања користи априори дисперзиони фактор (σ_0), тада је $f = \infty$.

Оцене варијансе оценљивих функција. Да би нека функција (дужина, угао, висинска разлика итд.) непознатих параметара (најчешће координата) била оценљива, мора да задовољи услов: $h^T = h^T N^{-1} N$, где је h^T транспонована линеаризована параметарска функција. За оцену дисперзије функције имамо:

$$\hat{\sigma}_f^2 = \hat{\sigma}_0^2 \cdot h^T Q_{xx} h$$

Мере поузданости

Поузданост геодетских мрежа представља квалитет предложеног решења мреже с'обзиром на могућност откривања грубих грешака у мерењима (унутрашња поузданост) и с'обзиром на утицај неоткривених грубих грешака на оцене тражених величина (спољашња поузданост). Код мера поузданости разликујемо локалне и глобалне мере поузданости. Глобалне мере поузданости односе се на могућност утврђивања постојања грубих грешака без могућности њиховог лоцирања, док су мере локалне поузданости везане за вероватноћу откривања резултата који одскачу. Мере локалне **поузданости** које се најчешће користе су:

- локална мера унутрашње поузданости: фактор „ r_{ii} ”,
- маргинална груба грешка која се дата-сноопинг тестом може открити $|G_i|$.

Локална мера унутрашње поузданости: $r_{ii} = Q_{vii} \cdot P_i$, где је $Q_v = P^{-1} - A Q_x A^T$ – кофакторска матрица поправака. Фактор r_{ii} представља утицај грубе грешке и-тог опажања на и-ту поправку. Из тога следи да је вероватноћа откривања грубе грешке у и-том опажању већа уколико је фактор r_{ii} већи. Фактор r_{ii} узима вредности између 0 и 1, а мерења код којих је $r_{ii} > 0.3$ сматрају се непоузданим. Анализа фактора r_{ii} у фази пројектовања мреже омогућава издвајање слабих места у мрежи на које треба обратити пажњу.

Маргинална груба грешка која се дата-сноопинг тестом може открити: $|G_i| = \frac{\sigma_0 \cdot \sqrt{\lambda_0}}{P_i \sqrt{Q_{vii}}}$,

где су:

- $\sqrt{\lambda_0} = t_{1-\beta_0} + t_{1-\alpha/2}$ - параметар нецентралности χ_p^2 - расподеле за вероватноћу p ,
- $t_{1-\beta_0}$ - квантил Нормалног распореда за усвојену моћ теста,
- $t_{1-\alpha/2}$ - квантил Нормалног распореда за усвојени ниво значајности.

Маргинална грешка представља вредност грубе грешке која се може открити појединачним тестом, под предпоставком постојања само једне грубе грешке

Оцена мерених величина са оценом прецизности

Оцена мерених величина своди се на оценом поправака ($\hat{v} = A\hat{x} + f$) и оценом изравнатих вредности мерења ($\hat{l}_i = l_i + v_i$). Основна оцена прецизности мерених величина је оцена дисперзионог фактора $\hat{\sigma}_0$. Међутим, у изравнању 2Д мрежа, када фигурирају разнородне мерене величине, као што су правци и дужине, интерпретација дисперзионог фактора није лака. Другим речима, дисперзиони фактор не осликава најјасније остварену прецизност мерених величина. Према томе, од мера прецизности које карактеришу мерене величине могуће је дати следеће:

- Ковариациона матрица поправака $K_v = \hat{\sigma}_0^2 \cdot Q_v$, где је $Q_v = P^{-1} - A Q_x A^T$ кофакторска матрица поправака мерења;
- Ковариациона матрица оцењених мерења $K_l = \hat{\sigma}_0^2 \cdot Q_l$, где је $Q_l = A Q_x A^T$ - кофакторска матрица оцењених мерења;

Креирање извештаја о изравнању геодеетске мреже

Када глобални тест адекватности модела покаже да нам је модел адекватан (односно када усвојимо нулту хипотезу) можемо констатовати да имамо **дефинитивне** оцене непознатих параметара, а тиме и оцену поправака и дисперзионог фактора. Све док тест статистика теста адекватности модела то не покаже не можемо усвојити резултате као дефинитивне. Након тога, потребно је формирати **Извештај о изравнању мреже**. Генерално извештај о изравнању мреже садржи следеће информације:

За 2Д мрежу, извештај треба да има следећу форму:

1. Заглавље са следећим информацијама: 1) број мерења; 2) број непознатих параметара; 3) број тачака; 4) начин дефинисања датума; 5) оцена дисперзионог фактора; 6) Apriori дисперзиони фактор; 7) глобални тест адекватности са закључком.
2. Табела 1: Оцена непознатих параметара са оценом тачности

Тачка	dy	dx	$\hat{Y}$	$\hat{X}$	$\hat{\sigma}_y$	$\hat{\sigma}_x$	$\hat{\sigma}_p$	$A_{95\%}$	$B_{95\%}$	θ
M1										
M2										
M9										
M10										

Где су:

- $d\hat{x}, d\hat{y}$ - прираштаји координата (елементи вектора непознатих параметара $\hat{x}$)
- $\hat{Y}, \hat{X}$ - оцењене координате тачака ($\hat{Y} = Y^0 + d\hat{y}, \hat{X} = X^0 + d\hat{x}$)
- $\hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_p$ - оцене стандардне девијације по координатама и по положају
- $A_{95\%}, B_{95\%}, \theta$ - елементи елипси грешака

3. Табела 2: Оцена мерених величина са оценом тачности

Од	До	$\hat{v}$	$\hat{l}$	K_i	r_{ii}	G_i	$u-v$
M1	M2						
M1	M9						
M1	M10						
...	...						

Где су:

- $\hat{v}$ - поправке мерења,
- $\hat{l}$ - оцењене вредности мерених величина ($\hat{l}_i = l_i + v_i$),
- K_i - дијагонални елементи коваријационе матрице мерених величина,
- r_{ii} - локална мера унутрашње поузданости,
- G_i - маргинална груба грешка
- $u-v$ - контрола изравнања

За 1Д мрежу, извештај треба да има следећу форму:

1. Заглавље са следећим информацијама: 1) број мерења; 2) број непознатих параметара; 3) број тачака; 4) начин дефинисања датума; 5) оцена дисперзионог фактора; 6) Apriori дисперзиони фактор; 7) глобални тест адекватности са закључком.
2. Табела 1: Оцена непознатих параметара са оценом тачности

Тачка	dH	$\hat{H}$	$\hat{\sigma}_H$
R1			
R2			
...			
Rn			

Где су:

- $d\hat{H}$ - прираштаји координата (елементи вектора непознатих параметара $\hat{x}$)
- $\hat{H}$ - оцењене координате тачака ($\hat{H} = H^0 + d\hat{H}$)
- $\hat{\sigma}_H$ - оцене стандардне девијације висине тачке (репера): $\hat{\sigma}_H = \sigma_0 \cdot \sqrt{Q_{xii}}$

3. Табела 2: Оцена мерених величина са оценом тачности

Од	До	$\hat{v}$	$\Delta\hat{h}$	$\hat{\sigma}_{\Delta h}$	r_{ii}	$u-v$
R1	R2					
R2	R3					
R3	R4					
...	...					

Где су:

- $\hat{v}$ - поправке мерења,
- $\Delta\hat{h}$ - оцењене вредности мерених величина ($\Delta\hat{h}_i = \Delta h_i + v_i$),
- $\hat{\sigma}_{\Delta h}$ - оцена стандардне девијације мерења $\hat{\sigma}_{\Delta h} = \sigma_0 \sqrt{Q_{l ii}}$, где је $Q_i = A Q_x A^T$,
- r_{ii} - локална мера унутрашње поузданости, $r_{ii} = Q_{v ii} \cdot P_i$, где је $Q_v = P^{-1} - A Q_x A^T$,
- $u-v$ - контрола изравнања

Вежба 2.1 - Формирање матрице дизајна функционалног модела

Функције веза

Пре изравнања потребно је формирати функције везе између мерених величина:

За опажане висинске разлике :

