

Inženjerska geodezija 1

PREDAVANJE

PROFILI I VERTIKALNE KRIVINE

dr Milutin Pejović, dipl.geod.inž.

mpejovic@grf.bg.ac.rs

Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet

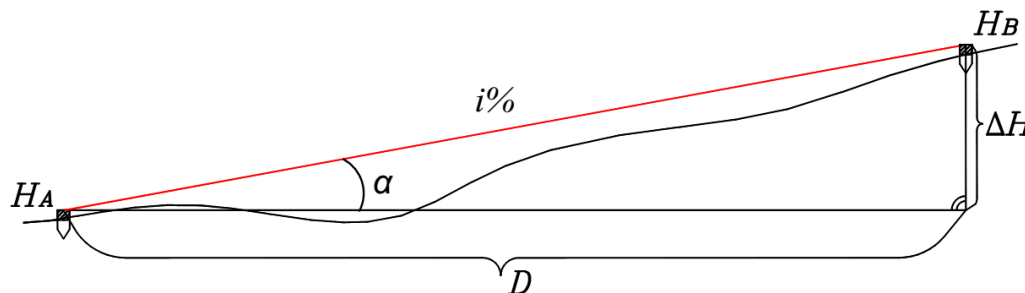
Odsek za geodeziju i geoinformatiku

Beograd, 22. Decembar 2023



PROJEKTOVANI NAGIB I NIVELETA

- Projektovani nagib definiše nepromenljivi pravac uspona i pada projektovane trase.
- Projektovani nagib definisan je visinama krajnjih tačaka i međusobnim horizontalnim rastojanjem.

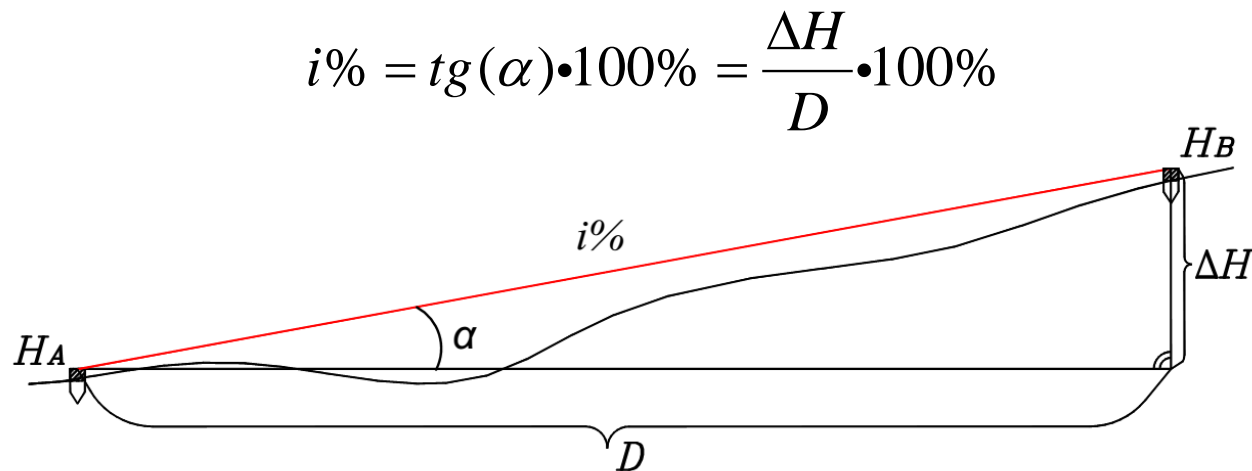


Niveleta – uzudžna linija koja definiše trasu (puta, pruge, cevovoda itd.) u visinskom smislu

PROJEKTOVANI NAGIB (PAD)

Projektovani nagib (pad) izražen u procentima obično se koristi da označavanje „blagih“ padova, koji su karakteristični za podužne trase objekata (puteva, železnica, cevovoda itd.).

Podužni nagib (pad) predstavlja tangens ugla koji zahvataju pravac nagiba u odnosu na horizontalnu ravan.



PROJEKTOVANI PAD (NAGIB)

Postoji konvencija označavanja smera projektovanog pada (nagiba) :

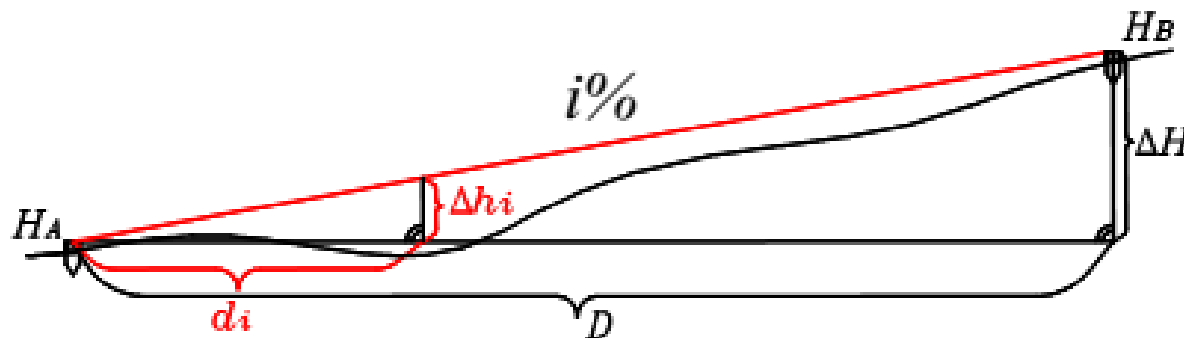
- Negativnim nagibom ($-i\%$) označava se pad projektovanog pravca i pravcu rasta stacionaže
- Pozitivnim nagibom ($+i\%$) označava se uspod projektovanog pravca i pravcu rasta stacionaže;

Nije retko da se uz vrednost projektovanog nagiba dodaje strelica iznad vrednosti nagiba ($i\%$). 

- Strelica označava smer pada terena pod određenim nagibom (pravac toka vode).

RAČUNANJE VISINA TAČKA NA PROJEKTOVANOM NAGIBU

- Projektovani pad (Nagib) definiše se visinama dve tačke i horizontalnim rastojanjem između tačaka.



$$\Delta H = H_B - H_A$$

$$i\% = \frac{\Delta H}{D} \cdot 100\%$$

$$\Delta h_i = \frac{i\%}{100\%} \cdot d_i = \frac{\Delta H}{D} \cdot d_i$$

$$H_i = H_A + \Delta h_i = H_A + \frac{\Delta H}{D} \cdot d_i$$

H_i - kota tačke na liniji projektovanog nagiba na proizvoljnom rastojanju

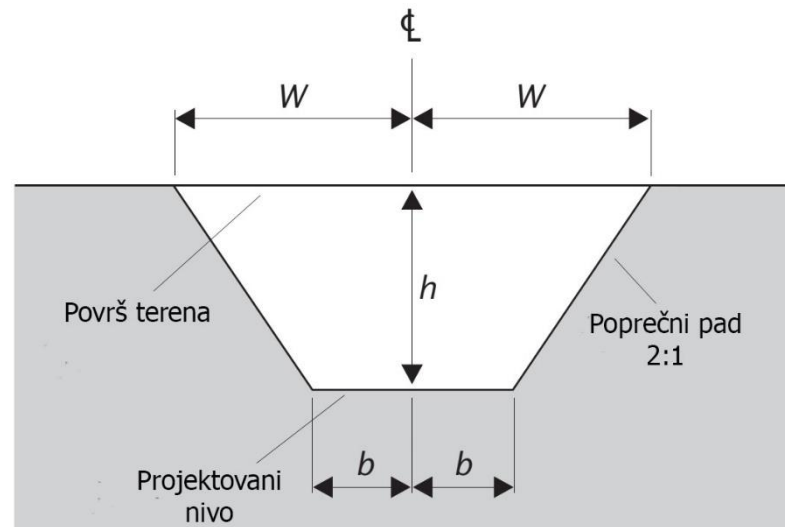
H_A, H_B - kota početne, odnosno krajnje tačke linije projektovanog nagiba

D - horizontalno rastojanje između krajnjih tačaka linije projektovanog nagiba

d_i - horizontalno rastojanje između tačke za koju se računa kota i početne tačke linije projektovanog nagiba

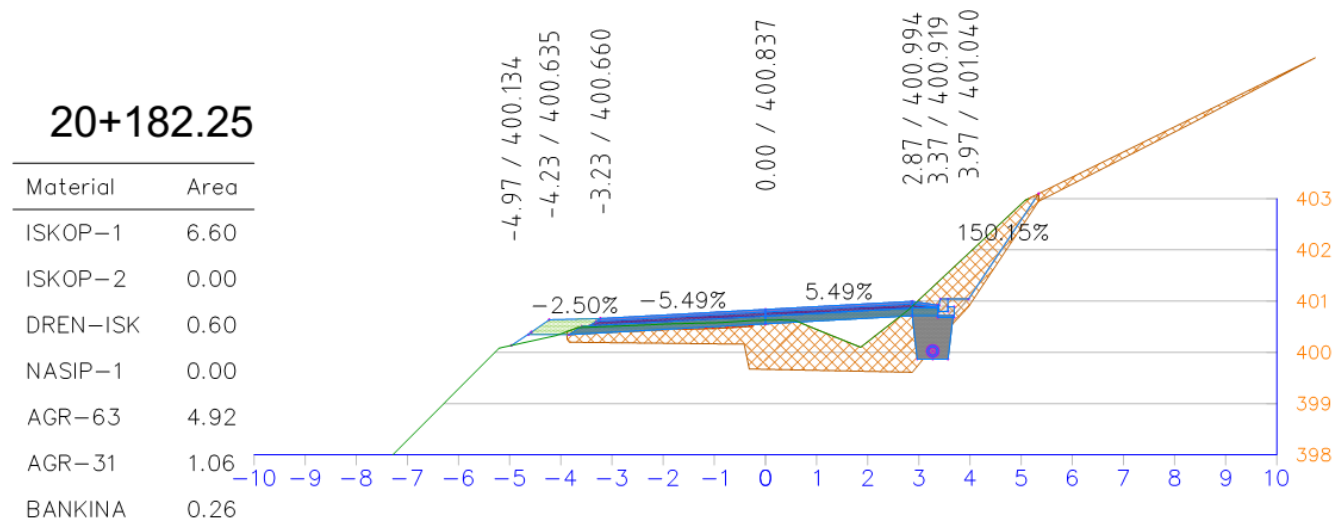
PROJEKTOVANI NAGIB (PAD)

Za označavanje strimijih nagiba obično se koristi „odnosni“ prikaz nagiba, na primer 1:3, 1:2, 1:0.5 itd. U tom slučaju prvi broj se odnosi na visinski razliku, a drugi broj na horizontalnu dužinu.



