

Завршни испит из Математике 1

Презиме, име и број индекса:

Поени на писменом:

1. Дефинисати ранг матрице. Одредити $r(A)$ у зависности од реалног параметра p , ако је $A = [a_{ij}]$ квадратна матрица реда 3, дата са: $a_{ij} = p$, ако је $i + j = 4$, и $a_{ij} = 1$, за $i + j \neq 4$. (2)

Било која од више еквивалентних дефиниција ранга, нпр. дефиниција 2.39 на страни 84. Низом елементарних трансформација добија се:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & p \\ 1 & p & 1 \\ p & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & p-1 & 0 \\ 0 & 0 & (p-1)(p+2) \end{bmatrix} \implies r(A) = \begin{cases} 1, & p = 1 \\ 2, & p = -2 \\ 3, & p \neq 1 \wedge p \neq -2 \end{cases}$$

2. Дефинисати језгро линеарног пресликавања а затим одредити језгро оператора задатог матрицом из првог задатка за $p = -2$. Дати геометријску интерпретацију. (2)

Дефиниција 2.32 на страни 74.

$$L(v) = 0 \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \implies \text{Ker}(L) = \mathcal{L}(v), \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Геометријски, у језгру су вектори праве $l: x = y = z$.

3. Дефинисати појам еуклидског векторског простора V и показати да за било која два вектора $x, y \in V$ важи: $\|x\| = \|y\| \iff (x+y) \perp (x-y)$. (3)

Дефиниција 2.48 на страни 96. Даље,

$$\begin{aligned} (x+y) \perp (x-y) &\iff \langle x+y, x-y \rangle = 0 \iff \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle - \langle y, y \rangle = 0 \\ &\iff \|x\|^2 - \langle x, y \rangle + \langle x, y \rangle - \|y\|^2 = 0 \iff \|x\|^2 = \|y\|^2 \iff \|x\| = \|y\|. \end{aligned}$$

4. Формулисати Кронекер - Капелијеву теорему. (1)

Теорема 2.18 на страни 87.

5. Дефинисати појам ортонормиране базе. Дати пример две различите ортонормиране базе $e = [e_1, e_2]$ и $f = [f_1, f_2]$ векторског простора $V = \mathbb{R}^2$. Шта се може рећи о матрици преласка са базе e на базу f ? (2)

Дефиниција 2.53 на страни 99. За базу e можемо узети векторе стандардне базе векторског простора $V = \mathbb{R}^2$, а за базу f узмемо на пример векторе матрице ротације за 45° :

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

6. Одредити једначину равни која садржи осу Oz и тачку $M(1,1,1)$. (2)

Једначина тражене равни је $\pi : x - y = 0$.

7. Поређати низове $a_n = 2^n$, $b_n = \ln^5 n^{25}$, $c_n = (2n)!!$ и $d_n = n^{25}$ по брзини којом теже ка $+\infty$, почевши од најспоријег. (1)

$$b_n < d_n < a_n < c_n.$$

8. Дефинисати следеће појмове: (1) Функција f је ограничена на сегменту $[0,1]$; (2) Функција f је непрекидна на $[0,1]$. Формулисати теорему која повезује (1) и (2). (2)

Дефиниција 5.2 на страни 184 и дефиниција 5.17 (или 5.18) на страни 197.

Према Болцано - Вајерштрасовој теореме (Теорема 5.9 на страни 203) свака непрекидна функција на одсечку је и ограничена на том одсечку. Обрнуто не важи.

9. Формулисати и доказати Лагранжову теорему о средњој вредности. (3)

Теорема 6.8 на страни 226.

10. Формулисати Тејлорову формулу са остатком у Пеановом облику. Известити Маклоренову формулу степена 3 за функцију $f(x) = \sin(\sin x)$. (2)

Теорема 6.14 на страни 236. Можемо узети смену $t = \sin x$, јер $t \rightarrow 0$, кад $x \rightarrow 0$. Имамо

$$\sin(\sin x) = \sin t = t - \frac{t^3}{3!} + o(t^4) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3!} + o(x^4) = x - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4).$$