Изравната вредност висинске разлике $\Delta \hat{h}_{ij}$ добија се, када се на резултат мерења Δh_{ij} дода поправка v_{ij}

$$\Delta \hat{h}_{ij} = \Delta h_{ij} + v_{ij}$$

Функционална веза између мерене висинске разлике и непознатих висина тачака изражава се линеарном функцијом облика

$$\Delta h_{ij} + v_{ij} = \hat{H}_j - \hat{H}_i = F(\hat{H}_i, \hat{H}_j)$$

Како је функција везе линеарна, из претходног израза директно произилази општи облик једначине поправке за мерене висинске разлике

$$v_{ij} = \hat{H}_j - \hat{H}_i - \Delta h_{ij}$$

Ако се из практичних разлога уведу привремене вредности

$$\hat{H}_i = H_i^o + dH_i$$

$$\hat{H}_j = H_j^o + dH_j$$

онда општи облик једначине поправке за мерене висинске разлике постаје

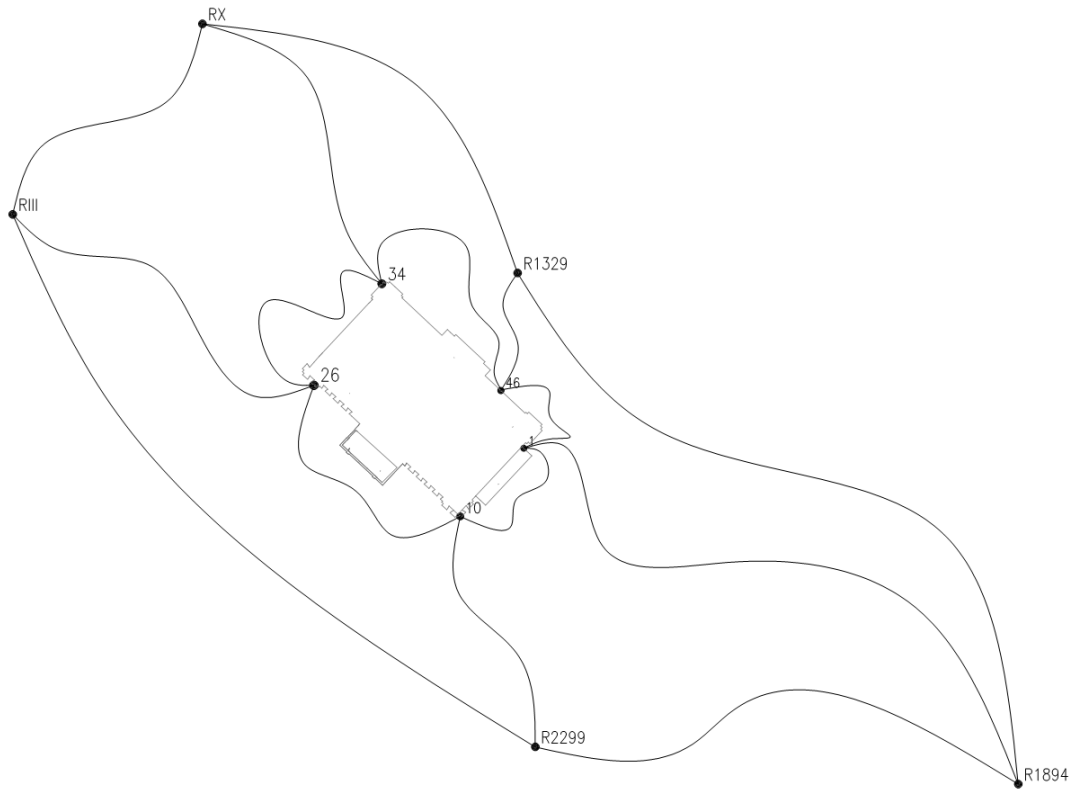
$$v_{ij} = dH_j - dH_i + f_{ij}$$

где је f_{ij} слободни члан

$$f_{ij} = (H_j^o - H_i^o) - \Delta h_{ij} = P - M$$

На основу једначине поправака и правца нивелања (од i – до j) може се дефинисати правило: испред непознате H_i знак је – "минус", а испред непознате H_j знак је + "плус". На основу овог правила непосредно са скице нивелманске мреже могу се написати (образовати) једначине поправака.

Формирање матрице дизајна



Једначине поправака за мерене висинске разлике у нивелманској мрежи су:

$$v_{\Delta h_1} = -dH_{R1894} + dH_{R2299} + f_{\Delta h_1}$$

$$v_{\Delta h_2} = dH_{R2299} - dH_{R10} + f_{\Delta h_2}$$

...

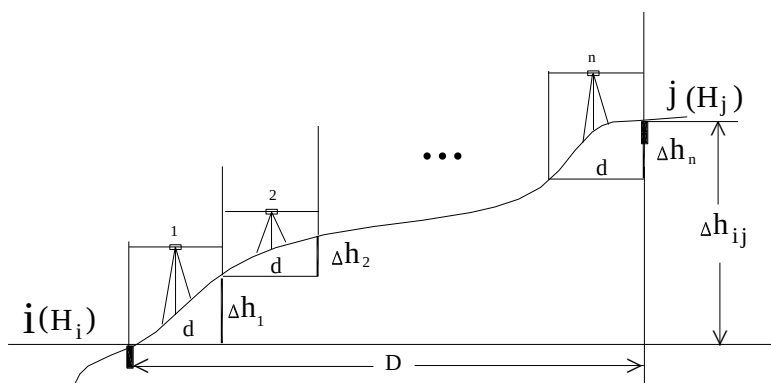
$$v_{\Delta h_n} = -dH_{R111} + dH_{RX} + f_{\Delta h_n}$$

или у матричном облику

$$\begin{pmatrix} v_{\Delta h_1} \\ v_{\Delta h_2} \\ \vdots \\ v_{\Delta h_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ \ddots & & & \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dH_{R1894} \\ dH_{R2299} \\ \vdots \\ dH_{46} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{\Delta h_1} \\ f_{\Delta h_2} \\ \vdots \\ f_{\Delta h_n} \end{pmatrix}$$

Вежба 2.2 - Формирање матрице тежина

Као што је већ речено у уводним теоријским поглављима, стохастички модел описује степен варијације и коваријације мерења. Међутим, услед недостатка информација о корелисаности мерења, најчешће коришћен стохастички модел описан је дијагоналном ковариационом матрицом, која ван главне дијагонале има нуле $K_l = \sigma_0^2 Q_l = \sigma_0^2 P^{-1}$. Матрица тежина P у поступку оптимизације (одређивања параметера/координата применом МНК) има задатак да одреди ниво поверења у одређено мерење, или другим речима, ниво значајности сваког мерења. Уколико једно мерење има већу тежину, у поступку оптимизације параметри ће бити „форсирани“ да се више прилагоде том мерењу (да поправка тог мерења буде мања).



У геометријском нивелману висинска разлика Δh_{ij} између две тачке на физичкој површи Земље одређује се као збир појединих висинских разлика одређених на станицама

$$\Delta h_{ij} = \Delta h_1 + \Delta h_2 + \dots + \Delta h_n$$

где је d дужина између везних тачака на станици а D укупна дужина нивелања између две тачке.

Из претходног израза следи варијанса висинске разлике Δh_{ij} $\sigma_{\Delta h_{ij}}^2 = \sigma_{\Delta h_1}^2 + \sigma_{\Delta h_2}^2 + \dots + \sigma_{\Delta h_n}^2$

Ако претпоставимо да су све висинске разлике мерене истом прецизношћу

$$\sigma_{\Delta h_1} = \sigma_{\Delta h_2} = \sigma_{\Delta h_3} = \dots = \sigma_{\Delta h_n} = \sigma_{\Delta h}$$

следи

$$\sigma_{\Delta h_{ij}}^2 = n \cdot \sigma_{\Delta h}^2$$

Односно стандардна девијација

$$\sigma_{\Delta h_{ij}} = \sigma_{\Delta h} \cdot \sqrt{n}$$

koja karakteriše tačnost мерења visinske razlike Δh_{ij} .

Ako je poznata tačnost merenja visinske razlike $\sigma_{\Delta h}$ onda u stohastičkim modelima izravnjanja nivelmanskih mreža prema težine se određuju

$$p_{\Delta h_{ij}} = \frac{\sigma_o^2}{\sigma_{\Delta h_{ij}}^2} = \frac{\sigma_o^2}{n \cdot \sigma_{\Delta h}^2} = \frac{\sigma_o^2 \equiv \sigma_{\Delta h}^2}{n \cdot \sigma_{\Delta h}^2} \rightarrow \frac{\sigma_{\Delta h}^2}{n \cdot \sigma_{\Delta h}^2} = \frac{1}{n}$$

Вежба 2.3 – Дефинисање датума и изравнање 1Д мреже

Када је дефинисан функционални модел (матрица A), односно стохастички модел (матрица P), оцена непознатих параметара (прираштаја координата непознатих тачака) према методи најмањих квадрата је једнака $\hat{x} = -N^{-1} \times n = -Q_x \times n$, где је $N = Q_x = A^T P A$, а $n = A^T P f$. Међутим, геодетске мреже у инжењерским радовима се често анализирају као „слободне“. У том случају непознати параметри су координате свих тачака у мрежи и тада се јавља **проблем датума геодетске мреже**. Проблем датума геодетске мреже проузрокован је појавом линеарно зависних колона у матрици A . Тада је $r(A) = r < u$, где је u - број непознатих параметера. Величина $r(A) = r$ представља **ранг функционалног модела**, (односно ранг матрице A).