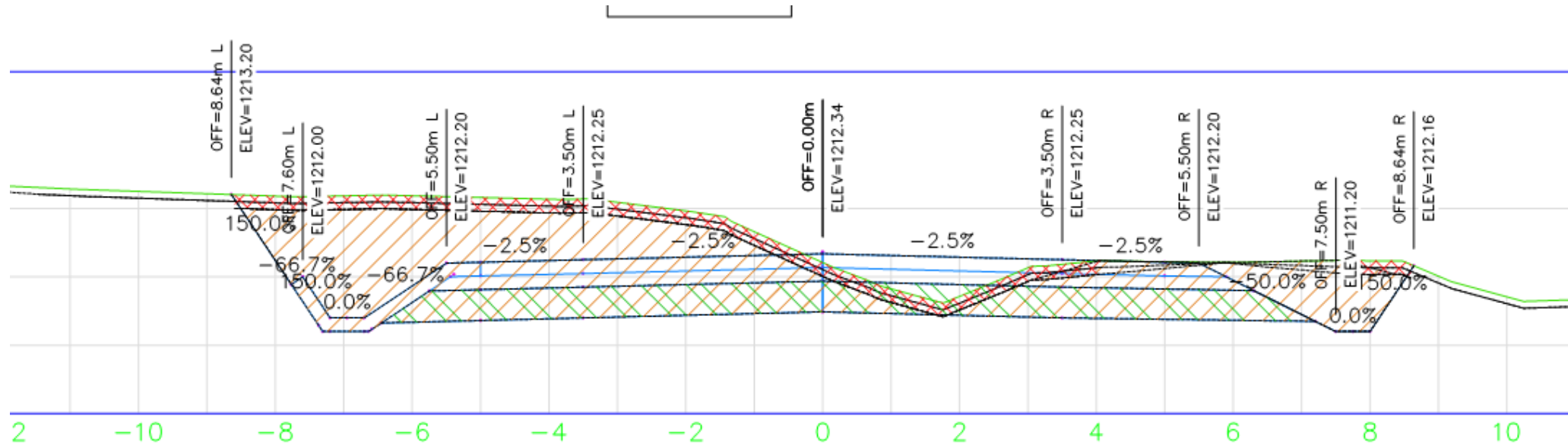
PROJEKTOVANI NAGIB (PAD)

Nije retkost da se procentualni zapis koristi i za strmiije nagibe

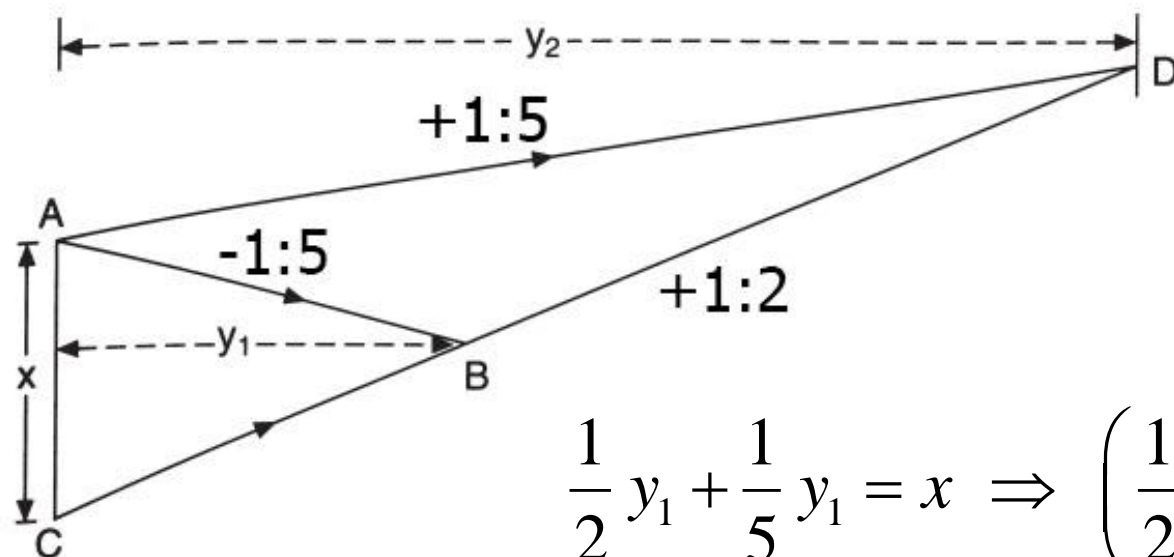


PROJEKTOVANI NAGIB (PAD)

Nije retkost da se procentualni zapis koristi i za strmiije nagibe



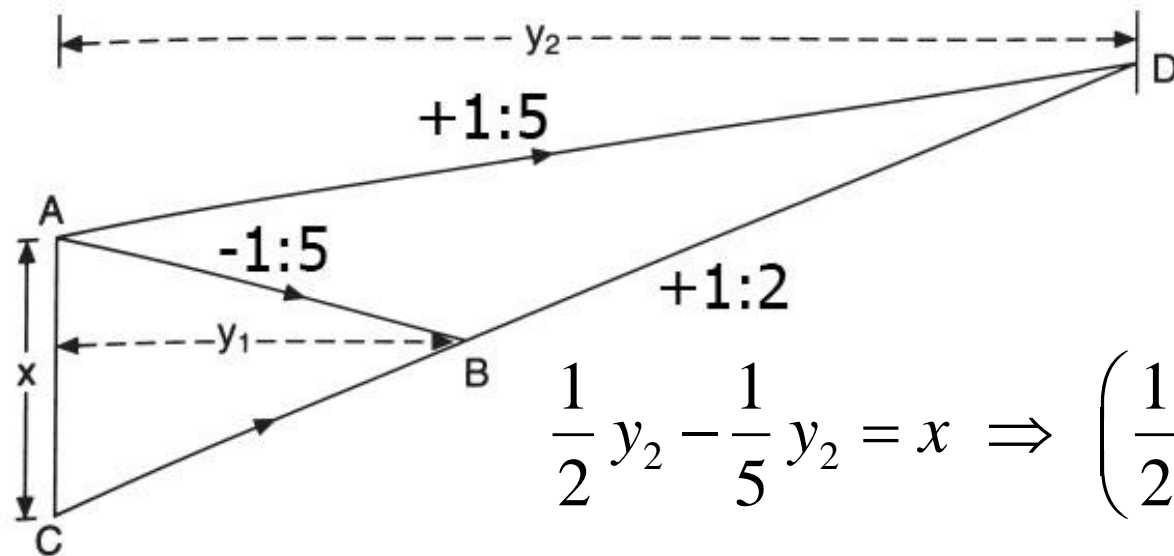
RAČUNANJE POVRŠINA I ZAPREMINA



$$\frac{1}{2} y_1 + \frac{1}{5} y_1 = x \Rightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) \cdot y_1 = x \Rightarrow y_1 = \frac{x}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right)} = \frac{10x}{7}$$

$$H_B = H_C + \frac{1}{2} \cdot y_1$$

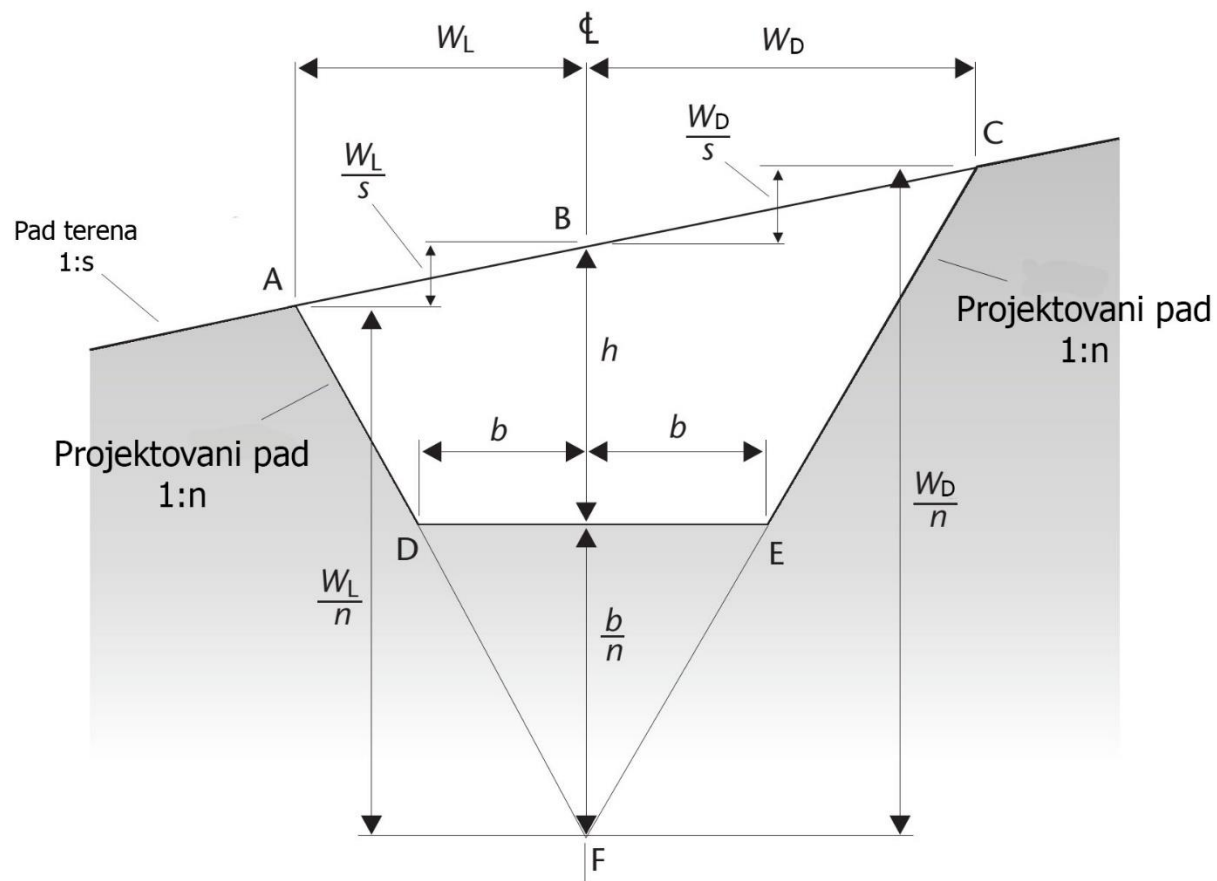
RAČUNANJE POVRŠINA I ZAPREMINA



$$\frac{1}{2} y_2 - \frac{1}{5} y_2 = x \Rightarrow \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) \cdot y_2 = x \Rightarrow y_2 = \frac{x}{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right)} = \frac{10x}{3}$$

$$H_D = H_C + \frac{1}{2} \cdot y_2$$

PROJEKTOVANI NAGIB (PAD)



Traži se:

WD = Širina desne strane terena

WL = Širina leve strane terena

h = Visinska razlika između terena i projektovane visine ose

1:n = Projektovani poprečni pad

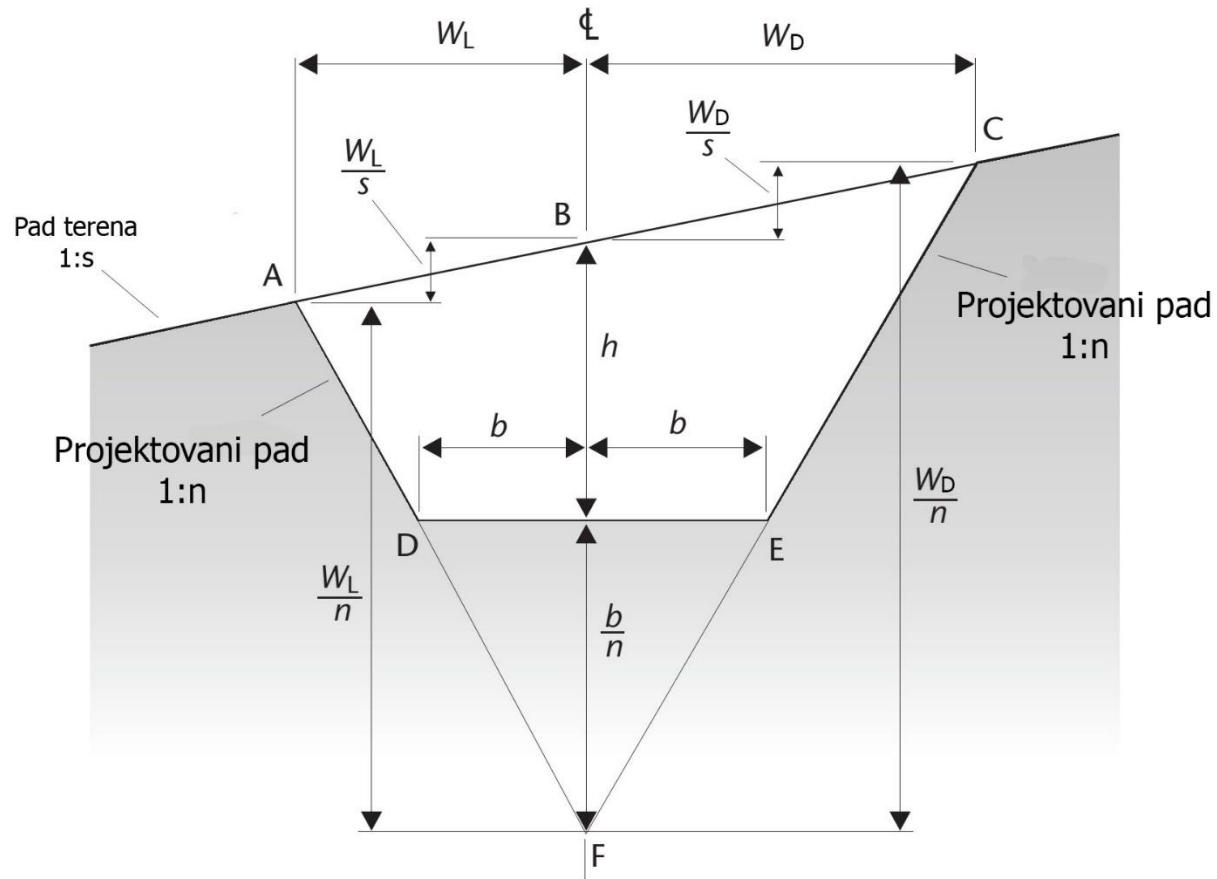
1:s = Poprečni pad terena

$$B - F = \frac{b}{n} + h = \frac{1}{n} \cdot W_D - \frac{1}{s} \cdot W_D$$

$$\Rightarrow \frac{b + nh}{n} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{s} \right) \cdot W_D$$

