

Завршни испит из Математике 1

Презиме и име:

Број индекса:

1. Одредити све векторе $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ који задовољавају једнакост $v^T S v = v^T v$, ако је $S = [s_{ij}]$ симетрична матрица реда 2 дата са: $s_{ij} = |i - j| + 1$. Дати геометријску интерпретацију. (2)

$$v^T S v = v^T v \iff [x \ y] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x \ y] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \iff x^2 + 4xy + y^2 = x^2 + y^2 \iff xy = 0 \iff x = 0 \vee y = 0.$$

Геометријски, ови вектори су у скупу $\mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \cup \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$, што су вектори координатних оса.

2. Дефинисати производ матрица. Ако је $A = [a_{ij}]$ матрица типа $m \times 3$, дата са: $a_{ij} = i - j$, $B = [b_{ij}]$ матрица типа $3 \times n$, дата са: $b_{ij} = i - j$ и $C = AB$, одредити елемент c_{26} према овој дефиницији. (2)

Дефиниција 2.18 на страни 60.

Према овој дефиницији, за $i = 2$ и $j = 6$, добија се:

$$c_{26} = \sum_{k=1}^3 a_{2k} b_{k6} = a_{21} b_{16} + a_{22} b_{26} + a_{23} b_{36} = 1 \cdot (-5) + 0 \cdot (-4) + (-1) \cdot (-3) = -2.$$

3. За квадратну матрицу A кажемо да је идемпотентна ако важи услов $A^2 = A$. Одредити све идемпотентне горње троугаоне матрице реда 2. (2)

Матрица A реда 2 је горње троугаона ако је $a_{21} = 0$. Добија се:

$$A^2 = A \iff \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} a^2 & b(a+c) \\ 0 & c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \iff a^2 = a \wedge c^2 = c \wedge b(a+c) = 0.$$

Решавањем система добијамо матрице: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, где је $b \in \mathbb{R}$.

4. Формулисати Кронекер-Капелијеву теорему. (1)

Теорема 2.18 на страни 87.

5. Дефинисати појмове базе и димензије векторског простора. Ако је $e = [e_1, e_2, e_3]$ једна база векторског простора $V = \mathbb{R}^3$ и ако је $A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ регуларна матрица, шта се може рећи о скупу вектора $[Ae_1, Ae_2, Ae_3]$? Образложити одговор. (2)

Дефиниције 2.35 и 2.36 на странама 77 и 79.

Како је A регуларна матрица, $f = [Ae_1, Ae_2, Ae_3]$ је нова база простора $V = \mathbb{R}^3$. За доказ погледати поглавље "Матрица преласка са базе на базу" на страни 80.

6. Написати услов паралелности за праву $l : \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ и раван $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$. Затим написати једначину праве l која садржи тачку $(1,1,1)$ и паралелна је са равни xOy . Који подскуп у $\mathbb{R}^3$ формирају све праве које задовољавају услов задатка? (2)

Услов паралелности:

$$\langle \vec{N}_\pi, \vec{l} \rangle = 0 \iff Aa + Bb + Cc = 0.$$

Једначина равни xOy је $z = 0$, па горњи услов гласи $0 \cdot a + 0 \cdot b + 1 \cdot c = 0$, те је $c = 0$, док су a и b произвољни реални бројеви. Једначине ових правих у канонском облику биће:

$$l: \frac{x-1}{a} = \frac{y-1}{b} = \frac{z-1}{0}, \quad a, b \in \mathbb{R}, (a, b) \neq (0, 0).$$

Све праве које задовољавају услов задатка очигледно описују раван $z = 1$.

7. Написати по дефиницији: $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} = 0$. Затим одредити n_0 , ако је $\varepsilon = 1/10$. (2)

Дефиниција 4.5 на страни 160.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} = 0 \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \implies e^{-n} < \varepsilon), \quad e^{-n} < 10^{-1} \text{ за } n \geq 3.$$

8. Дефинисати појам непрекидности функције, тачке прекида и врсте прекида. Дати пример функције дефинисане на $\mathbb{R}$ која у тачки $x_1 = -1$ има отклоњив прекид прве врсте, а у тачки $x_2 = 3$ има прекид друге врсте. Скицирати график одабране функције. (2)

Дефиниција 5.18 на страни 197, и дефиниције 5.20 и 5.21 на страни 200. Као пример можемо узети функцију

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 3] \\ 2, & x = -1 \\ \frac{1}{x-3}, & x \in (3, +\infty). \end{cases}$$

9. Лагранжова теорема о средњој вредности. Исказ, доказ и геометријска интерпретација. (3)

Теорема 6.8 на страни 226.

10. Показати по дефиницији да је $(\cos x)' = -\sin x$. (2)

За функцију $f(x) = \cos x$ биће:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin\left(\frac{2x+h}{2}\right) \sin \frac{h}{2}}{h} = - \lim_{h \rightarrow 0} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = -\sin x.$$