Величина $d = u - r$ се зове **дефект функционалног модела (мреже)**. Дефект функционалног модела једнак је минималном броју параметара неопходних за отклањање проблема **датума геодетске мреже, односно за дефинисање датума геодетске мреже**. Ти параметри називају се **датумски параметри** и њима се, у ствари, дефинише положај геодетске мреже у координатном систему.

Проблем датума геодетске мреже проузрокује сингуларитет матрице нормалних једначина „ N “, а тиме и немогућност њене инверзије, па самим тим и немогућност оцене непознатих параметара. Према томе, начин на који ће се „избећи“ проблем датума, односно на који ће се дефинисати датум директно утиче на оцену непознатих параметара (прираштаја координата). У геодетској пракси, постоје два начина решавања датумског проблема:

- „Фиксирање“ параметара (класично дефинисан датум);
- Увођењем датумских услова који омогућавају решење са минималним трагом матрице Q_x (минимални траг матрице Q_x).

Фиксирање параметара подразумева искључивање одређеног броја параметара из модела, што интуитивно значи фиксирање мреже за одређене тачке мреже, тако што се за датумске параметре усвоје координате тих тачака. Класично дефинисање датума изводи се тако што се из матрице A искључе оне колоне које се односе на координате тачака које ће дефинисати датум мреже. Дефинисањем датумских параметара отклања се дефект мреже, односно, матрица A постаје матрица са потпуним рангом колона $r(A) = r = u \Rightarrow d = 0$. Након отклањања проблема датума, може се приступити оцени непознатих параметара за класично дефинисан датум:

$$\hat{x} = -N^{-1} \times n = -Q_x \times n, \text{ где је } N = A^T P A, n = A^T P f.$$

Дефинисање датума минималним трагом матрице Q_x постиже се увођењем одређених датумских услова. Интуитивно, то представља везивање мреже за координатни систем преко геометријског тежишта мреже.

Траг квадратне матрице $Q_{\hat{x}}$ једнак је збиру елемената на главној дијагонали и означава се са $tr(Q_{\hat{x}})$. Збир елемената на главној дијагонали кофакторске матрице може послужити и као мера тачности мреже.

Дефинисање датума минималним трагом матрице $Q_{\hat{x}}$ остварује се увођењем матрице датумских услова B . Димензије матрице датумских услова B су $d \times u$ где је d - дефект мреже (у случају 1Д мреже је $d = 1$), а u - број непознатих параметара. Минимализација трага матрице $Q_{\hat{x}}$ може се изводити и на делу тачака, самим тим и на делу матрице $Q_{\hat{x}}$.

Дефинисање датума минималним трагом матрице $Q_{\hat{x}}$ има за ефекат равномерну распоређеност грешака у мрежи око њеног тежишта, што се манифестује кроз приближну једнакост мера прецизности. Тако дефинисан датум повишава степен хомогености тачности у мрежи.

Матрица датумских услова која испуњава услов минимизације трага матрице $Q_{\hat{x}}$ може имати различиту форму, а једна од њих је следећа:

$$\mathbf{B}_{[d \times u]}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}} & \frac{1}{\sqrt{m}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{m}} \end{bmatrix}$$

где је,

m - број репера у мрежи,

Након што је формирана матрица B , инверзију матрице N можемо добити на следећи начин:

$$Q_{\hat{x}} = N_{u \times u}^+ = (N + B \times B^T)^{-1} - B \times B^T$$

Напомена: Инверзија матрице N која се добија на овај начин зове се **псеудоинверзија**, и означавамо је са N^+ . Да би се направила разлика у односу на резултате добијене са класично дефинисаним датумом, оцене при датуму дефинисаним минималним трагом означавамо са „~“.

Након отклањања проблема датума, може се приступити оцени непознатих параметара за датум дефинисан минималним трагом:

$$\tilde{x} = -N^+ \times n = -Q_{\hat{x}} \times n, \text{ где је } N = A^T P A, n = A^T P f$$

Оцена поправака мерења

Према функционалном моделу, поправке мерења једнаке су:

- У случају класично дефинисаног датума:

$$\hat{v} = A\hat{x} + f$$

- У случају датума дефинисаног минималним трагом:

$$\tilde{v} = A\tilde{x} + f$$

Оцена дисперзионог фактора

- У случају класично дефинисаног датума:

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{\hat{v}^T \cdot P \cdot \hat{v}}{n - u}}$$

- У случају датума дефинисаног минималним трагом:

$$\tilde{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{\tilde{v}^T \cdot P \cdot \tilde{v}}{n - u + d}}$$

Напомена: Поправке мерења, а тиме и оцењени дисперзиони фактор су инваријантне величина, што значи да су непроменљиве у односу на промену датума.

Глобални тест или тест адекватности модела (Гаус-Марковљевог модела)

Глобалним тестом адекватности модела контролишу се и функционални и стохастички део модела. Такође проверава се да ли постоје неоткривене грубе грешке.

Тест гласи:

$$H_0 : M(\hat{\sigma}_0^2) = \sigma_0^2$$

$$H_a : M(\hat{\sigma}_0^2) \neq \sigma_0^2$$

примењује се F тест

$$\text{у случају да је } \hat{\sigma}_0 > \sigma_0 : \quad F = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \sim F_{1-\alpha}(n-u+d, \infty)$$

$$\text{у случају да је } \hat{\sigma}_0 < \sigma_0 : \quad F = \frac{\sigma_0^2}{\hat{\sigma}_0^2} \sim F_{1-\alpha}(\infty, n-u+d)$$

Уколико глобални тест „не прође“ (уколико усвојимо алтернативну хипотезу), узрок можемо тражити управо у неадекватности функционалног и стохастичког модела, односно у постојању грубих грешака. Грубе грешке у мерењима обично проузрокују велику разлику између $\hat{\sigma}_0$ и σ_0 . Исти је случај када приближне координате нису довољно добре (што није случај у овом задатку). Уколико разлика није велика, решење можемо потражити у стохастичком моделу. На пример, уколико је $\hat{\sigma}_0$ веће од σ_0 и тест покаже да модел није адекватан, то нам указује да су нам мерења изведена са слабијом прецизности од оне коју смо усвојили приликом креирања матрице P. Аналогно, уколико је $\hat{\sigma}_0$ мање од σ_0 , то нам указује да су мерења изведена са бољом прецизности од оне коју смо усвојили приликом креирања матрице P.

Појединачни тест на грубе грешке

Уколико тест адекватности модела покаже несагласност две варијансе $\hat{\sigma}_0$ и σ_0 (тј. уколико не прође), анализом поправака мерења, може се претпоставити да у мерењима постоји груба грешка. Један од општеприхваћених тестова за лоцирање резултата мерења који је оптерећен grubом грешком, је **Baarda-in Data-snooping** тест. То је појединачни итеративни тест. Он полази од претпоставке да у мерењима постоји само једно опажање оптерећено grubом грешком. Појединачни се каже, јер се мерења појединачно анализирају, тако што се формира тест статистика за свако мерење. А итеративни, јер се полази од претпоставке да је само једно мерење оптерећено grubом грешком. Ако тест статистика покаже да има више мерења оптерећених grubом грешком, одбацује се само једно (оно које највише одступа) и понавља се поступак изравњања.

Напомена: Пре тестирања појединачних мерења на присуство grubих грешака, препорука је да се за појединачни тест усвоји модификован ниво значајности α_0 , који се рачуна према формули $\alpha_0 = 1 - (1 - \alpha)^{1/n}$, где је α усвојени ниво значајности, а n - број мерења.