$$\Rightarrow \frac{b + nh}{n} = \frac{nh + b}{ns} = \frac{s(b + nh)}{(s - n)}$$

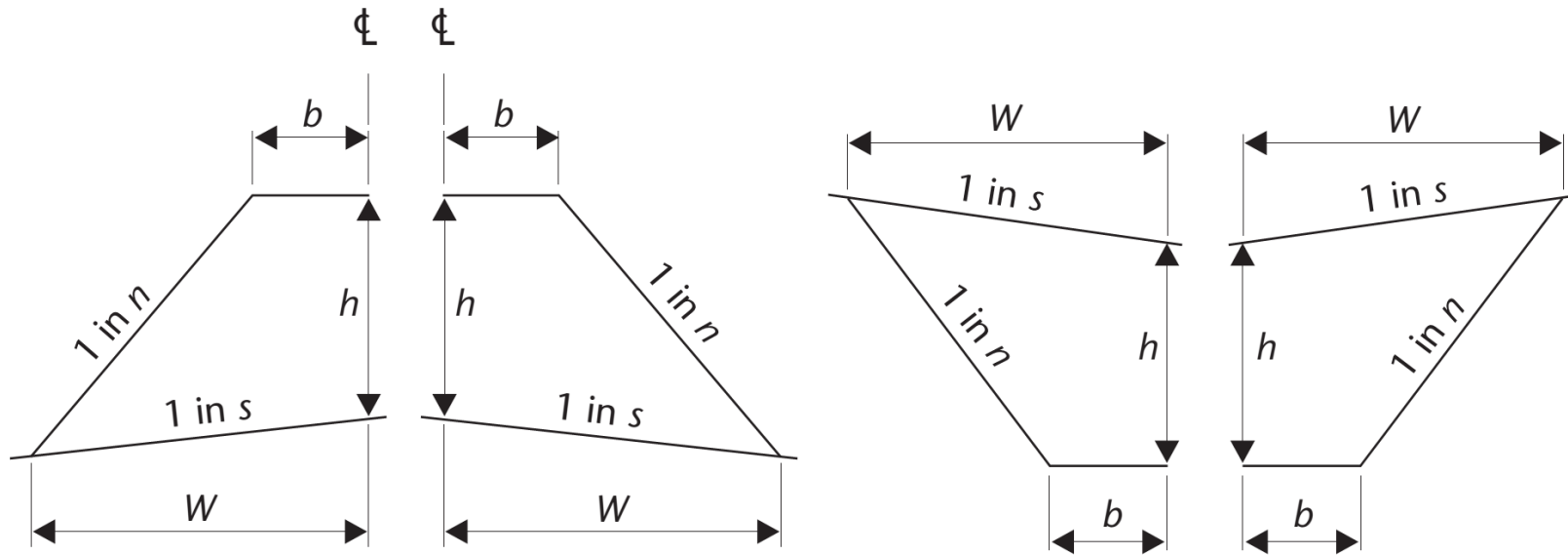
PROJEKTOVANI NAGIB (PAD)



$$W_D = \frac{s(b + nh)}{(s - n)}$$

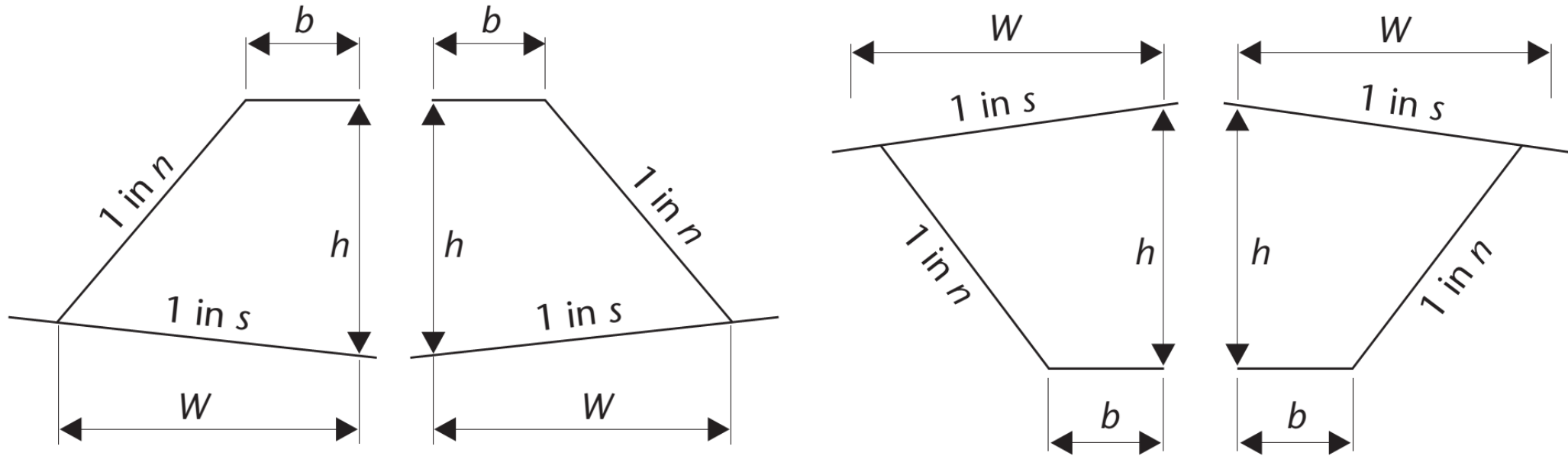
$$W_L = \frac{s(b + nh)}{(s + n)}$$

PROJEKTOVANI NAGIB (PAD)



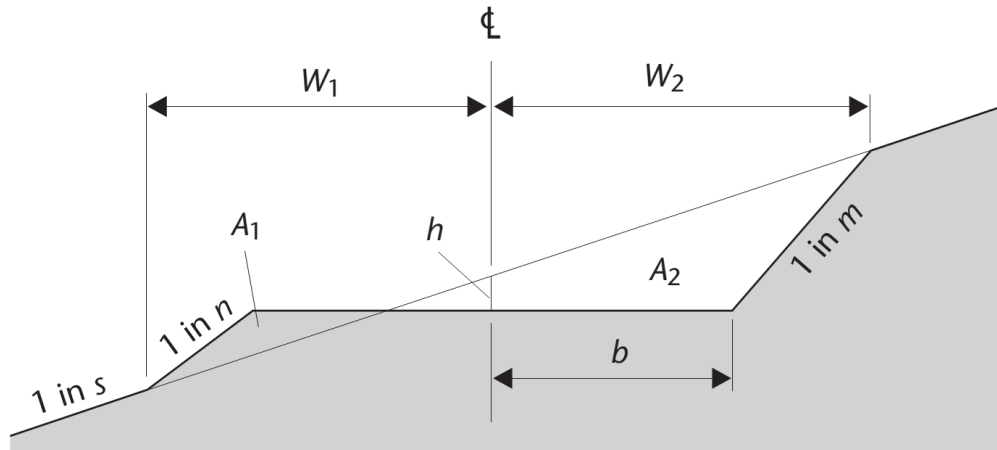
$$W = \frac{s(b + nh)}{(s - n)}$$

PROJEKTOVANI NAGIB (PAD)



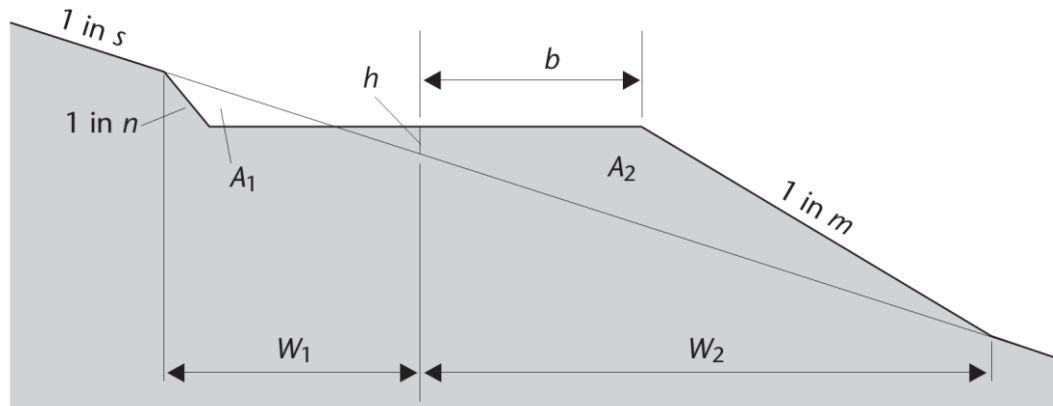
$$W = \frac{s(b + nh)}{(s + n)}$$

PROJEKTOVANI NAGIB (PAD)

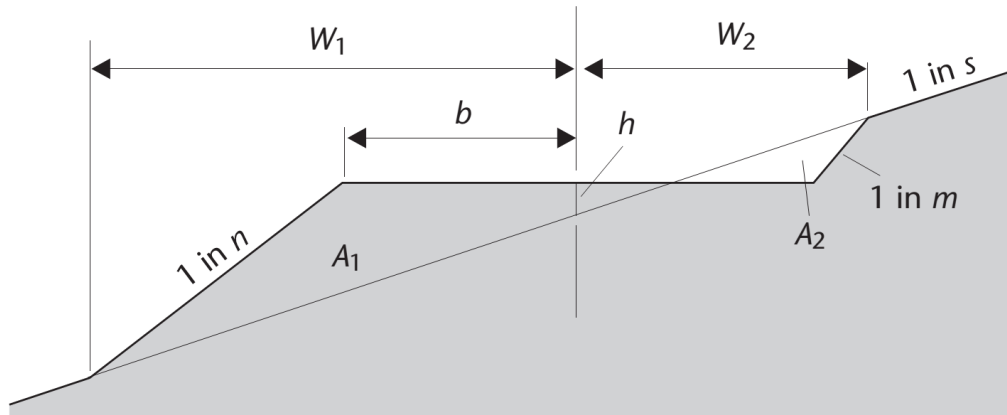


$$W_1 = \frac{s(b - nh)}{(s - n)}$$

$$W_2 = \frac{s(b + mh)}{(s - m)}$$

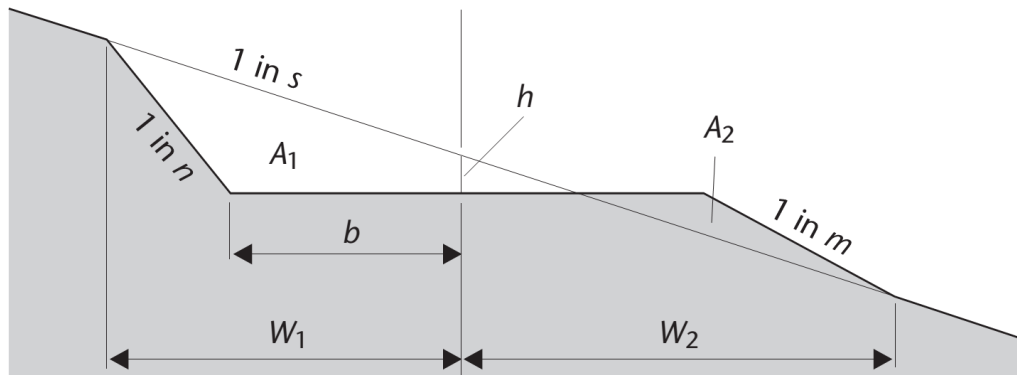


PROJEKTOVANI NAGIB (PAD)

