$\boxed{\mathbf{1.}}$ Вредност израза $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 9}$ једнака је:

Решење Директним рачуном добија се $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}=\frac{4}{9}$, или краће

$$S=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{7}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{9}=\frac{4}{9}\,.$$

$\boxed{\mathbf{2.}}$ Ако је $f(x)=\sqrt{x+1}$ и $g(x)=\sqrt{x-1}$, онда је $(g\circ f)\,(24)+(f\circ g)\,(1)$ једнако:

Решење Рачунамо најпре обе композиције:

$$(g\circ f)\,(24)=g(f(24))=g(\sqrt{25})=g(5)=\sqrt{4}=2\,,$$

$$(f\circ g)\,(1)=f(g(1))=f(\sqrt{0})=f(0)=\sqrt{1}=1\,.$$

Одавде је $(g\circ f)\,(24)+(f\circ g)\,(1)=2+1=3\,.$

$\boxed{\mathbf{3.}}$ Ако су x_1 и x_2 решења квадратне једначине $x^2-x+1=0$, онда је $x_1^3+x_2^3$ једнако:

Решење Из Виетових формула добијамо да је $x_1+x_2=1$ и $x_1x_2=1$. Даље је

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1^2x_2-3x_1x_2^2=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=1-3=-2\,.$$

$\boxed{\mathbf{4.}}$ Колико целобројних решења има неједначина $\dfrac{x^2-2x+2}{x^2+4x}\geq 0\,?$

Решење Израз у бројиоцу $x^2-2x+2>0$ за свако реално x, јер је дискриминанта $D=b^2-4ac=4-8=-4<0$ и $a=1>0$. Даље је $x^2+4x\geq 0$ за $x\in(-\infty,-4]\cup[0,+\infty)$. Како се овај израз налази у имениоцу, то не укључујемо тачке -4 и 0, јер је тада $x^2+4x=0$. Према томе, скуп свих реалних решења ове неједначине је скуп

$$(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)\,,$$

и у њему се налази бесконачно много целих бројева.

$\boxed{\mathbf{5.}}$ Ако је у геометријском низу збир првог и другог члана једнак 4, а збир четвртог и петог члана једнак 108, онда је седми члан овог низа једнак:

Решење Из датих услова добија се систем једначина

$$\begin{array}{rcrcl} a_1 & + & a_1q & = & 4\\ a_1q^3 & + & a_1q^4 & = & 108\end{array} \iff \begin{array}{rcl} a_1(1+q) & = & 4\\ a_1q^3(1+q) & = & 108\end{array} \iff \begin{array}{rcl} a_1(1+q) & = & 4\\ q^3 & = & 27\end{array} \iff \begin{array}{rcl} a_1 & = & 1\\ q & = & 3\,.\end{array}$$

Одавде добијамо $a_7=a_1q^6=3^6=729$.

$\boxed{\mathbf{6.}}$ Збир решења једначине $9^x-12\cdot 3^x+27=0$ једнак је:

Решење Увођењем смене $3^x=t$, где је $t>0$, добијмо квадратну једначину $t^2-12t+27=0$. Оба решења квадратне једначине $t_1=3$ и $t_2=9$ задовољавају услов $t>0$. Стога ће полазна експоненцијална једначина имати два решења $x_1=1$ и $x_2=2$, па је тражени збир

$$x_1+x_2=3\,.$$

$\boxed{\mathbf{7.}}$ На Светском првенству у фудбалу 32 екипе подељене су у 8 група од по 4 екипе. У првом кругу свака екипа игра против сваке екипе из своје групе. Укупан број одиграних утакмица у првом кругу једнак је:

Решење Довољно је број одиграних утакмица у једној групи помножити са бројем група. Како група има 4 тима, у сваком од 3 кола играју се по 2 утакмице, па је број одиграних утакмица у једној групи $3\cdot 2=6$. Како постоји 8 група, тражени број једнак је $8\cdot 6=48$.