Хипотезе **Data-snooping** теста гласе:

H_{0i} : Опажање I_i садржи grubу грешку

H_{ai} : Опажање I_i не садржи grubу грешку

Тест статистика гласи:

$$t_i = \frac{|\hat{v}_i|}{\sigma_0 \cdot \sqrt{Q_{\hat{v}_{ii}}}} \sim t_{1-\frac{\alpha_0}{2}} \mid H_0$$

Тест одлука гласи:

$\max |t_i| < t_{1-\alpha/2} \rightarrow$ прихвата се H_0 хипотеза

$\max |t_i| < t_{1-\alpha/2} \rightarrow$ прихвата се H_a хипотеза

Оцена непознатих параметара са оценом прецизности

Оцењене коте репера добијају се када се на приближне коте додају оцењени непознат параметри модела, односно прираштаји кота репера ($\hat{x} = dh$).

$$H = H^0 + dh$$

Прецизност геодетских мрежа представља статистички квалитет оцена величина (функција или непознатих параметара). Оцена прецизности репера нам даје информацију о квалитет оцено висине репера. тј. у ниво наше несигурности познавања кота репера. Као мера прецизности оцењених висина репера најчешће се користи стандардна девијација висине репера.

Основни извор информација о прецизности непознатих параметара у геодетској мрежи је ковариациона матрица непознатих параметара. Уколико за рачунање коваријационе матрице непознатих параметара користимо оцењену вредност дисперзионог фактора (стандардне девијације јединице тежине) тада говоримо о емпиријској оцени коваријационе матрице:

$$K_{\hat{x}} = \hat{\sigma}_o^2 \cdot Q_{\hat{x}} = \hat{\sigma}_o^2 \cdot (A^T P A)^{-1}$$

На дијагонали ковариационе матрице налазе се стандардне девијације непознатих параметара:

$$\hat{\sigma}_{H_i} = \hat{\sigma}_o \cdot \sqrt{Q_{H_{ii}}}$$

где је σ_o априори стандардна девијација, а $Q_{x_i x_i}$ су елементи на главној дијагонали симетричне матрице кофактора непознатих параметара

$$Q_{\hat{x}} = \begin{pmatrix} Q_{x_1 x_1} & Q_{x_1 x_2} & \cdots & Q_{x_1 x_u} \\ Q_{x_2 x_1} & Q_{x_2 x_2} & \cdots & Q_{x_2 x_u} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{x_u x_1} & Q_{x_u x_2} & \cdots & Q_{x_u x_u} \end{pmatrix}$$

Након израчунатог стандардног одступања по координатним осама може се израчунати и стандардно одступање тачке по положају:

$$\hat{\sigma}_p = \sqrt{\hat{\sigma}_{x_i}^2 + \hat{\sigma}_{y_i}^2}$$

Оцена мерених величина са оценом прецизности

Оцена мерених величина своди се на оцену поправака ($\hat{v} = A\hat{x} + f$) и оцену изравнатих вредности мерења ($\hat{l}_i = l_i + v_i$). Основна оцена прецизности мерених величина је оцена

дисперзионог фактора $\hat{\sigma}_0$. Према томе, од мера прецизности које карактеришу мерене величине могуће је дати следеће:

- Коварициона матрица поправака $K_v = \hat{\sigma}_0^2 \cdot Q_v$, где је $Q_v = P^{-1} - A Q_x A^T$ кофакторска матрица поправака мерења;
- Коварициона матрица оцењених мерења $K_f = \hat{\sigma}_0^2 \cdot Q_f$, где је $Q_f = A Q_x A^T$ - кофакторска матрица оцењених мерења;

Креирање извештаја о изравнању геодеетске мреже

Када глобални тест адекватности модела покаже да нам је модел адекватан (односно када усвојимо нулту хипотезу) можемо констатовати да имамо **дефинитивне** оцене непознатих параметара, а тиме и оценоу поправака и дисперзионог фактора. Све док тест статистика теста адекватности модела то не покаже не можемо усвојити резултате као дефинитивне. Након тога, потребно је формирати **Извештај о изравнању мреже**. Генерално извештај о изравнању мреже садржи следеће информације:

4. Заглавље са следећим информацијама: 1) број мерења; 2) број непознатих параметара; 3) број тачака; 4) начин дефинисања датума; 5) оцена дисперзионог фактора; 6) A priori дисперзиони фактор; 7) глобални тест адекватности са закључком.
5. Табела 1: Оцена непознатих параметара са оценом тачности

Репер	H_0	dh	$\hat{H}$	$\hat{\sigma}_H$

Где су:

- dh - оцењени параметри - прираштаји кота репера (елементи вектора непознатих параметара $\hat{x}$)
- $\hat{H}$ - оцењене коте репера ($H = H^0 + dh$)
- $\hat{\sigma}_H$ - оцене стандардне девијације висина репера

6. Табела 2: Оцена мерених величина са оценом тачности

Од	До	$\hat{v}$	$\hat{l}$	K_i	r_{ii}	G_i	$u-v$
...	...						

Где су:

- $\hat{v}$ - поправке мерења,
- $\hat{l}$ - оцењене вредности мерених величина ($\hat{l}_i = l_i + v_i$),
- K_i - дијагонални елементи коваријационе матрице мерених величина,
- r_{ii} - локална мера унутрашње поузданости,
- G_i - маргинална груба грешка
- $u-v$ - контрола изравнања

3. Задатак

За потребе изградње објекта J4 пројектована је геодетска мрежа и урађена су мерења у мрежи. Резултати мерења се налазе у фајлу **бр.индекса.xlsx**. У циљу одређивања дефинитивних координата тачака мреже са оценом тачности потребно је обрадити мерења у мрежи, по методи посредног изравнања, и то за случај:

- a. Датум мреже дефинисан параметрима X_{M1} , Y_{M1} , X_{M2} .
- b. Датум мреже дефинисан минималним трагом матрице Q_x

О задатку

За потребе креирања задатака 3 и 4, искоришћен је пример из реалног живота. У питању је изградња једног објекта који је у склопу нове термоелектране која се гради у Панчеву. За потребе изградње термоелектране, развијана је геодетска мрежа, док је за потребе овог задатка, издвојен само део те мреже којег чине четири тачке. Издвојене тачке обухватају и објекат који је предмет овог задатка. Геодетски радови на изградњи неког објекта се разликују од фазе до фазе реализације пројекта. Тако је трећим задатком обухваћена реализације 2Д геодетске мреже објекта, која се ради у почетним фазама изградње објекта, док је четвртим задатком обухваћена геодетска контрола геометрије објекта која се ради након реализације објекта или једног дела објекта. Трећи задатак је концептуално исти као и други, само је разлика што се у трећем задатку ради о 2Д геодетској мрежи објекта.

Развијању геодетске мреже објекта претходи пројектантски рад, где се пажљиво планира свака фаза у реализацији мреже, од рекогносцирања терена, преко избора конфигурације мреже, метода мерења и начина реализације мерења, до начина обраде података и оцена дефинитивних координата геодетске мреже са оценом тачности. Трећи задатак се односи на последњу фазу реализације мреже, а који обухвата обраду мерења и оцену дефинитивних координата тачака геодетске мреже, са оценом тачности. Геодетску мрежу у трећем задатку чине 4 тачке, M1, M2, M9 и M10. У мрежи су мерени хоризонтални правци и хоризонталне дужине. Резултати мерења су дати у фајлу *бр.индекса.xlsx*. У оквиру sheet-а *Points* налазе се приближне координате тачака, док се у sheet-у *Observations* се налазе мерења. Опис назива колона је следећи: *from* – станица (од), *to* – визура (до), *HzD* – степени хоризонталног правца, *HzM* – минути хоризонталног правца, *HzS* – секунде хоризонталног правца, *HD* – хоризонтална дужина. Остале колоне игноришите. Мерења која се односе на 4. задатак ће бити доступна тек када се заврши 3. задатак и када будемо имали коначне дефинитивне координате мреже.

Четврти задатак се односи на геодетску контролу геометрије објекта. Геодетска контрола геометрије објекта се изводи у циљу утврђивања изведеног стања објекта. Најчешће контроле које се изводе у пракси су контрола вертикалности и хоризонталности, као контрола паралелности и контрола управности. Геодетска контрола геометрије подразумева реализацију геодетских мерења у контролној мрежи коју чине тачке мреже и тачке на објекту. Главни услов код контролних мрежа је тај да се мерења ка свакој тачки објекта морају реализовати са бар две тачке мреже и да се при томе мере и правци и дужине. Другим речима, минималан број мерења ка свакој тачки је три. Мерења се након реализације обрађују са циљем да се одреде координате тачака објекта у систему мреже. Затим се врши статистичко тестирање припадности тачака одређеној фигури или одређеним правцима који заузимају одређени положај у простору (паралелни правци, управни правци, вертикални правци итд.).