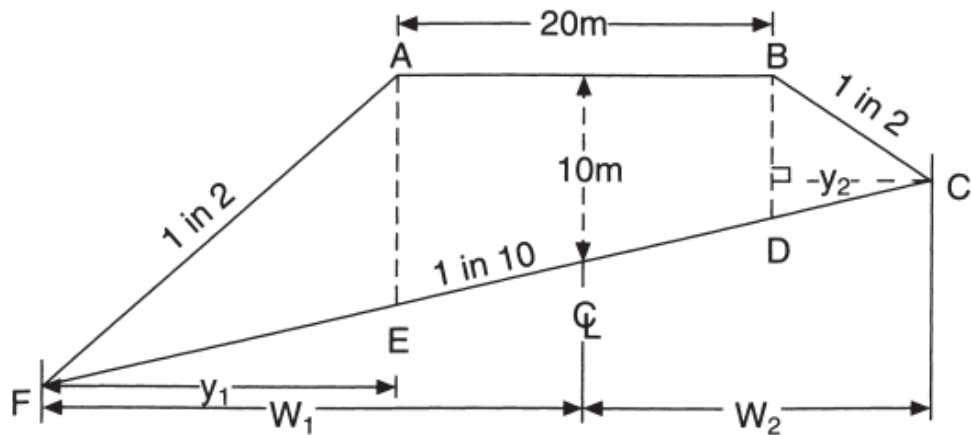


$$W_1 = \frac{s(b + nh)}{(s - n)}$$

$$W_2 = \frac{s(b - mh)}{(s - m)}$$

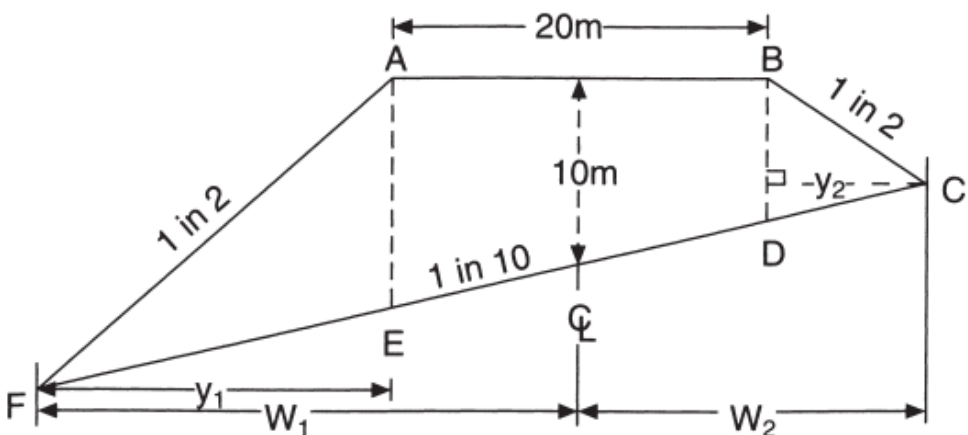


RAČUNANJE POVRŠINA I ZAPREMINA



Širina puta je 20 m, nagib postojećeg terena = 1:10 (10%).
Bočni nagibi su 1 na 2 (50%).
Visina tačke na osi je 10m.

RAČUNANJE POVRŠINA I ZAPREMINA



Širina puta je 20 m, nagib postojećeg terena = 1:10 (10%).

Bočni nagibi su 1 na 2 (50%).

Visina tačke na osi je 10m.

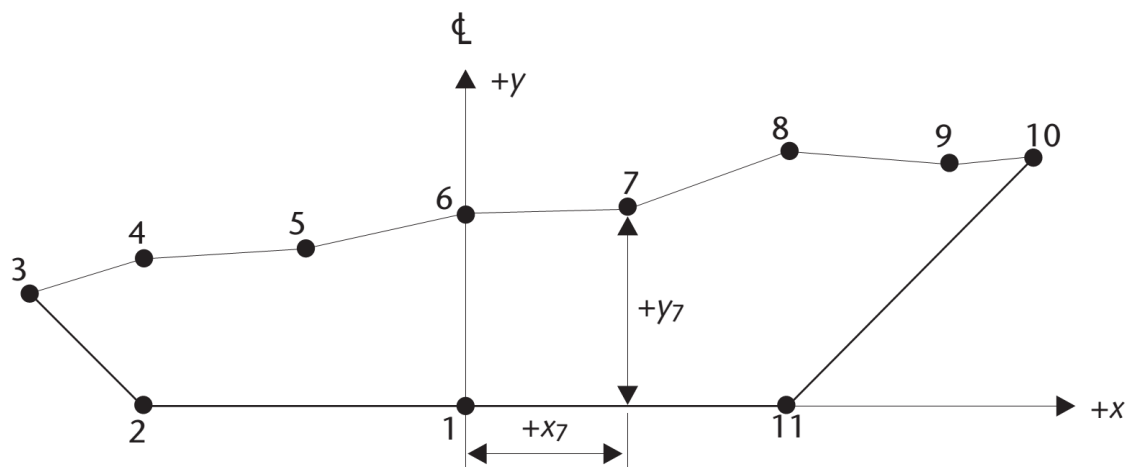
Pošto je horizontalna udaljenost od središnje linije do tačke A(E) 10 m, a nagib terena 10%, rastojanje AE će biti 1 m veće od visine tačke na osi, dok će BD biti 1 m manje. Dakle, AE = 11 m, a BD = 9 m.

Potrebne je izračunati y_1 i y_2 :

$$1/2 - 1/10 = 4/10, \quad \text{then} \quad y_1 = (4/10)^{-1} \times AE = 11 \times 10/4 = 27.5 \text{ m}$$

$$1/2 + 1/10 = 6/10, \quad \text{then} \quad y_2 = (6/10)^{-1} \times BD = 9 \times 10/6 = 15.0 \text{ m}$$

RAČUNANJE POVRŠINA I ZAPREMINA



Različiti tipovi poprečnih preseka koji su prethodno razmatrani pretpostavljali su da je površina terena ili ravna ili sa ravnomernim nagibom celom širinom preseka ili do položaja predviđene centralne linije.

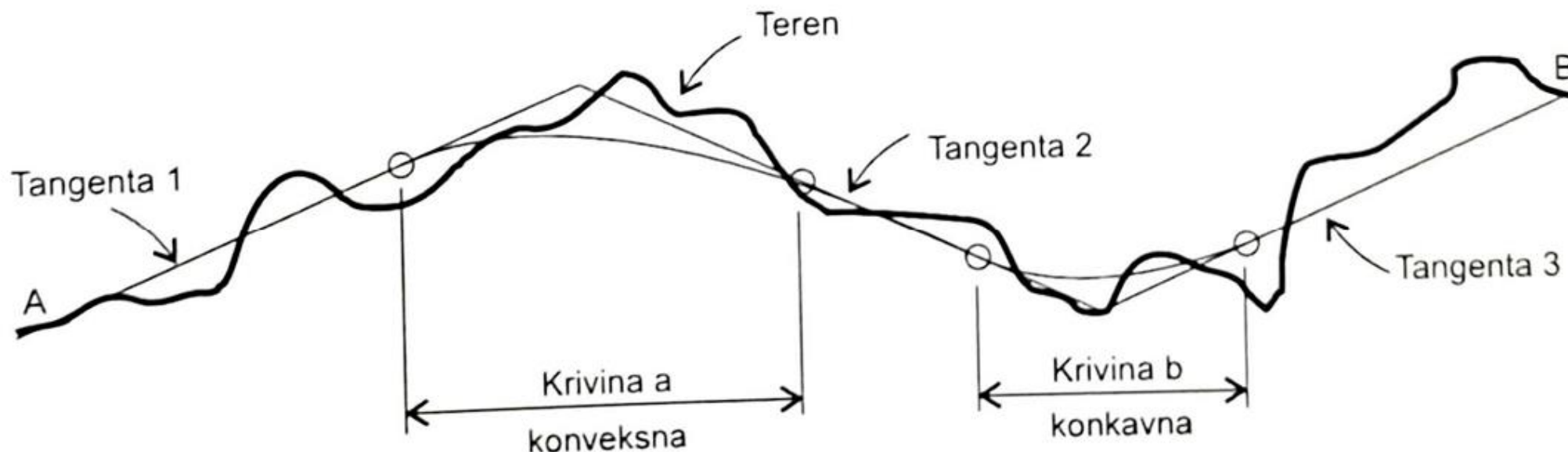
Međutim, u praksi je češće da površina terena nepravilno talasa dok prelazi preko preseka.

Kod takvih nepravilnih preseka nije moguće izvesti formule za bočne širine i površine. Umesto toga, bočne širine i plan širine mogu se izmeriti sa crteža poprečnog preseka.

NIVELETA

NIVELETA je uzdužna linija koja definiše visinski tok trase objekta (puta, pruge, kanala, cevovoda itd.)

Slično kao kod horizontalne trase, visinska trasa se sastoji od tangenčnih pravaca koji su definisani nagibima i vertikalnih krivina.



Prilikom projektovanja osovine saobraćajnice u visinskom smislu potrebno je uzeti u obzir sledeće:

- usklađivanje sa profilom terena;
- izjednačenje zapremine iskopanog i nasutog materijala;
- obezbeđenje adekvatne drenaže;
- poštovanje dozvoljenih nagiba;

Obezbeđenje ukrštanja sa drugim saobraćajnicama. Vertikalne krivine treba da:

- budu prilagođene tangencijalnim segmentima nivelete;
- budu dovoljne dužine kako bi obezbedile konformnu vožnju;
- obezbede preglednost i bezbednost.