$\boxed{\mathbf{8.}}$ Полином $P(x) = x^4 + ax^3 + b$ дељив је полиномом $Q(x) = x^2 + 1$. Остатак при дељењу полинома $P(x)$ полиномом $x + 1$ једнак је:

Решење Како полином $Q(x) = (x - i)(x + i)$ дели полином $P(x)$ по Безуовој теореми мора бити $P(i) = 0$, тј.

$$i^4 + ai^3 + b = 0 \iff 1 - ai + b = 0 \iff 1 + b = 0 \ \wedge \ -a = 0 \iff b = -1 \ \wedge \ a = 0\,.$$

Заменом добијених вредности у полином $P(x)$ добијамо да је

$$P(x) = x^4 - 1\,.$$

Сада још једном применимо Безуову теорему која каже да је остатак при дељењу полинома $p(x)$ полиномом $x - \alpha$ једнак $P(\alpha)$. Према томе, тражени остатак једнак је

$$P(-1) = (-1)^4 - 1 = 0\,.$$

Задатак се може решити и непосредним дељењем полинома $P(x)$ полиномом $Q(x)$ тако што изједначимо добијени остатак са 0.

$\boxed{\mathbf{9.}}$ Ако је $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1)$, производ решења једначине $|z| + i\overline{z} = z + 2 - i$ је:

Решење Ако је $z = x + iy$, из датих услова добијамо једначину

$$\sqrt{x^2 + y^2} + i(x - iy) = x + iy + 2 - i \iff \sqrt{x^2 + y^2} + y + ix = x + 2 + i(y - 1)\,.$$

Ако изједначимо реалне и имагинарне делове добиће се систем једначина

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{x^2 + y^2} \quad + \quad y & = & x + 2 \\ x & = & y - 1 \end{array} \iff \begin{array}{rcl} \sqrt{x^2 + (x+1)^2} \quad + \quad x + 1 & = & x + 2 \\ y & = & x + 1 \end{array} \iff \begin{array}{c} 2x^2 + 2x = 0 \\ y = x + 1\,. \end{array}$$

Одавде је $x = 0$ и $y = 1$ или $x = -1$ и $y = 0$. Дакле, постоје два комплексна броја који задовољавају полазну једначину и то:

$$z_1 = 0 + 1 \cdot i = i\,, \quad z_2 = -1 + 0 \cdot i = -1\,.$$

Тражени производ решења једнак је $z_1 \cdot z_2 = -i$.

$\boxed{\mathbf{10.}}$ Једначина кружнице k која додирује x-осу и чији је центар тачка $(0, 1)$ гласи:

Решење Да би написали једначину кружнице потребне су нам координате центра и њен полупречник. Из услова да кружница са центром у тачки $(0, 1)$ додирује x-осу, налазимо да је $r = 1$. Тражена једначина гласи:

$$(x - 0)^2 + (y - 1)^2 = 1 \iff x^2 + y^2 = 2y\,.$$

$\boxed{\mathbf{11.}}$ Збир решења једначине $2\cos^2 x + 3\sin x = 0$ на интервалу $(0, 2\pi)$ једнак је:

Решење Искористимо основни тригонометријски идентит $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, па једначина постаје:

$$2(1 - \sin^2 x) + 3\sin x = 0 \iff 2\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0 \iff 2t^2 - 3t - 2 = 0 \ \wedge \ -1 \le t \le 1\,.$$

Решења квадратне једначине су $t_1 = -1/2$ и $t_2 = 2$. Друго решење елиминишемо јер не припада сегменту $[-1, 1]$, односно једначина $\sin x = 2$ нема решења. Стога је дата једначина еквивалентна са једначином

$$\sin x = -\frac{1}{2} \iff x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee \ x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\,, \ k \in \mathbb{Z}\,.$$

Једина решења овог облика на $(0, 2\pi)$ су $x_1 = \frac{7\pi}{6}$ и $x_2 = \frac{11\pi}{6}$, и њихов збир једнак је 3π.