Кратак технички опис објекта

Објекат је вишеспратна конструкција, са осовинским габаритима 43.0x20.0m и висине 25.0m. Конструкција објекта је челична рамовска, са главним рамовима по ширини објекта и спрегнутим таваницама на котама +5.00m и +9.50m. Стабилност конструкције је обезбеђена спреговима у оба правца. Кров је на две воде, нагиба 10%. Постоји шест главних попречних рамова распона 20.0m. Растери главних рамова су редом 10.0/8.0/9.0/10.0/7.0m, гледајући од челичног степеништа према централном контролном објекту. Све фасаде се затварају челичним панелима. У објекту се налази и кран носивости 50t који се налази приближно на коти +18.00m. Објекат је фундиран на шиповима $\varnothing 600$. Већина стубова, осим оних између хоризинталних оса ТВ&ТС и вертикалних оса ТЗ&Т5, дубина фундирања наглавице шипова је на коти -2.80m, дебљине 1.00m.



Слика 1: Ситуациони приказ пројектованог објекта



Слика 2: Осе објекта

Вежба 3.1 - Формирање матрица функционалног модела



Предаја вежбе: Прву вежбу трећег задатке потребно је предати у електронској форми, тако што ћете проширити постојећи фајл (**бр.индекса.xlsx**) са sheet-ом који се зове „Вежба 1“ и који ће садржати рачуницу за кретање матрица А и f.

Упутство за рад

Функције веза

Пре изравнања потребно је формирати функције везе између мерених величина:

За опажане правце :

$$L_{ip} = \alpha_i + v_i = \arctg \frac{Y_j - Y_i}{X_j - X_i} + Z$$

За мерене дужине :

$$L_{id} = d_i + v_i = \sqrt{\left((Y_j - Y_i)^2 + (X_j - X_i)^2\right)}$$

Једначине поправака

Једначине поправака за мерене величине у нашем примеру су :

За опажане правце:

$$v_{ip} = b_{i-j} Y_i + a_{i-j} X_i + b_{j-i} Y_j + a_{j-i} X_j + z_i + f_i$$

а при томе су коефицијенти:

$$z_i = \alpha_{i-j} - v_i^j$$

(за приближну вредност оријентационог угла усваја се аритметичка средина за станицу)

$$b_{i-j} = -\rho'' \frac{\cos v_i^j}{D_{i-j}} \quad a_{i-j} = \rho'' \frac{\sin v_i^j}{D_{i-j}}$$

$$b_{i-j} = -b_{j-i} \quad a_{i-j} = -a_{j-i}$$

$$f_i = \arctg \frac{Y_j^0 - Y_i^0}{X_j^0 - X_i^0} + z^0 - \alpha_{imereno}$$

(ознака ⁰ уз координате и оријентациони угао значи да се вредности рачунају из приближних вредности, односно $f_i = \text{PRIBLIZNO} - \text{MERENO}$)

За мерене дужине:

$$v_{id} = B_{i-j}Y_i + A_{i-j}X_i + B_{j-i}Y_j + A_{j-i}X_j + f_i$$

при чему су коефицијенти:

$$B_{i-j} = -\sin v_i^j \quad A_{i-j} = -\cos v_i^j$$

$$B_{i-j} = -B_{j-i} \quad A_{i-j} = -A_{j-i}$$

Формирање вектора f

Вектор f формирамо на основу разлика приближно срачунатих вредности мерених величина (из приближних координата) мање резултати мерења. Наиме, за правце, коефицијенте вектора f добићемо тако што ћемо од приближне вредности за мерени правац добијене на основу приближних координата тј. дирекционих углова, одузети мерене вредности. И са дужинама је исти случај. Од приближних вредности добијених на основу приближних координата одузимамо мерене вредности дужина.

Напомена: Важно је обратити пажњу на јединице. Потребно је усвојити одговарајуће јединице у којима ће бити изражени непознати параметри и поправке мерења и обратити пажњу да се буде доследан у поштовању усвојених јединица. Имајући у виду да је у питању 2Д мрежа, уобичајено је да се угловне величине усвоје секунде ("), а за дужинске величине милиметри (mm).

Напомена: Обострано мерене дужине између тачака потребно је осредњити и као такве их користити у изравнању. Разлог томе је што обострано мерење дужине представља начин мерења једне мерене величине (дужине између две тачке

Формирање матрице A

Матрица дизајна A формира се на основу једначина поправака мерених величина. Матрица је димензија $n \times u$, где n представља број независних једначина поправака односно број мерених величина, а u број непознатих, тј. тражених величина, односно прираштаја координата.

Вежба 3.2 – Формирање стохастичког модела

Предаја вежбе: Другу вежбу трећег задатке потребно је предати такође у електронској форми, тако што ћете у sheet-у **Observations** у колони **sd_Hz** уписати σ_p (за сваки правац), а у колони **sd_dist** уписати σ_d (за сваку дужину). Рачуницу за другу вежбу радити у новом sheet-у који се зове „Вежба 2“.

Као што је већ речено у уводним теоријским поглављима, стохастички модел описује степен варијације и коваријације мерења. Међутим, услед недостатка информација о корелисаности мерења, најчешће коришћен стохастички модел описан је дијагоналном ковариационом матрицом, која ван главне дијагонале има нуле $K_l = \sigma_0^2 Q_l = \sigma_0^2 P^{-1}$. Матрица тежина P у поступку оптимизације (одређивања параметера/координата применом МНК) има задатак да одреди ниво поверења у одређено мерење, или другим речима, ниво значајности сваког мерења. Уколико једно мерење има већу тежину, у поступку оптимизације параметри ће бити „форсирани“ да се више прилагоде том мерењу (да поправка тог мерења буде мања).

Матрица тежина P се формира тако што се сваком мерењу додели тежина $P_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$ где је σ_0 стандардна девијација јединице тежине (а приори стандардна девијација) мерених величина, а σ_i стандардна девијација појединачног мерења.

Напомена: За σ_0 могуће је усвојити различите вредности, али је уобичајено да се усвоји за σ_0 бројна вредност просечног стандардног одступања мереног правца или мерене дужине заокружена на цео број без димензија, тако да тежине имају вредности блиске јединици. σ_0 - као што јој само име каже представља стандардну девијацију „неког“ мерења. Свако мерење у мрежи које има толику стандардну девијацију имаће тежину 1. Из тог разлога се σ_0 назива и средња квадратна грешка јединице тежине.

Упутство за рад

За потребе формирања стохастичког модела, потребно је усвојити одговарајући модел. Имајући у виду да нам степен корелисаности мерења није познат, усвојићемо модел који подразумева да мерења нису корелисана и да су различите прецизности $K_l = \sigma_0^2 Q_l = \sigma_0^2 P^{-1}$. За потребе формирања таквог модела, потребно је формирати матрицу P , тако што ћемо за свако мерење израчунати тежину $P_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$. За то нам је потребно да некако дођемо до информације о прецизности мерења σ_i .

За те потребе, треба користити информације које су на располагању. На пример, уколико су нам познате карактеристике инструмента са којим су вршена мерења, у смислу декларисане прецизности мерења праваца и дужина, то је важна информација у погледу дефинисања прецизности мерења. Али важно је напоменути да то прецизност инструмента само једна компонента укупне грешке мереног правца.

На примеру овог задатка, таква информација је изостављена и ви сте упућени да дођете до информације о прецизности мерења директно из резултата мерења. У случају дужина, познато је да је свака дужина мерена два пута, напред (d_{i1}) и назад (d_{i2}). Да нема варијације мерења разлика мерења напред-назад $\Delta_i = d_{i1} - d_{i2}$ би била једнака нули. Међутим, услед постојања различитих утицаја који чине да мерења имају одређену случајну варијацију, мерења напред-назад се разликују. До иницијалне вредности варијације мерења можемо доћи применом анализе „парова мерења“ тј. двоструких мерења једне величине (види предавања проф. Банета или књигу Теорија грешака геодетских мерења проф. Г. Перовића). Према томе, прво ћемо израчунати стандардну девијацију разлика мерења:

$$\sigma_{\Delta} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\Delta_i - \bar{\Delta})^2}$$

Када нам је позната стандардна девијација разлике, до стандардне девијације дужине мерене у једном правцу долазимо тако што ћемо стандардну девијацију разлике поделити са $\sqrt{2}$, $\sigma_{di} = \frac{\sigma_{\Delta}}{\sqrt{2}}$. До тог израза смо дошли на основу претпоставке да су стандардне

девијације мерења напред и назад једнаке и знајући да је квадрат стандардне девијације разлике мерења једнак збиру квадрата стандардних девијација појединих мерења. Ако смо усвијили да приликом изравнања користимо аритметичку средину дужина мерених напред-назад, као коначну вредност стандардне девијације мерене дужине користимо грешку аритметичке средине: $\sigma_{\bar{di}} = \frac{\sigma_{di}}{\sqrt{2}}$. Претпостављајући да су све дужине мерене са истом

прецизношћу, тежине за дужине имаће следећи облик: $P_{di} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{\bar{di}}^2}$, где је $\sigma_d^2 = \sigma_{\bar{di}}^2$ (заокружено на милиметар).