TIPOVI VERTIKALNIH KRIVINA

- Vertikalna krivina kružnog oblika
- Vertikalna krivina oblika parabole

PROJEKTOVANI PAD (NAGIB)

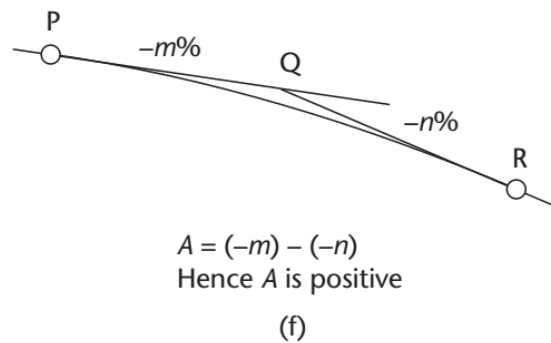
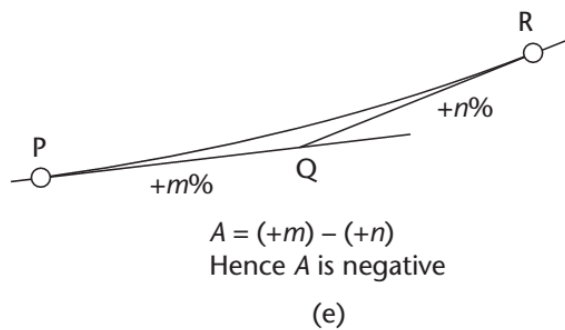
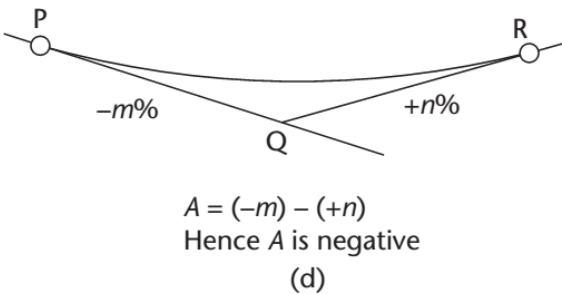
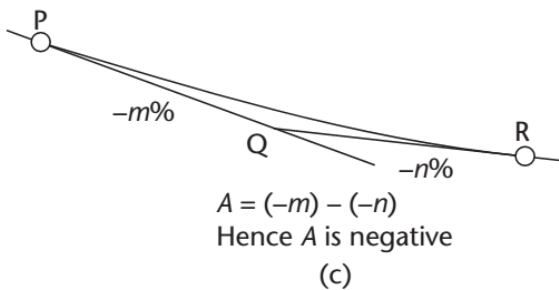
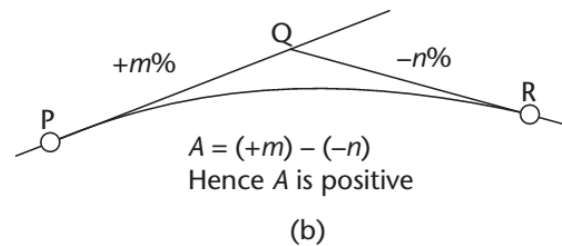
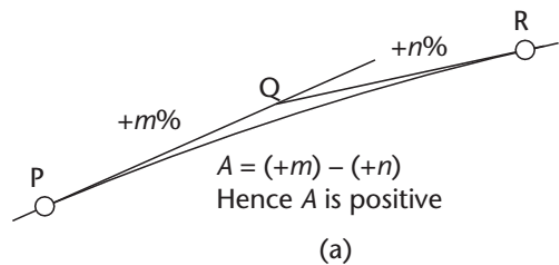
Postoji konvencija označavanja smera projektovanog pada (nagiba) :

- Negativnim nagibom ($-i\%$) označava se pad projektovanog pravca i pravcu rasta stacionaže
- Pozitivnim nagibom ($+i\%$) označava se uspod projektovanog pravca i pravcu rasta stacionaže;

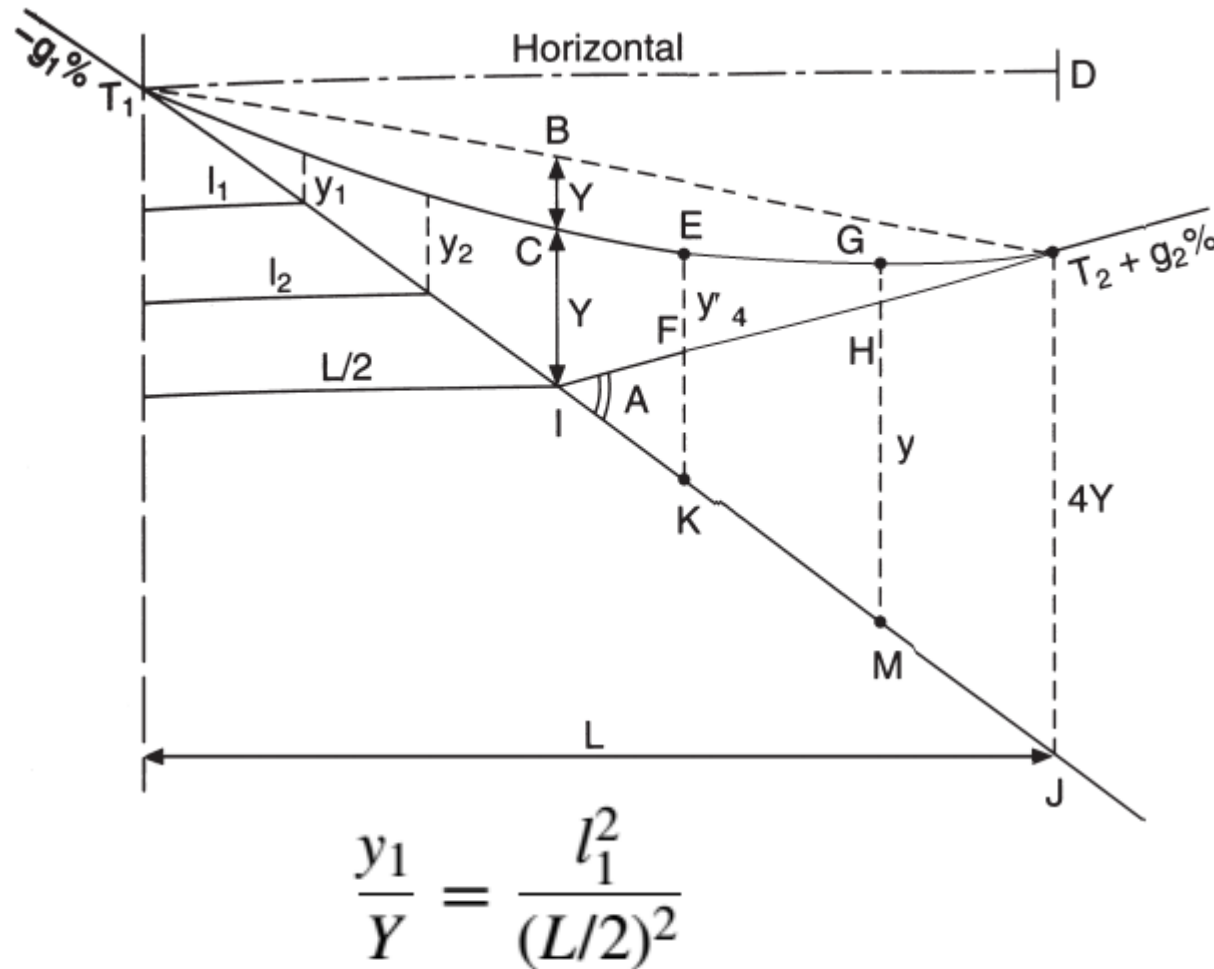
Nije retko da se uz vrednost projektovanog nagiba dodaje strelica iznad vrednosti nagiba ($i\%$). 

- Strelica označava smer pada terena pod određenim nagibom (pravac toka vode).

TIPOVI VERTIKALNIH KRIVINA



VERTIKALNA KRIVINA OBLIKA PARABOLE



Poželjni maksimalni nagibi za dizajn vertikalnih krivina kod puteva je do 4%.

- podužni nagibi manji od 0,8% deluju kao da su ravni i praktično su neprimetni
- podužni nagibi od 1% do 3% su prepoznatljivi i primetni
- podužni nagibi od 4% do 8% su vizuelno veoma strmi

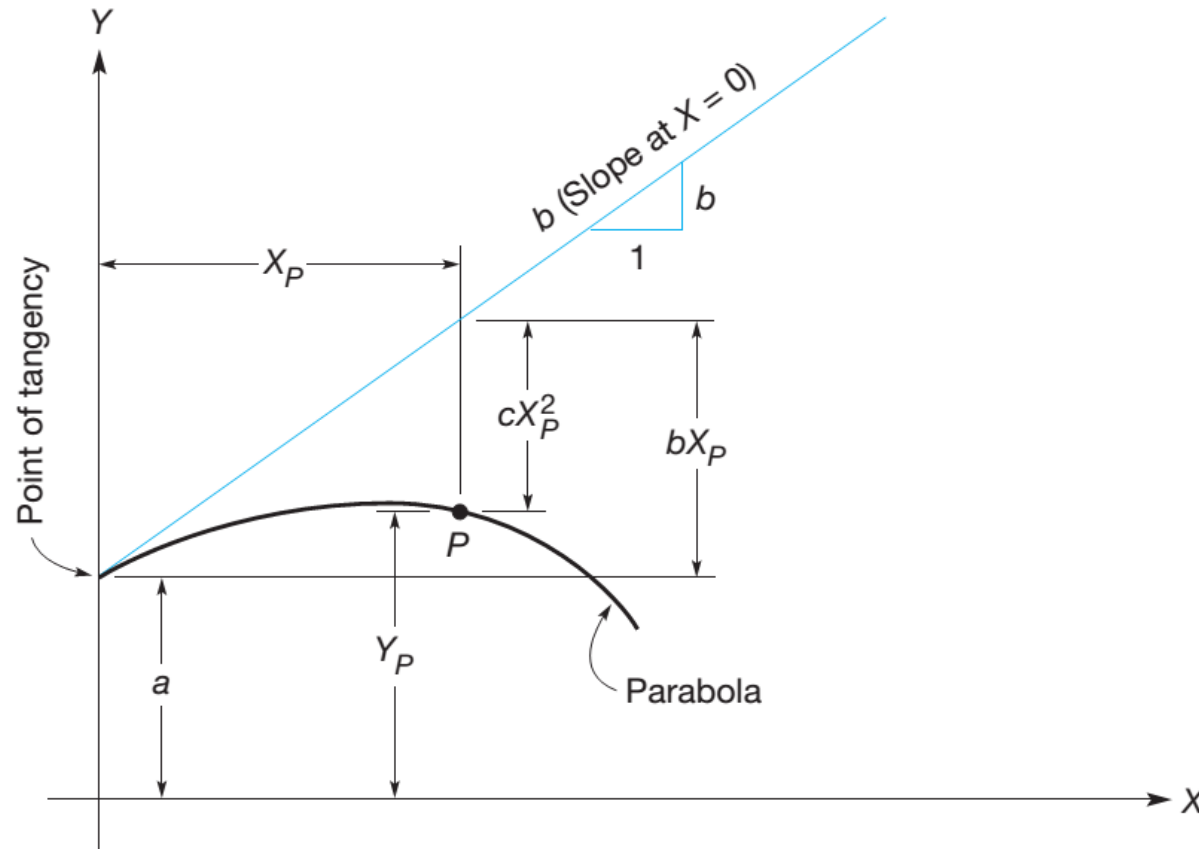
Zbog blagog nagiba, uvode se sledeće aproksimacije vertikalne krivine koje pojednostavljaju proračun bez značajnih odstupanja:

- Udaljenost $T1-D = T1-B-T2 = T1-C-T2 = (T1-I + I-T2)$. Ovo je vrlo važno jer znači da se sve udaljenosti mogu smatrati horizontalnim, kako u proračunu, tako i pri trasiranju vertikalnih krivina.
- Krivina je iste dužine sa obe strane tačke I.

