

Завршни испит из Математике 1

Презиме и име:

Број индекса:

1. Дефинисати појам инверзне матрице и показати да матрица A може имати највише једну инверзну матрицу. (2)

Дефиниција 2.20 на страни 64. Ако би матрице X и Y биле инверзне матрице за матрицу A , онда је $AX = XA = I$ и $AY = YA = I$. Одавде је:

$$X = XI = X(AY) = (XA)Y = IY = Y.$$

2. Дефинисати траг матрице. Показати да матрице реда n чији је траг једнак нули образују векторски простор и одредити његову димензију. (2)

Траг матрице је збир елемената главне дијагонале. Означимо са W скуп свих квадратних матрица n -тог реда чији је траг једнак нули. Тада за $A, B \in W$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ важи:

$$\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B) = 0 + 0 = 0 \text{ и } \text{Tr}(\lambda A) = \lambda \cdot \text{Tr}(A) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

Дакле, $A + B \in W$ и $\lambda A \in W$, одакле закључујемо да је W потпростор векторског простора $V = M_n(\mathbb{R})$, па је и сам векторски простор. Даље, како је

$$a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = 0,$$

један од дијагоналних елемената је линеарна комбинација преосталих, те је $\dim(W) = n^2 - 1$.

3. Дефинисати појмове сопствених вредности и сопствених вектора квадратне матрице. Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$, где је $a_{ij} = i - j$. (3)

Дефиниција 2.44 на страни 91.

Сопствене вредности матрице $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ су комплексне, $\lambda_1 = i$ и $\lambda_2 = -i$. Из једначина $AX = iX$, односно $AX = -iX$, добијамо сопствене векторе:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}.$$

4. Формулисати теорему Коши-Шварц-Буњаковског. (1)

Теорема 2.30 на страни 97.

5. Дефинисати појам векторског простора. Дати пример векторског простора V димензије 6 и његовог потпростора W димензије 4. (2)

Дефиниција 2.25 на страни 68. Као пример најједноставније је узети реални векторски простор $V = \mathbb{R}^6$ и његов потпростор $W = \mathbb{R}^4$.

6. Одредити тачку N симетричну тачки $M(1,1,2)$ у односу на осу Ox . (2)

Тачка $M'(1,0,0)$ је нормална пројекција тачке M на осу Ox , те тражена симетрична тачка N има координате $(1,-1,-2)$.

7. Дефинисати појам тачке нагомилавања низа. Дати пример низа са две тачке нагомилавања, тако да једна од њих буде коначна, а друга бесконачна. (1)

Дефиниција 4.13 на страни 176. Као пример можемо узети низ

$$a_n = n(1 + (-1)^n).$$

8. Дефинисати појам локалног максимума и појам стационарне тачке функције. Проверити тачност следећих исказа; p : Ако је M стационарна тачка функције f , онда је M тачка локалног екстремума. q : Ако је M тачка локалног екстремума, онда је M стационарна тачка функције f . Образложити одговор. (2)

Дефиниција 6.4 на страни 223 и дефиниција 6.5 на страни 225.

Оба исказа p и q су нетачна. Као контрапример за исказ p може се узети функција $f(x) = x^3$, док се за исказ q може посматрати функција $g(x) = 1 - |x|$.

9. Формулисати и доказати Кронекер-Капелијеву теорему. (3)

Теорема 2.18 на страни 87.

10. Формулисати Тејлорову формулу са остатком у Пеановом облику. Известити Маклоренову формулу степена 3 за функцију $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$. (2)

Теорема 6.14 на страни 236.

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}}, \quad f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9}(1+x)^{-\frac{5}{3}}, \quad f'''(x) = \frac{10}{27}(1+x)^{-\frac{8}{3}}$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3) = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 + o(x^3), \quad x \rightarrow 0.$$