У случају праваца такође некако морамо доћи до информације о прецизности мерења. На пример, да смо имали сирова мерења у више гируса, ту информацију би искористили за изналажење информације о прецизности (варијацији) праваца, на сличан начин као и за дужине, само користећи правце мерене у једном и другом положају дурбина као два мерења једне величине. Међутим, уколико немамо ту информацију, можемо искористити информацију да сума углова у троуглу мора бити једнака нули. Одступање од теоријске вредности може се искористити за оцену иницијалне прецизности мереног правца. Тако ћемо, за четири троугла у мрежи израчунати одступање суме углова од 180 степени: $\Delta = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - 180^\circ$. Ако претпоставимо да су у овој разлици сумиране све грешке (стандардне девијације) праваца који учествују у формирању углова (α_{1-3}) и да су грешке свих праваца једнаке, до грешке појединог правца ћемо доћи тако што ћемо разлику Δ поделити са $\sqrt{6}$, имајући у виду да у формирању разлике учествује шест праваца (по два за сваки угао): $\sigma_{p_i} = \frac{|\Delta_i|}{\sqrt{6}}$. За коначну вредност иницијалне прецизности мерених праваца

можемо усвојити средњу вредност $\sigma_p = \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_{p_i}}{n}$, где је n број троуглова. Ако претпоставимо

да су сви правци мерени истом прецизношћу, тежине за све правце ће бити: $P_{pi} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_p^2}$

Напомена: σ_p^2 и σ_d^2 заокружити на секунду, односно милиметар.

Матрица тежина ће имати следећи изглед:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_{p1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & P_{pn_p} & & & \\ & & & P_{d1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & P_{dn_d} \end{pmatrix}$$

Напомена: Могуће је да на овај начин добијемо вредности које нам изгледају ружно или нелогично. Али то исто је могуће и у реалном животу. Мерења у овом задатку су прављена да симулирају могућности у реалним мерењима. Поред тога, могуће је и да добијене информације и прецизности мерења, а тиме и стохастички модел (матрица $\mathbf{P}$), не осликавају добро мерења у мрежи. Стохастички модел је подложен изменама, али на који начин ће се мењати зависи од теста адекватности модела.

Вежба 3.3 – Оцена непознатих параметара



Предаја вежбе: Трећу вежбу треба предати тако што ћете проширити постојећи фајл (*бр.индекса.xlsx*) са sheet-ом који се зове „Вежба 3_класичан_датум“ и „Вежба 3_минтр“ и који ће садржати рачуницу изравнања.

У оквиру ове вежбе потребно је урадити **изравнање геодетске мреже** и креирати **Извештај о изравнању геодетске мреже** за случај када је:

1. Датум мреже дефинисан параметрима X_{M1} , Y_{M1} , X_{M2}
2. Датум мреже дефинисан минималним трагом матрице Q_x

Пример креирања матрице датумских услова за случај дефинисања датума минималним трагом над свим тачкама мреже:

			Y [m]	X[m]	Yoi-Yo	Xoi-Xo	(Yoi-Yo)^2	(Xoi-Xo)^2	η_i	ζ_i
m=	4	M1	7475035.702	4965237.136	-54.065	1.984	2922.970	3.936	-0.00013106	9.5418E-06
ρ =	206264.8062	M2	7475068.636	4965180.127	-21.130	-55.025	446.498	3027.751	-5.1222E-05	0.00733947
g=	412529.6298	M9	7475087.492	4965276.575	-2.275	41.423	5.173	1715.865	-5.5135E-06	0.00415937
		M10	7475167.236	4965246.770	77.469	11.618	6001.523	134.978	0.00018779	0.0003272
		SR.VR.	7475089.767	4965235.152			9376.165	4882.530		

$B^T=$ 3x12	dX ₁	dY ₁	dX ₂	dY ₂	dX ₃	dY ₃	dX ₄	dY ₄	dZ ₁	dZ ₂	dZ ₃	dZ ₄
	0.0	0.5	0.0	0.5	0.0	0.5	0.0	0.5	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.5	0.0	0.5	0.0	0.5	0.0	0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	-0.000010	-0.000131	-0.007339	-0.000051	-0.004159	-0.000006	-0.000327	0.000188	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000

Задатак 4 – Геодетска контрола геометрије објекта

За потребе контроле геометрије објекта, урађена су мерења са геодетске мреже карактеристичним тачкама објекта. За потребе контроле геометрије објекта потребно је оценити координате тачака објекта са оценом тачности и урадити тестирање хипотеза о подударности пројектованог и изведеног стања објекта. Тестирање подударности изведеног и пројектованог стања се односи на тестирање хипотеза о припадности тачака објекту, као и паралелности и управности карактеристичних оса објекта.

Задатак 4 је подељен у две вежбе:

- **Вежба 4.1** - У оквиру ове вежбе потребно је одредити координате карактеристичних тачака на објекту у координатном систему мреже.
- **Вежба 4.2.** - У другој вежби је потребно тестирати хипотезе о припадности тачака на објекту пројектованом положају (нпр. пројектованом положају тачака или одређеном геометријском односу).

Сваки студент има по четири тачке на објекту, чије координате су оцењене у оквиру претходне вежбе, а које дефинишу 4 осе. Потребно у оквиру ове вежбе одабрати две осе које ће бити тестиране на паралелност и две осе које ће бити тестиране на управност.

О геодетској контроли геометрије

Геодетска контрола геометрије објекта подразумева одређивање координата карактеристичних тачака објекта у координатном систему објекта (геодетске мреже објекта) и поређење оцењених координата са пројектованим вредностима координата. Поред тога, често се као захтев поставља контрола припадности изведених елемената објекта неком пројектованом геометријском односу или фигури. Као најчешћи захтеви се могу навести: контрола вертикалности, контрола управности или контрола паралелности. У том циљу, такође је потребно одредити координате карактеристичних тачака елемената објекта и контролисати да ли оне задовољавају пројектоване геометријске односе или да ли припадају одређеној пројектованој фигури (нпр. квадрату или кружници).

Поређење се обично врши статистичким тестирањем значајности одступања оцењеног (изведеног) стања од пројектованог стања. На пример, уколико се тражи да контролишемо паралелност два правца, поставићемо хипотезу да су дирекциони углови између две тачке на оба правца једнаки. Међутим, да бисмо могли тврдити да два правца јесу или нису паралелна, разлика дирекционих углова мора бити статистички значајна или статистички незначајна. То зависи од нивоа прецизности са којом су одређене координате тачака. Стим у вези, да бисмо могли статистички тестирати поменућу хипотезу, потребно је одредити координате тачака на правцима у координатном систему мреже са оценом тачности (прецизности). У том циљу, потребно је формирати контролну геодетску мрежу, коју чине тачке мреже и тачке на објекту. Предуслов је постојање геодетске мреже ван објекта, што је био предмет трећег задатка. Мерења у контролној мрежи је потребно тако организовати да је могуће применити методу изравнања геодетске мреже која би нам омогућила оцену координата тачака на објекту са оценом тачности. Да би то било могуће, потребно је да се у свакој тачки објекта сустичу најмање три мерења са бар две тачке мреже, што је више од минималног (неопходног броја мерења) за одређивање положаја једне тачке у простору (један правац и једна дужина мерени са једне тачке). На пример, ако су ка једној тачки објекта мерени правци и дужине са две тачке мреже, укупан број мерења који се сустиче у тој тачки је 4, што је довољно за изравнање и оцену тачности.

Вежба 4.1 - Оцена координата карактеристичних тачака објекта

Предаја вежбе: Прву вежбу четвртог задатка потребно је предати у електронској форми у оквиру новог sheet-а „Задатак_4_вежба_1“.

За потребе прве вежбе, четвртог задатка, сваки студент ће добити персонализован *excel* фајл, истог формата као у претходном задатку, у којем су смештена мерења са три тачке мреже ка четири тачке на објекту. Тачке на објекту су пресеци карактеристичних оса објекта. На самом почетку, од вас се очекује да у *sheet*-у *Points* упишете оцењене координате тачака мреже које сте добили у оквиру претходног задатка (решење добијено под условом минималног трага). Приближне координате тачака на објекту већ уписане. За те потребе искоришћене су пројектоване координате тачака на објекту.