$$T1-C = C-T2 = T1-I = IT2 = L/2.$$

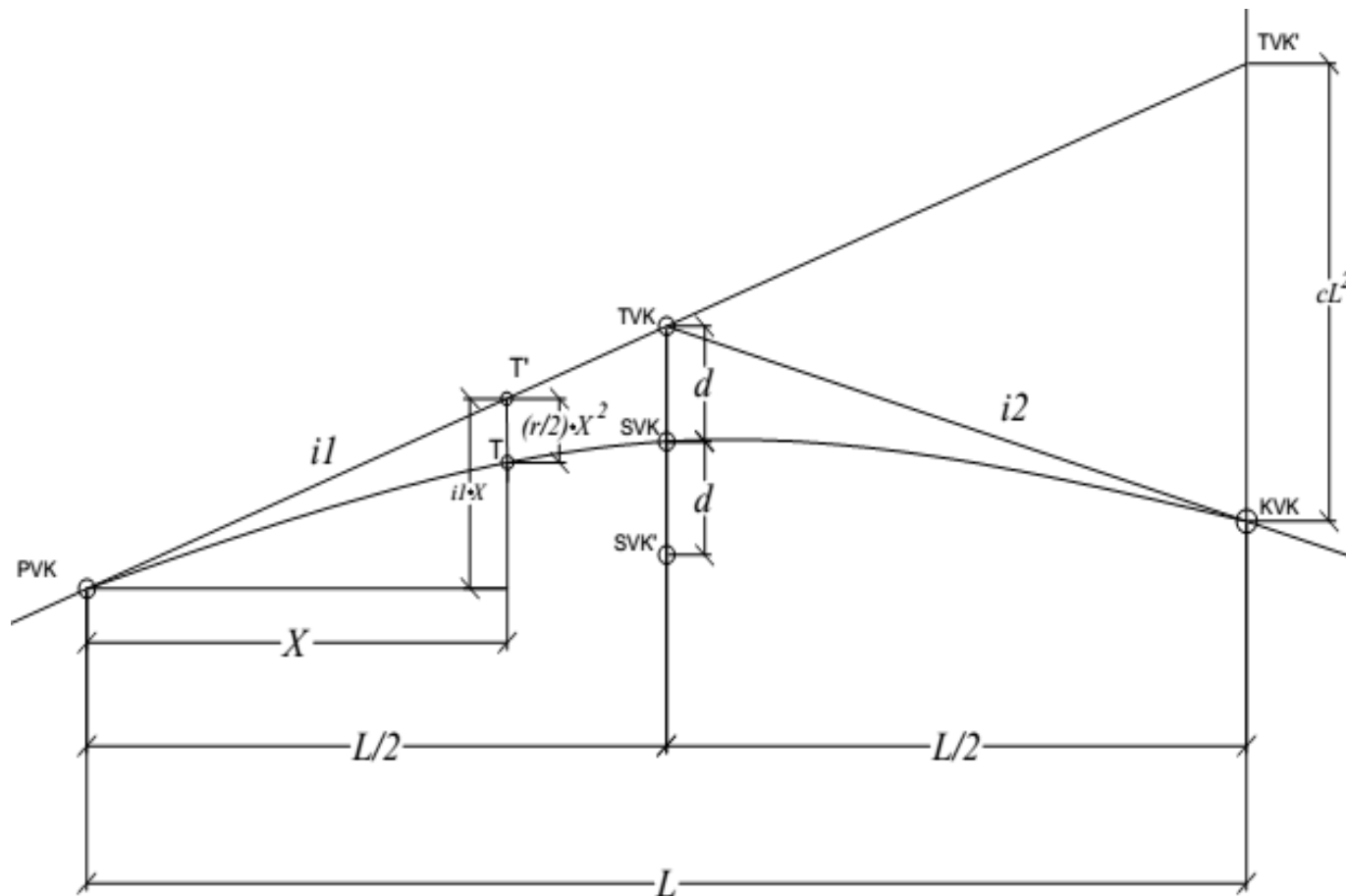
- $BC = CI = Y$ (srednje odstopanje).
- Iz sličnih trouglova $T1-B-I$ i $T1-T2-J$, ako je $B-I = 2Y$, tada je $T2-J = 4Y$. $4Y$ predstavlja vertikalno odstupanje između dva nagiba na polovini dužine krivine ($L/2$) i, prema tome, jednako je $AL/200$.
- Osnovna jednačina za $y = C \cdot l^2$ i parabolu je:

OPŠTI OBLIK VERTIKALNE KRIVINE OBLIKA PARABOLE



$$Y_P = a + bX_P + cX_P^2$$

OPŠTI OBLIK KRIVINE OBLIKA PARABOLE



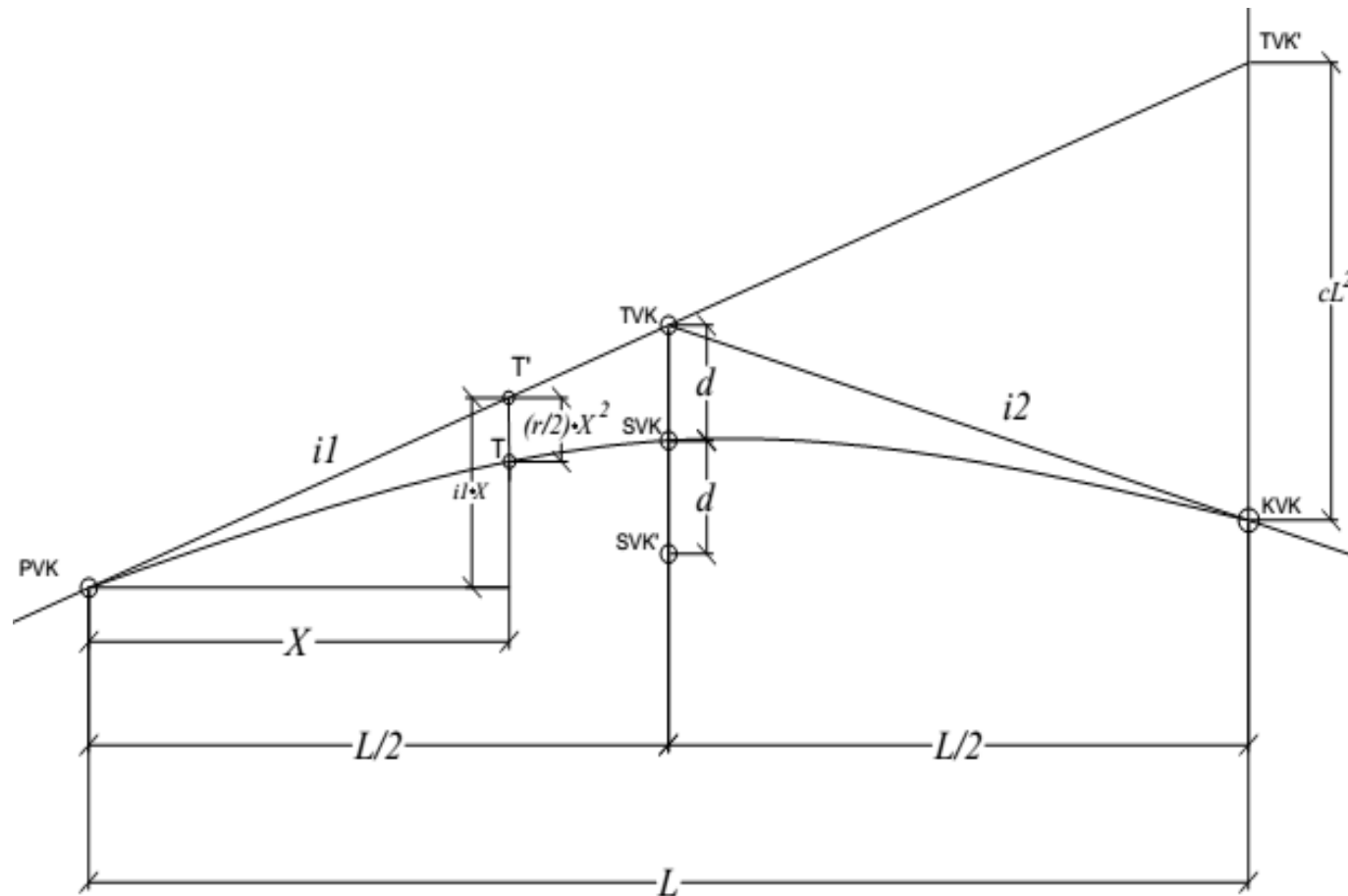
$$cL^2 = i_1 \left(\frac{L}{2} \right) + i_2 \left(\frac{L}{2} \right) - i_1 L \Rightarrow c = \frac{i_2 - i_1}{2L}$$

$$H = H_{PVK} + i_1 \cdot X + \left(\frac{i_2 - i_1}{2L} \right) X^2$$

$$r = \frac{i_2 - i_1}{L} \quad \text{- Stopa promene skretnog ugla}$$

$$H = H_{PVK} + i_1 \cdot X + \left(\frac{r}{2}\right) X^2$$

RAČUNANJE VISINA PROIZVOLJNIH TAČAKA NA KRIVINI



$$H_T = \overbrace{H_{PVK} + i_1 \cdot X}^{H_{T'}} + c \cdot X^2$$

$$c = \frac{i_2 - i_1}{2 \cdot L} \quad r = \frac{i_2 - i_1}{L}$$

$$H_T = H_{PVK} + i_1 \cdot X + \left(\frac{r}{2}\right) \cdot X^2$$

PRIMER RAČUNANJA VISINA TAČAKA NA KRIVINI

Dati su nagibi tangenti vertikalne krivine $i_1 = -3,629\%$ i $i_2 = 0,151\%$, Stacionaža temena je $5 + 265,00$ m, a visina $350,520$ m. Dužina vertikalne krivine oblika parabole je 240 m. Potrebno je izračunati visine tačaka na svakih 40 m.

$$\text{VPI Station} = 5 + 265$$

$$-L/2 = 120$$

$$\text{BVC Station} = 5 + 145$$

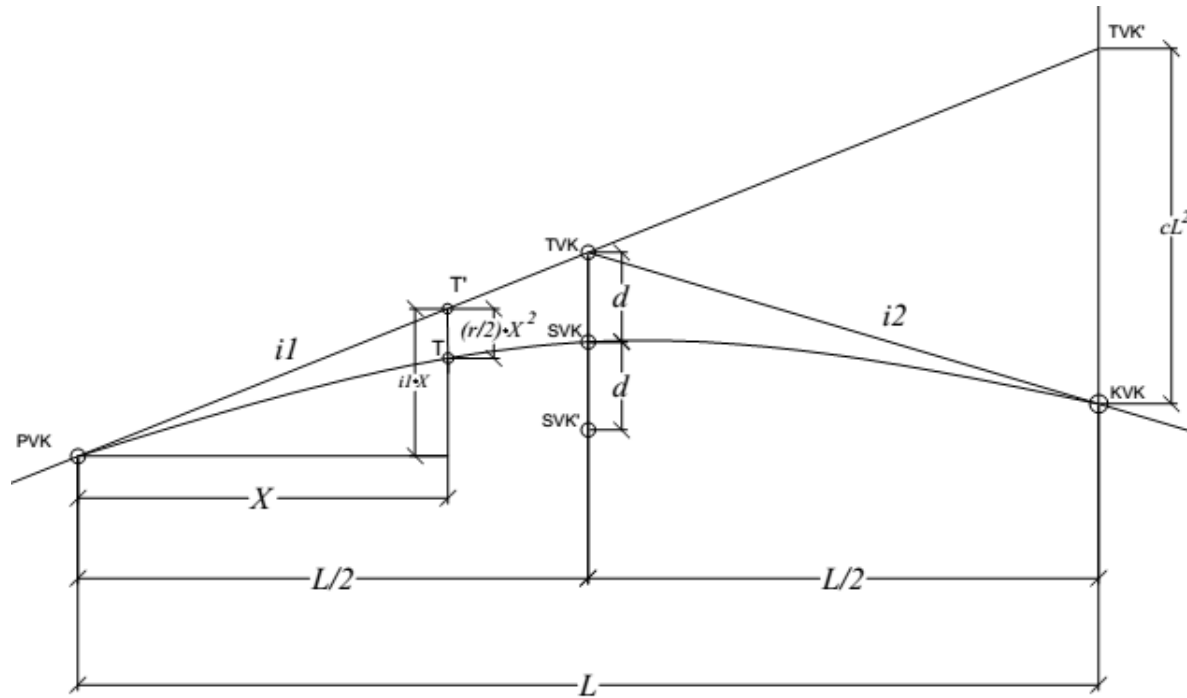
$$+L = 240$$

$$\text{EVC Station} = 5 + 385$$

$$\text{Elev}_{\text{BVC}} = 350.520 + 3.629(120/100) = 354.875$$

Hpvk	354.875								
i1	-3.629								
i2	0.151								
r=	0.000158								
	Stacionaža			xi	i1 · xi	r/2 · xi ²	Hi	Δ1	Δ2
KVK	5	+	385	240	-8.710	4.536	350.701		
	5	+	360	215	-7.802	3.640	350.713	-0.223	0.252
	5	+	320	175	-6.351	2.412	350.936	-0.475	0.252
	5	+	280	135	-4.899	1.435	351.411	-0.727	0.252
	5	+	240	95	-3.448	0.711	352.138	-0.979	0.252
	5	+	200	55	-1.996	0.238	353.117	-1.231	
	5	+	160	15	-0.544	0.018	354.348		
PVK	5	+	145	0	0.000	0.000	354.875		

