

Завршни испит из Математике 1

Презиме и име:

Број индекса:

1. Дефинисати појам детерминанте. Ако је A ортогонална матрица било ког реда, чему је једнака $\det(A)$? Образложити одговор. (2)

Дефиниција 2.3 на страни 46.

$$AA^T = I \implies \det(AA^T) = \det(I) \implies \det(A)\det(A^T) = 1 \implies (\det(A))^2 = 1 \implies \det(A) = 1 \vee \det(A) = -1.$$

2. Дефинисати ранг матрице. Одредити $r(A)$ у зависности од реалног параметра p , ако је $A = [a_{ij}]$ матрица формата 3×2 , дата са: $a_{ij} = p + i - j$. Образложити одговор. (2)

Било која од више еквивалентних дефиниција ранга, нпр. дефиниција 2.39 на страни 84. Низом елементарних трансформација добија се:

$$A = \begin{bmatrix} p & p-1 \\ p+1 & p \\ p+2 & p+1 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \implies r(A) = 2 \text{ за све } p \in \mathbb{R}.$$

- Показати да реална $m \times n$ матрица $A = [a_{ij}]$ дефинише линеаран оператор $L: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Затим објаснити геометрију пресликавања одређеног матрицом $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$, где је $a_{ij} = i - j$. (3)

За пресликавање $L: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ дефинисано са $L(X) = AX$ очигледно важи:

$$L(X + Y) = A(X + Y) = AX + AY = L(X) + L(Y) \text{ и } L(\lambda X) = A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda L(X), \text{ па је } L \text{ linearno.}$$

Приметимо да за дату матрицу $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ важи $A = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}$, па је у питању ротација равни за $\pi/2$.

4. Формулисати Кејли-Хамилтонову теорему. (1)

Теорема 2.23 на страни 92.

5. Дефинисати појам еуклидског векторског простора. Илустровати примером. (2)

Дефиниција 2.48 на страни 96.

Пример: $V = \mathbb{R}^n$, са стандардним скаларним производом.

6. Одредити реални параметар a тако да се равни $\pi_1: x - y = 1$, $\pi_2: y - z = -1$ и $\pi_3: x - z = a$, секу по правој l . Написати једначину добијене праве l у канонском облику. (2)

Решавањем система линеарних једначина добија се:

$$[A|\bar{A}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & a \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{array} \right] \implies r(A) = r(\bar{A}) = 2 \iff a = 0.$$

За $a = 0$ једначина праве $l: x - y = 1$, $y - z = -1$ у канонском облику биће:

$$l: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}.$$

7. Формулисати теорему о два полицајца за низове. Затим наћи $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos e^n}{\sqrt{n}}$. (1)

Теорема 4.6 на страни 163. Како је $-1 \leq \cos e^n \leq 1$, биће:

$$-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{\cos e^n}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}},$$

па је према наведеној теореди тражени лимес једнак нули.

8. Дефинисати појмове непрекидности и диференцијабилности функције у тачки x_0 . Затим дати пример функције која је непрекидна, али није диференцијабилна у тачки $x_0 = -1$. (2)

Дефиниције 5.18 на страни 197 и 6.1 на страни 214. Као пример можемо узети функцију

$$f(x) = |x + 1|.$$

9. Сопствене вредности симетричног линеарног оператора (симетричне матрице) су реални бројеви. Доказати. (3)

Теорема 2.36 на страни 105.

10. Показати да је скуп симетричних квадратних матрица реда n векторски простор (потпростор векторског простора $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$). Да ли исто важи за скуп свих регуларних матрица реда n ? Образложити одговор. (2)

Матрица $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ је симетрична ако је $A^T = A$. Означимо скуп симетричних матрица реда n са $\mathcal{S}$. Нека су $A, B \in \mathcal{S}$ и нека је $\lambda \in \mathbb{R}$. Тада:

$$(A+B)^T = A^T + B^T = A+B \implies A+B \in \mathcal{S}, \quad (\lambda A)^T = \lambda A^T = \lambda A \implies \lambda A \in \mathcal{S},$$

па је $\mathcal{S}$ потпростор векторског простора $V = \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, те је и сам векторски простор. Даље, како збир две регуларне матрице не мора бити регуларна матрица, други скуп нема структуру векторског простора.