Након тога, потребно је оценити координате тачака на објекту применом посредног изравнања са датумом дефинисаним на тачкама мреже. За потребе креирања стохастичког искористити информацију да су мерења реализована са инструментом који има прецизност мерења праваца $\sigma_p = 5''$, а прецизност мерења дужина $\sigma_d = 3mm$. Уколико модел не буде адекватан, на вама је да, користећи искуства из претходног задатка, покушате да утврдите у чему је проблем и да одговарајућом интервенцијом (променом стохастичког модела или избацивањем мерења са грубом грешком) решите проблем.

Напомена: За потребе формирања стохастичког модела могуће је искористити исти приступ као у претходном задатку, коришћењем мерења између тачака мреже. Међутим постоји опасност да тај приступ не обезбеди довољно информација, јер је мали број мерења на располагању.

Резултате изравнања приказати у облику **Извештаја о изравнању геодеетске мреже**.

Напомена: Мерене дужине између тачака мреже (датумских тачака) не укључивати приликом формирања матрице дизајна (A).

Вежба 4.2 - Контрола геометрије

Предаја вежбе: Прву вежбу четвртог задатка потребно је предати у електронској форми у оквиру новог sheet-а „Задатак_4_вежба_2“.

Након што су координате тачака објекта оцењене у координатном систему мреже, у циљу контроле геометрије потребно је урадити одређене статистичке тестове који ће потврдити или одбацити хипотезу да оцењене координате тачака статистички испуњавају одређене услове. У оквиру ове вежбе тестираћемо три хипотезе:

1. **Подударност по положају:** Да су оцењене координате тачака објекта статистички подударне са пројектованим координатама.
2. **Паралелност две праве:** Да су осе објекта које су материјализоване оцењеним координата тачака паралелне
3. **Управност две праве:** Да су осе објекта које су материјализоване оцењеним координата тачака управне.

Тестирање подударности по положају

За потребе тестирања подударности по положају неопходно је имати оцењене координате тачака (што је урађено у претходној вежби) и пројектоване координате објекта (што вам је дато у *excel* фајлу, приближне координате су уједно и пројектоване). Математичка формулација хипотеза гласи: Математичко очекивање разлика оцењених и пројектованих (P) координата тачака је нула вектор.

$$H_0 : M \begin{bmatrix} \hat{Y}_1 - \hat{Y}_1^P \\ \hat{X}_1 - \hat{X}_1^P \\ \vdots \\ \hat{Y}_k - \hat{Y}_k^P \\ \hat{X}_k - \hat{X}_k^P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{k-1} \\ f_k \end{bmatrix} = M[\mathbf{d}] = 0,$$

$$H_a : M \begin{bmatrix} \hat{Y}_1 - \hat{Y}_1^P \\ \hat{X}_1 - \hat{X}_1^P \\ \vdots \\ \hat{Y}_k - \hat{Y}_k^P \\ \hat{X}_k - \hat{X}_k^P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{k-1} \\ f_k \end{bmatrix} = M[\mathbf{d}] \neq 0$$

Где $\mathbf{d}$ представља вектор разлика координата. Као што се види, формулација ове хипотезе подразумева дефинисање k математичких услова (функција везе нулте хипотезе - f_i), где је $k = 2 \cdot m$, а m представља број тачака (за сваку координату по један услов). Када је формиран вектор разлика, потребно је формирати тзв. тест статистику. Тест статистика је вредност која под важењем нулте хипотезе следи одређену теоријску расподелу. Она се рачуна на следећи начин:

$$T = \frac{\mathbf{d}^T \cdot \mathbf{Q}_d^{-1} \cdot \mathbf{d}}{k \cdot \sigma_0^2} \sim F_{0.95}(k, \infty) |_{H_0}$$

где $\mathbf{Q}_d$ представља кофакторску матрицу разлика и која је једнака: $\mathbf{Q}_d = \mathbf{H} \cdot \mathbf{Q}_x \cdot \mathbf{H}^T$. Матрица $\mathbf{H}$ представља матрицу коефицијената хипотезе, а матрица $\mathbf{Q}_x$ је кофакторска матрица непознатих (оцењених) параметара који учествују у формирању хипотезе. Елементи сваке врсте матрице $\mathbf{H}$ су парцијални изводи сваке функције (математичког услова из хипотезе) по оцењеним параметрима који учествују у формирању хипотезе. Тако у овом случају, оцењени параметри који учествују у формирању хипотезе су оцењене координате тачака $\hat{Y}_1, \hat{X}_1, \dots, \hat{Y}_k, \hat{X}_k$. Према томе, собзиром да у првом услову (првој функцији) учествује само координата $\hat{Y}_1$, извод функције по тој координати ће бити једнак јединици, а по осталим координатама ће бити једнак нули.

$$\mathbf{H}_{[2 \cdot k \times u]} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial Y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial Y_n} & \frac{\partial f_1}{\partial X_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial Y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial X_1} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial Y_n} & \frac{\partial f_2}{\partial X_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{k-1}}{\partial Y_1} & \frac{\partial f_{k-1}}{\partial X_1} & \dots & \frac{\partial f_{k-1}}{\partial Y_n} & \frac{\partial f_{k-1}}{\partial X_n} \\ \frac{\partial f_k}{\partial Y_1} & \frac{\partial f_k}{\partial X_1} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial Y_n} & \frac{\partial f_k}{\partial X_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Да би било могуће израчунати матрицу $\mathbf{Q}_d = \mathbf{H} \cdot \mathbf{Q}_x \cdot \mathbf{H}^T$, потребно је ускладити димензије. Другим речима, матрица $\mathbf{Q}_x$ треба да има исти број колона, као и матрица $\mathbf{H}$. У том циљу, потребно је из матрице $\mathbf{Q}_x$ која је добијена у поступку изравнања и оцено координата тачака мреже, издвојити само оне елементе који се односе на координате тачака које учествују у формирању хипотеза. На примеру матрице $\mathbf{Q}_x$ испод, означени су елементи који се односе на координате које учествују у хипотезама везаним за овај задатак. Другим речима, само су искључени елементи који се односе на $\mathbf{z}$ -ове.

Напомена: Пример издвајања елемената матрице $\mathbf{Q}_{\hat{x}}$ који одговара вашем случају:

$\mathbf{Q}_{\hat{x}} =$	dx_1	dy_1	dx_2	dy_2	dx_3	dy_3	dx_4	dy_4	dz_1	dz_2	dz_3
	2.124	0.231	0.240	-0.033	0.223	-0.116	0.217	-0.121	-0.151	-1.207	-0.031
	0.231	1.455	-0.060	0.354	-0.099	0.345	-0.088	0.377	1.284	0.456	-1.284
	0.240	-0.060	2.173	0.236	0.248	-0.125	0.244	-0.133	-0.287	-1.244	-0.087
	-0.033	0.354	0.236	1.464	-0.089	0.337	-0.078	0.369	1.284	0.389	-1.270
	0.223	-0.099	0.248	-0.089	2.515	-0.728	0.298	-0.152	-0.730	-1.169	-0.270
	-0.116	0.345	-0.125	0.337	-0.728	1.423	-0.122	0.392	1.109	0.803	-1.322
	0.217	-0.088	0.244	-0.078	0.298	-0.122	2.459	-0.700	-0.742	-1.133	-0.369
	-0.121	0.377	-0.133	0.369	-0.152	0.392	-0.700	1.690	1.249	0.850	-1.404
	-0.151	1.284	-0.287	1.284	-0.730	1.109	-0.742	1.249	6.635	1.493	-2.297
	-1.207	0.456	-1.244	0.389	-1.169	0.803	-1.133	0.850	1.493	6.360	-0.736
	-0.031	-1.284	-0.087	-1.270	-0.270	-1.322	-0.369	-1.404	-2.297	-0.736	7.460

Закључак тестирања

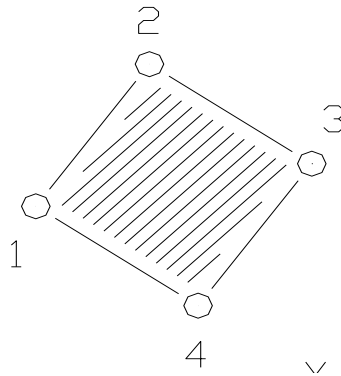
Ако је тест статистика мања од квантила F-расподеле са k и ∞ степени слободе, онда усвајамо нулту хипотезу и констатујемо да су оцењене координате тачака статистички подударне са пројектованим координатама тачака. У супротном усвајамо алтернативну хипотезу и констатујемо да нису подударне.

$$T = \frac{\mathbf{d}^T \cdot \mathbf{Q}_d^{-1} \cdot \mathbf{d}}{k \cdot \sigma_0^2} < F_{0.95}(k, \infty) \rightarrow H_0$$

$$T = \frac{\mathbf{d}^T \cdot \mathbf{Q}_d^{-1} \cdot \mathbf{d}}{k \cdot \sigma_0^2} > F_{0.95}(k, \infty) \rightarrow H_a$$

Тестирање хипотезе о паралелности две праве

За потребе тестирања хипотезе о паралелности две праве потребно је формулисати хипотезу у виду неког математичког услова у којем учествују непознати (оцењени) параметри, тј. оцењене координате тачака објекта. Логично се намеће услов по којем је права којој припадају тачке 1 и 2 паралелна правој којој припадају тачке 3 и 4, паралелне ако је разлика дирекционих углова једнака нули.