$\boxed{\textbf{12.}}$ Решење неједначине $\sqrt{2x+4} < x-2$ је скуп:

Решење Стандардним поступком за решавање корене неједначине добијамо:

$$\begin{aligned}\sqrt{2x+4} < x-2 &\iff 2x+4 \geq 0 \ \wedge\ x>2 \ \wedge\ 2x+4 < (x-2)^2\\ &\iff x \geq -2 \ \wedge\ x>2 \ \wedge\ 2x+4 < x^2-4x+4\\ &\iff x>2 \ \wedge\ x^2-6x<0\\ &\iff x>2 \ \wedge\ x \in (-\infty,0)\cup(6,+\infty)\\ &\iff x \in (6,+\infty)\,.\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{13.}}$ Количник имагинарног и реалног дела комплексног броја $\left(1-i\sqrt{3}\right)^{2018}$ једнак је:

Решење Приметимо најпре да је

$$(1-i\sqrt{3})^3 = 1-3i\sqrt{3}+3(i\sqrt{3})^2-(i\sqrt{3})^3 = 1-3i\sqrt{3}-9+3i\sqrt{3} = -8 = -2^3\,,$$

и искористимо ову особину за рачунање степена. Имамо:

$$\begin{aligned}\left(1-i\sqrt{3}\right)^{2018} &= \left(1-i\sqrt{3}\right)^{3\cdot 672+2} = \left((1-i\sqrt{3})^3\right)^{672}\cdot\left(1-i\sqrt{3}\right)^2\\ &= (-8)^{672}\cdot\left(1-2i\sqrt{3}-3\right) = 8^{672}(-2-2i\sqrt{3})\\ &= -2^{2017}(1+i\sqrt{3})\,.\end{aligned}$$

Реални део једнак је -2^{2017} а имагинарни $-2^{2017}\sqrt{3}$, па је траженики количник једнак $\sqrt{3}$.

$\boxed{\textbf{14.}}$ У једнакокраки трапез дужине крака 5 cm уписан је круг пречника 4 cm. Ако су a и b основице трапеза, онда је $a\cdot b$ једнако:

Решење Нека су a и b основице трапеза и нека је $a>b$. Како је у трапез уписан круг, ради се о тангентном четвороуглу, па су збирови наспрамних страница једнаки, тј $a+b=10$. Са друге стране, из Питагорине теореме добија се

$$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = 5^2-4^2 \implies a-b=6\,.$$

Сада се из система једначина $a+b=10$, $a-b=6$, добија $a=8$ и $b=2$, па је $a\cdot b=16$.

$\boxed{\textbf{15.}}$ Ако је m најмања, а M највећа вредност функције $f(x)=-x^2+2x-2$ на сегменту $[0,3]$, онда је $m\cdot M$ једнако:

Решење У питању је квадратна функција $x\mapsto f(x)$ која локални максимум достиже у свом темену. Како је $-\frac{b}{2a}=1$, то је $f(1)=-1$. Вредности на крајевима одсечка једнаке су $f(0)=-2$ и $f(3)=-5$. На тај начин, добија се $m=-5$ и $M=-1$, па је $m\cdot M=5$.

$\boxed{\textbf{16.}}$ Производ решења једначине $x+2\cdot|x-4|=7$ једнак је:

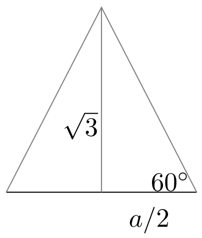
Решење Како је $|x-4| = \begin{cases}4-x & x<4\\ x-4 & x\geq 4\end{cases}$, дата једначина је еквивалентна са:

$$(x+2(4-x)=7 \ \wedge\ x<4) \ \vee\ (x+2(x-4)=7 \ \wedge\ x\geq 4) \iff x=1 \ \vee\ x=5\,.$$

Производ решења једначине једнак је 5.

$\boxed{\textbf{17.}}$ Бочна страна правилне четворостране пирамиде гради са основицом пирамиде угао од 60°. Ако је дужина висине пирамиде једнака $\sqrt{3}$, онда је њена запремина једнака:

Решење Означимо са a страницу квадрата у основи пирамиде. Како је дата висина пирамиде $H = \sqrt{3}$, то је запремина једнака $V = \frac{BH}{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$. Страницу a можемо наћи ако уочимо попречни пресек пирамиде и равни која садржи врх пирамиде и средишта наспрамних страница квадрата у основи. У пресеку се добија једнакокраки троугао на слици



$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{a/2} \implies \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{a/2} \implies a = 2 \implies V = \frac{4}{3}\sqrt{3}\,.$$