RAČUNANJE SREDINE VERTIKALNE KRIVINE



$$H_{SVK'} = (H_{PVK} + H_{KVK}) / 2$$

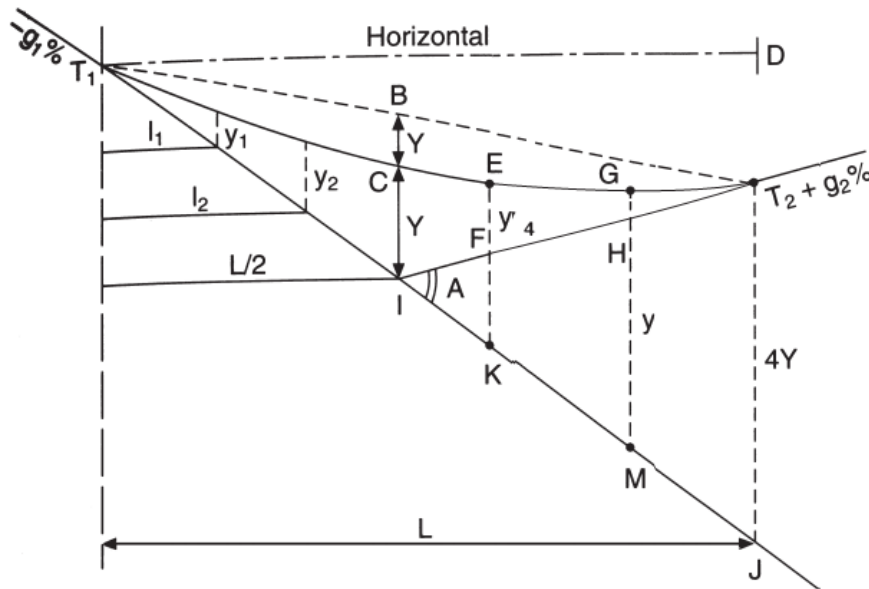
$$2d = H_{TVK} - H_{SVK'}$$

$$d = \frac{H_{TVK} - H_{SVK'}}{2}$$

$$H_{SVK} = H_{TVK} - d$$

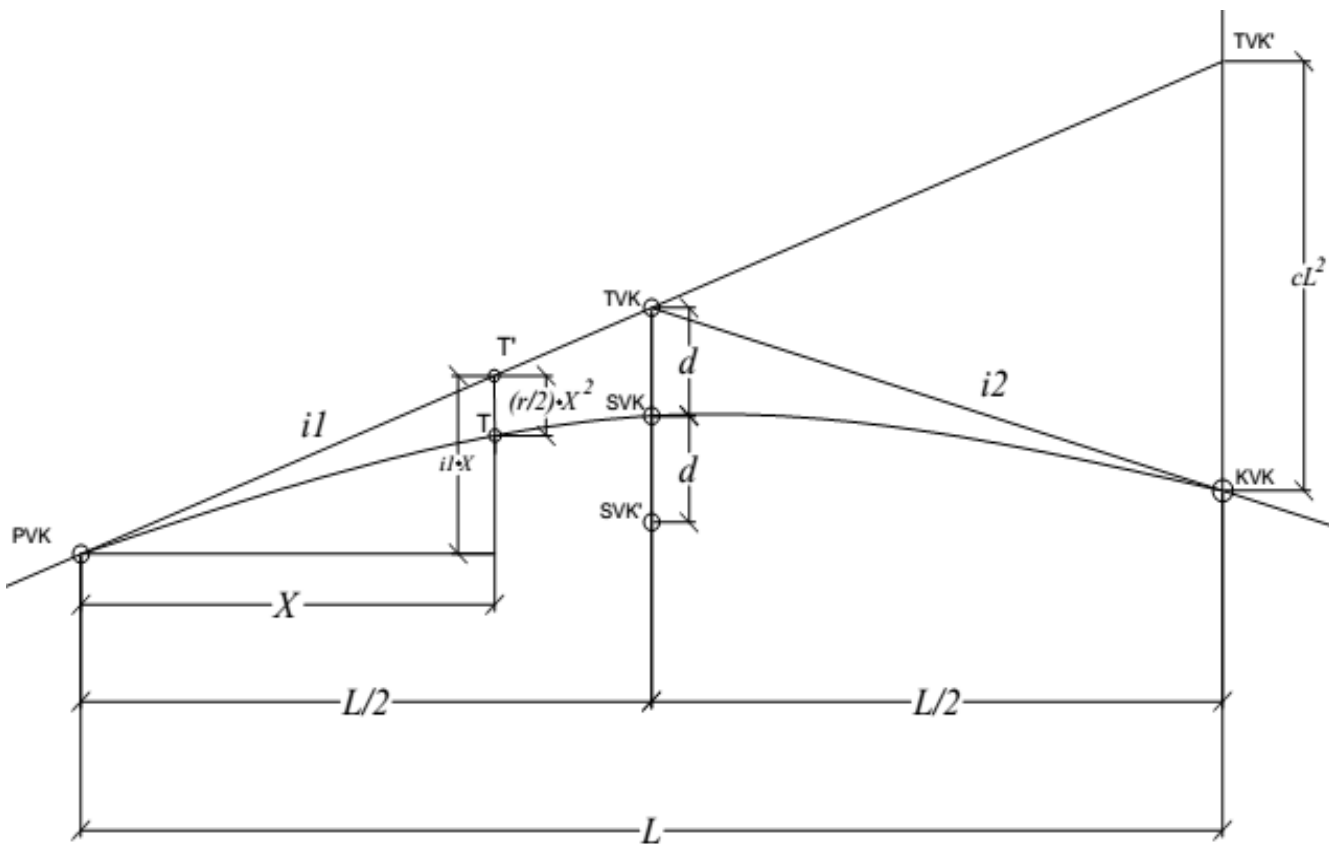
RAČUNANJE VISINA NA OSNOVU PROPORCIJA

Vertikalna udaljenja od tangente do parabole su proporcionalna kvadratima udaljenosti od početka krivine.



$$\frac{y_1}{Y} = \frac{l_1^2}{(L/2)^2} \Rightarrow y_1 = Y \cdot \frac{l_1^2}{(L/2)^2}$$

RAČUNANJE VISINA NA OSNOVU PROPORCIJA



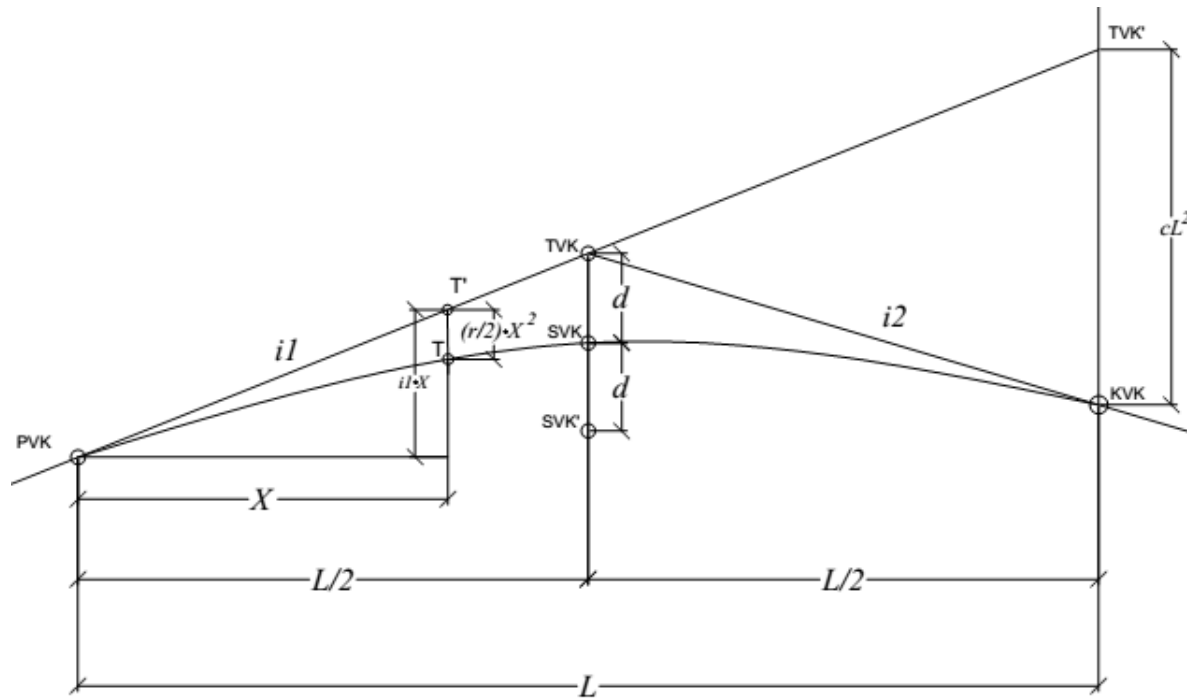
Izračunavanje vertikalnog udaljenja u sredini krivine, a zatim izračunavanje vertikalnog udaljenja na bilo kojoj drugoj udaljenosti X od početka krivine moguće je dobiti prema proporciji koristeći sledeću formulu:

$$TT' = \frac{r}{2} \cdot X^2 = Y_T \quad \frac{Y_T}{X_T^2} = \frac{d}{(L/2)^2}$$

$$\frac{Y_T}{d} = \frac{X_T^2}{(L/2)^2} \quad \Rightarrow \quad Y_T = d \cdot \left(\frac{X_T}{L/2} \right)^2$$

$$\Rightarrow H_T = H_{PVK} + i \cdot X_T + \underbrace{d \cdot \left(\frac{X_T}{L/2} \right)^2}_{Y_T}$$

RAČUNANJE SREDINE VERTIKALNE KRIVINE



$$\frac{(TT')}{X^2} = \frac{d}{\left(\frac{L}{2}\right)^2}$$

$$TT' = \left(\frac{X}{\frac{L}{2}}\right)^2 \cdot d$$

RAČUNANJE NAJVIŠE I NAJNIŽE TAČKE KRIVINE

Da bi se ispitali uslovi odvodnjavanja, eventualna rastojanja ispod nadzemnih konstrukcija, pokrivenost podzemnih instalacija ili vidljivost duž vertikalne krivine, može biti neophodno odrediti visinu i lokaciju najviše ili najniže tačke vertikalne krivine. Na tim tačkama tangenta krivine će biti horizontalna, a njen nagib će biti jednak nuli. Na osnovu ove činjenice, izjednačavanjem izvoda funkcije krive sa nulom, dobija se:

$$X_{\max/\min} = \frac{i_1 \cdot L}{i_1 - i_2}$$

DIZAJN VERTIKALNE KRIVINE UZ USLOV FIKSNE VISINE NA ODREĐENOJ TAČKI

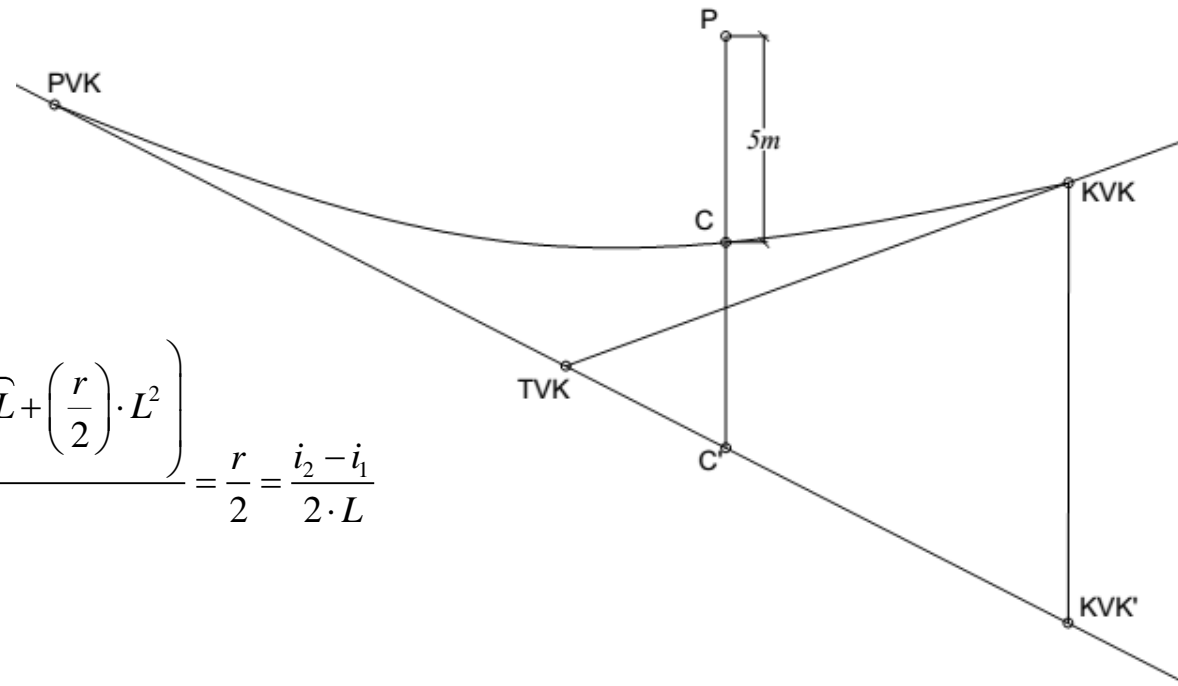
$$H_{C'} = H_{PVK} - l_x \cdot i_1$$

$$H_C = H_P - \Delta H(5m)$$

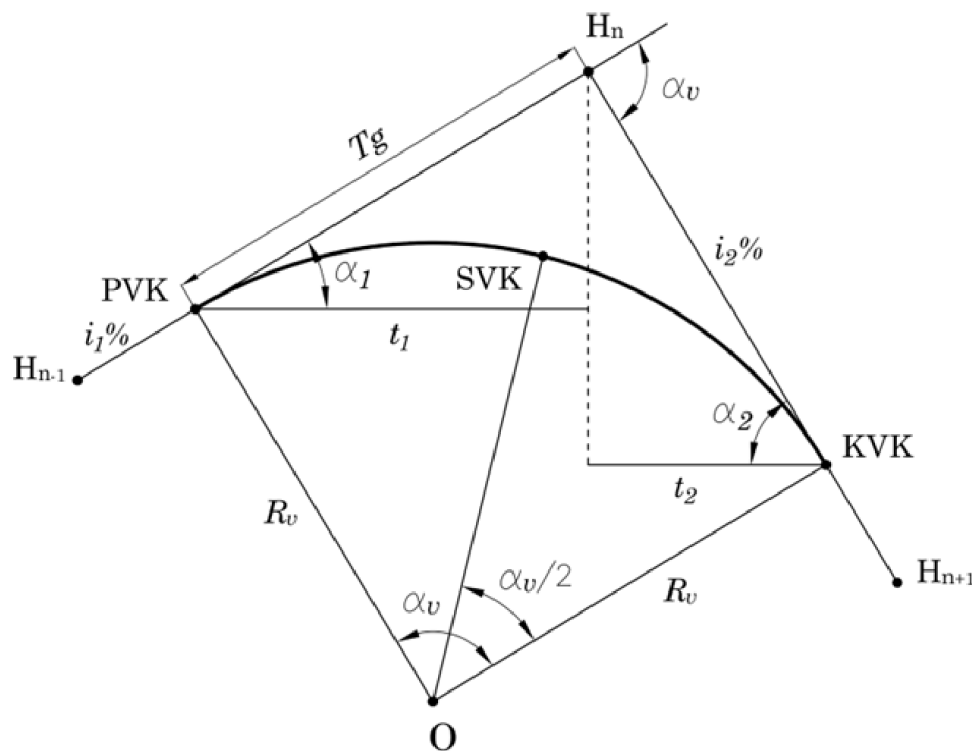
$$CC' = H_C - H_{C'}$$

$$\frac{H_C - H_{C'}}{(X_C)^2} = \frac{H_{KVK} - H_{KVK'}}{L^2} = \frac{\left(\overbrace{H_{PVK} + i_1 \cdot L}^{H_{KVK'}} \right) - \left(\overbrace{H_{PVK} + i_1 \cdot L}^{H_{KVK'}} + \left(\frac{r}{2} \right) \cdot L^2 \right)}{L^2} = \frac{r}{2} = \frac{i_2 - i_1}{2 \cdot L}$$

$$\rightarrow L = \frac{(i_2 - i_1)(X_C)^2}{2 \cdot (H_C - H_{C'})}$$



VERTIKALNIH KRIVINA KRUŽNOG OBLIKA – GLAVNI ELEMENTI



PVK – početak krivine

SVK – sredina krivine

KVK – kraj krivine

O – centar krivine

R_v – poluprečnik kružnog luka

α_v – skretni (centralni) ugao

Tg – kosa dužina tangente

t_1, t_2 – dužine horizontalnih projekcija tangenata Tg

$i_1\%, i_2\%$ – nagibi nivelete

α_1, α_2 – uglovi nagiba

ODREĐIVANJE GLAVNIH ELEMENATA VERTIKALNE KRIVINE KRUŽNOG OBLIKA

Dato: $R_v, \alpha_1, \alpha_2, H_n$.

Nepoznato: $Tg, t_1, t_2, H_{PVK}, H_{SVK}, H_{KVK}$.

$$\alpha_v = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$Tg = R_v \cdot \text{tg}(\alpha_v/2)$$

$$t_1 = Tg \cdot \cos(\alpha_1)$$

$$t_2 = Tg \cdot \cos(\alpha_2)$$

$$x = R_v \cdot \sin(\alpha_v/2)$$

$$y = R_v - R_v \cdot \cos(\alpha_v/2)$$

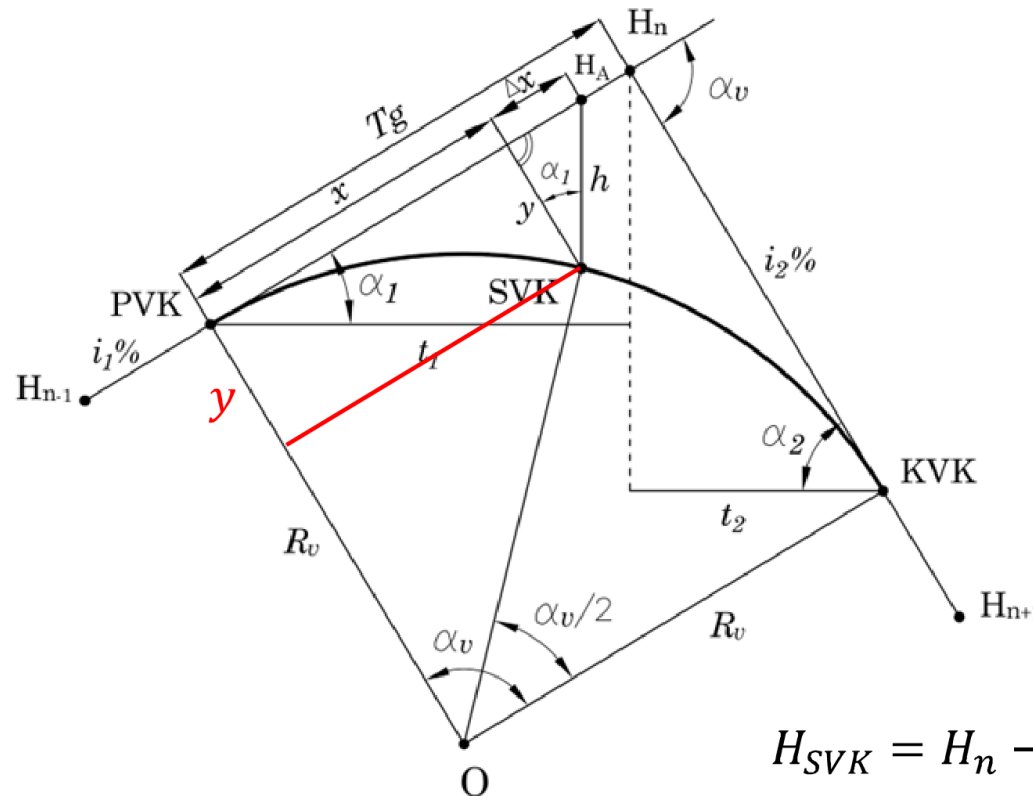
$$h = y/\cos(\alpha_1)$$

$$\Delta x = y \cdot \operatorname{tg}(\alpha_1)$$

$$H_{PVK} = H_n - Tg \cdot \sin(\alpha_1)$$

$$H_{KVK} = H_n - Tg \cdot \sin(\alpha_2)$$

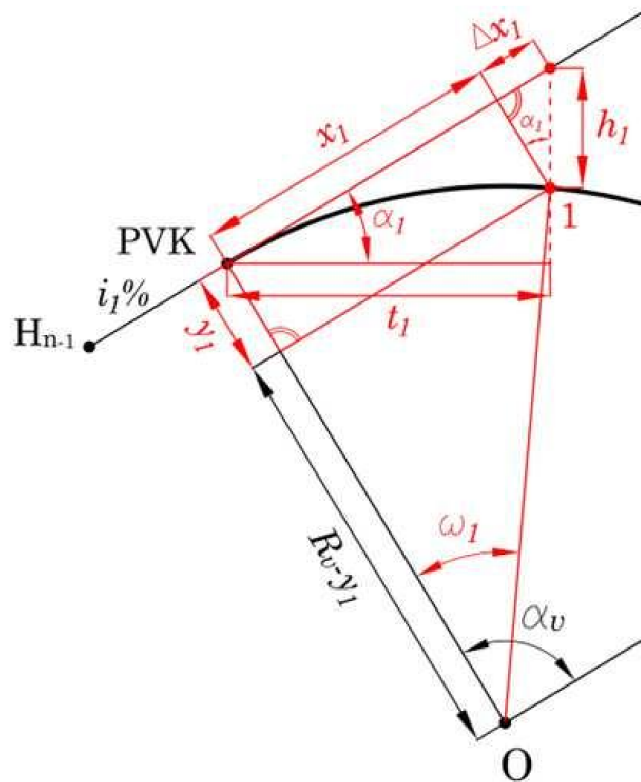
$$H_{SVK} = H_n - (Tg - x - \Delta x) \cdot \sin(\alpha_1) - h$$



ODREĐIVANJE VISINA DETALJNIH TAČKA VERTIKALNE KRIVINE OBLIKA KRUŽNICE

Dato: $R_v, \alpha_1, \alpha_2, Tg, H_n$.

Nepoznato: H_1, \dots, H_n .



Dužina apscise x_1 tačke 1 se usvaja.

$$y_1 = R_v - \sqrt{R_v^2 - x_1^2}$$

$$\Delta x_1 = y_1 \cdot \operatorname{tg}(\alpha_1), \quad h_1 = y_1 / \cos(\alpha_1)$$

$$t_1 = (x_1 + \Delta x_1) \cdot \cos(\alpha_1)$$

$$H_1 = H_n - (Tg - x_1 - \Delta x_1) \cdot \sin(\alpha_1) - h_1$$

Opšti oblik:

$$y_i = R_v - \sqrt{R_v^2 - x_i^2}$$

$$\Delta x_i = y_i \cdot \operatorname{tg}(\alpha_1), \quad h_i = y_i / \cos(\alpha_1)$$

$$t_i = (x_i + \Delta x_i) \cdot \cos(\alpha_1)$$

$$H_i = H_n - (Tg - x_i - \Delta x_i) \cdot \sin(\alpha_1) - h_i$$

Hvala na pažnji