Слика 1. Пример распореда тачака на објекту

Математички, формулација хипотеза може се написати на следећи начин:

$$H_0 : M \left[\hat{v}_1^2 - \hat{v}_3^4 \right] = 0$$

$$H_a : M \left[\hat{v}_1^2 - \hat{v}_3^4 \right] \neq 0$$

Функција везе нулте хипотезе гласи:

$$L : \hat{v}_1^2 - \hat{v}_3^4 = \arctg \frac{\hat{Y}_2 - \hat{Y}_1}{\hat{X}_2 - \hat{X}_1} - \arctg \frac{\hat{Y}_4 - \hat{Y}_3}{\hat{X}_4 - \hat{X}_3}.$$

Тест статистика је:

$$T = \frac{(\mathbf{d}^T \mathbf{Q}_d^{-1} \mathbf{d})}{k \cdot \sigma_0^2} \approx F_{0.95}(k, \infty) \bigg|_{H_0};$$

Где је $\mathbf{d}$ – вектор одступања од хипотезе $\mathbf{d}_{[n]} = [\hat{v}_1^2 - \hat{v}_3^4]$, а $\mathbf{Q}_d = \mathbf{H} \mathbf{Q}_x \mathbf{H}^T$ кофакторска матрица разлика (одступања од хипотезе). Као и у претходном примеру, $\mathbf{H}$ – матрица је матрица коефицијената. Собзиром да имамо постављен само један услов, матрица $\mathbf{H}$ има само једну врсту, а број колона је једнак броју непознатих параметера (оцењених координата) који учествују у формулисању хипотезе. У овом случају, рачунање елемената матрице $\mathbf{H}$ је мало

компликованије. Али ако имамо у виду да је функција везе разлика два дирекциона угла и ако знамо чему су једнаки парцијални изводи функције дирекционог угла по координатама, онда се рачунање елемената матрице **H** своди на рачунање нама познатих коефицијената

$$a_i^j = \frac{\rho \sin \nu_i^j}{d_i^j} \text{ и } b_i^j = -\frac{\rho \cos \nu_i^j}{d_i^j}.$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial Y_1} & \frac{\partial L}{\partial X_1} & \frac{\partial L}{\partial Y_2} & \frac{\partial L}{\partial X_2} & \frac{\partial L}{\partial Y_3} & \frac{\partial L}{\partial X_3} & \frac{\partial L}{\partial Y_4} & \frac{\partial L}{\partial X_4} \end{bmatrix}$$

односно

$$Y_1 \quad X_1 \quad Y_2 \quad X_2 \quad Y_3 \quad X_3 \quad Y_4 \quad X_4$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} b_1^2 & a_1^2 & -b_1^2 & -a_1^2 & -b_4^3 & -a_4^3 & b_4^3 & a_4^3 \end{bmatrix}$$

Закључак тестирања

Ако је тест статистика мања од квантила F-расподеле са $k=1$ и ∞ степени слободe, онда усвајамо нулту хипотезу и констатујемо да разлика дирекционих углова није статистички значајна, односно да су праве паралелне. У супротном усвајамо алтернативну хипотезу и констатујемо да праве нису паралелне.

$$T = \frac{\mathbf{d}^T \cdot \mathbf{Q}_d^{-1} \cdot \mathbf{d}}{k \cdot \sigma_0^2} < F_{0.95}(k, \infty) \rightarrow H_0$$

$$T = \frac{\mathbf{d}^T \cdot \mathbf{Q}_d^{-1} \cdot \mathbf{d}}{k \cdot \sigma_0^2} > F_{0.95}(k, \infty) \rightarrow H_a$$

Тестирање хипотезе о управности две праве

За потребе тестирања хипотезе о управности две праве потребно је формулисати хипотезу у виду неког математичког услова у којем учествују непознати (оцењени) параметри, тј. оцењене координате тачака објекта. У овом случају се намеће услов по којем је права којој припадају тачке 1 и 2 управна правој којој припадају тачке 2 и 3, ако је угао код тачке 2 једнак углу од 90° . Собзиром да се угао може изразити ако разлика дирекционих углова, математички, формулација хипотезе може се написати на следећи начин:

$$H_0 : M [\hat{v}_2^3 - \hat{v}_2^1 - 90^\circ] = 0$$

$$H_a : M [\hat{v}_2^3 - \hat{v}_2^1 - 90^\circ] \neq 0$$

Функција везе нулте хипотезе гласи:

$$L : (\hat{v}_2^3 - \hat{v}_2^1) - 90^\circ = (\arctg \frac{\hat{Y}_3 - \hat{Y}_2}{\hat{X}_3 - \hat{X}_2} - \arctg \frac{\hat{Y}_1 - \hat{Y}_2}{\hat{X}_1 - \hat{X}_2}) - 90^\circ.$$

Тест статистика је:

$$T = \frac{(\mathbf{d}^T \mathbf{Q}_d^{-1} \mathbf{d})}{k \cdot \sigma_0^2} \approx F_{0.95}(k, \infty) \bigg|_{H_0};$$

Где је $\mathbf{d}$ – вектор одступања од хипотезе $\mathbf{d}_{[.]} = [\hat{v}_2^3 - \hat{v}_2^1] - 90^\circ$, а $\mathbf{Q}_d = \mathbf{H} \mathbf{Q}_x \mathbf{H}^T$ кофакторска матрица разлика (одступања од хипотезе). Као и у претходном примеру, $\mathbf{H}$ – матрица је матрица коефицијената. Собзиром да имамо постављен само један услов ($k=1$), матрица $\mathbf{H}$ има само једну врсту, а број колона је једнак броју непознатих параметера (оцењених координата) који учествују у формулисању хипотезе.

$$\mathbf{H} = \left[\frac{\partial L}{\partial Y_1} \quad \frac{\partial L}{\partial X_1} \quad \frac{\partial L}{\partial Y_2} \quad \frac{\partial L}{\partial X_2} \quad \frac{\partial L}{\partial Y_3} \quad \frac{\partial L}{\partial X_3} \quad \frac{\partial L}{\partial Y_4} \quad \frac{\partial L}{\partial X_4} \right]$$

односно

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} Y_1 & X_1 & Y_2 & X_2 & Y_3 & X_3 & Y_4 & X_4 \\ b_2^1 & a_2^1 & (b_2^3 - b_2^1) & (a_2^3 - a_2^1) & -b_2^3 & -a_2^3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Коефицијенти су облика:

$$a_i^j = \frac{\rho \sin v_i^j}{d_i^j} ; \quad b_i^j = -\frac{\rho \cos v_i^j}{d_i^j}$$

Закључак тестирања

Ако је тест статистика мања од квантила F-расподеле са $k=1$ и ∞ степени слободe, онда усвајамо нулту хипотезу и констатујемо да угао код тачке 2 не одступа статистички значајно од правог угла, односно да су праве управне. У супротном усвајамо алтернативну хипотезу и констатујемо да праве нису управне.

$$T = \frac{\mathbf{d}^T \cdot \mathbf{Q}_d^{-1} \cdot \mathbf{d}}{k \cdot \sigma_0^2} < F_{0.95}(k, \infty) \rightarrow H_0$$

$$T = \frac{\mathbf{d}^T \cdot \mathbf{Q}_d^{-1} \cdot \mathbf{d}}{k \cdot \sigma_0^2} > F_{0.95}(k, \infty) \rightarrow H_a$$