$\boxed{\textbf{18.}}$ Тангента параболе $y = 4 - x^2$ паралелна је правој $y = 4x$. Ако је једначина тангенте $y = kx + n$, онда је $3k - n$ једнако:

Решење Како је према услову задатка тангента t паралелна датој правој, коефицијент правца $k_t = 4$, па тангента има једначину $t : y = 4x + n$, где n треба одредити. Тангента додирује параболу у једној тачки па једначина

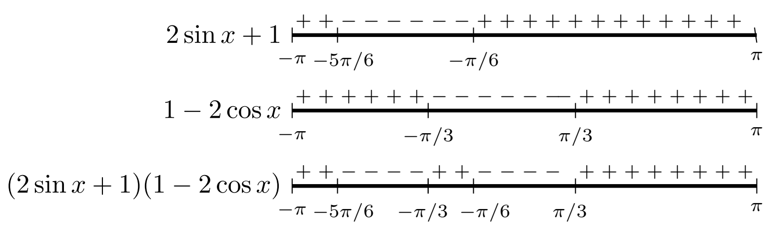
$$4 - x^2 = 4x + n \iff x^2 + 4x + n - 4 = 0$$

има јединствено решење. Дакле, дискриминанта квадратне једначине једнака је нули, тј. $16 - 4(n-4) = 0$, одакле налазимо да је $n = 8$. Стога је $3k - n = 12 - 8 = 4\,$.

Решење Запишимо најпре неједначину у погоднијем облику.

$$\begin{aligned} 2\sin x - 2\cos x < 4\sin x\cos x - 1 &\iff 2\sin x - 2\cos x - 4\sin x\cos x + 1 < 0 \\ &\iff 2\sin x(1 - 2\cos x) + 1 - 2\cos x < 0 \\ &\iff (2\sin x + 1)(1 - 2\cos x) < 0\,. \end{aligned}$$

Треба одредити знак израза у заградама на интервалу $(-\pi, \pi)$. На овом интервалу важиће $\sin x < -\frac{1}{2}$ за $x \in (-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6})$, док је $\cos x > \frac{1}{2}$ за $x \in (-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$. Стога је знак израза дат следећом таблицом:



Одавде видимо да је решење тригонометријске неједначине скуп $\left(-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$.

$\boxed{\textbf{20.}}$ Решење логаритамске неједначине $\log_{x^2}\left(\sqrt{x^2-1}-1\right)<0$ је скуп:

Решење Најпре проверавамо када је неједнакост дефинисана. Знајући да је функција $x \mapsto \log_a x$ дефинисана ако је $x>0$ и ако за основу логаритма важи $a>0$, $a\neq 1$, као и да поткорени израз мора бити ненегативан, добијамо следеће услове:

$$\begin{aligned} x^2>0 \ \wedge\ x^2\neq 1 \ \wedge\ x^2-1\geq 0 \ \wedge\ \sqrt{x^2-1}-1>0 &\iff x\neq 0 \ \wedge\ x\neq \pm 1 \ \wedge\ x^2-1>1 \\ &\iff x\neq 0 \ \wedge\ x\neq \pm 1 \ \wedge\ x^2-2>0 \\ &\iff |x|>\sqrt{2} \iff x\in(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)\,. \end{aligned}$$

Неједначина дакле има смисла за $|x|>\sqrt{2}$, а тада је основа логаритма $x^2>2$, одакле је логаритамска функција растућа. Стога је, под условом $|x|>\sqrt{2}$, неједначина еквивалентна са:

$$\begin{aligned} \log_{x^2}\left(\sqrt{x^2-1}-1\right)<0 &\iff \sqrt{x^2-1}-1<1 \ \wedge\ |x|>\sqrt{2} \\ &\iff \sqrt{x^2-1}<2 \ \wedge\ |x|>\sqrt{2} \\ &\iff x^2<5 \ \wedge\ |x|>\sqrt{2} \\ &\iff |x|<\sqrt{5} \ \wedge\ |x|>\sqrt{2} \\ &\iff x\in(-\sqrt{5},-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},\sqrt{5})\,. \end{aligned}$$