РЕШЕЊА:

1.

$$\frac{2}{3\sqrt{3}-5}+5=\frac{2}{3\sqrt{3}-5}\cdot\frac{3\sqrt{3}-5}{3\sqrt{3}-5}+5=\frac{6\sqrt{3}-10}{(3\sqrt{3})^2-5^2}+5=3\sqrt{3}-5+5=3\sqrt{3}$$

2.

$$\log_{27}20=\log_{3^3}2^2\cdot 5=\frac{1}{3}(2\log_3 2+\log_3 5)=\frac{2a+b}{3}$$

3.

$$\frac{2x+7}{3-x}=2$$

$$2x+7=2(3-x), 4x=-1, x=-\frac{1}{4}$$

4.

$$x^2+y^2-6x+8y=0$$

$$x^2-6x+9-9+y^2+8y+16-16=0$$

$$(x-3)^2+(y+4)^2=5^2$$

$$R=5$$

5.

$$\frac{2}{x^2}<\frac{1}{x^3}/\cdot x^2$$

$$2<\frac{1}{x}$$

$$2-\frac{1}{x}<0$$

$$\frac{2x-1}{x}<0$$

$$x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$$

6.

$$a_2=a_1+d, a_7=a_1+6d, a_2+a_7=2a_1+7d$$

$$2a_1+7d=36$$

$$S_7=\frac{7}{2}(2a_1+6d)$$

$$7a_1+21d=100$$

$$a_1=100-3\cdot 36=-8$$

7.

$$\sqrt{x+6}>x$$

Ако је $x<0$ мора $x+6\geq 0$. Дакле $x\in[-6,0)$.
Ако је $x\geq 0$, онда $x+6>x^2$

$$x\geq 0, x\in(-2,3)$$

$$x \in [0, 3)$$

Унијом ових решења добијамо $x \in [-6, 3)$.

$\boxed{\mathbf{8.}}$ $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

$\boxed{\mathbf{9.}}$

$$Q(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

$x - 1$ дели полином $P(x)$ па је $P(1) = 0$
$x + 1$ дели полином $P(x)$ па је $P(-1) = 0$

$$P(1) = a + b - 3 = 0$$

$$P(-1) = a - b + 5 = 0$$

Дакле $a = -1, b = 4$ тј. $a + 3b = 11$.

$\boxed{\mathbf{10.}}$

$$|z - 2i| = |x + (y-2)i| = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$$

$$z = x - yi$$

$$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} - x + yi = i + 3$$

$$y = 1$$

$$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} - x = 3$$

$$\sqrt{x^2 + 1} = x + 3$$

$$x^2 + 1 = (x+3)^2, x + 3 \geq 0$$

$$x = -\frac{4}{3}$$

$$3xy = -4$$

$\boxed{\mathbf{11.}}$ Једначина праве кроз две тачке је

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$$\frac{x - 1}{0 - 1} = \frac{y + 1}{2 - (-1)}$$

Једначина праве је $y = -3x + 2$. Она сече $x-$осу у $x = 2$ а $y-$осу у $y = \dfrac{2}{3}$.

Површина троугла је $P = \dfrac{2 \cdot \frac{2}{3}}{2} = \dfrac{2}{3}$.

$\boxed{\mathbf{12.}}$ На интервалу $(0, \pi)$ једначина има једно решење. Тангенс је периодична функција са периодом π. Дакле на интервалу $(0, 3\pi)$ има три решења.

$\boxed{\mathbf{13.}}$ $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

$\boxed{\mathbf{14.}}$ $i^{2021} = i$

$$(1+i)^9 = ((1+i)^2)^4 \cdot (1+i) = (2i)^4 \cdot (1+i) = 16(1+i)$$

$$\frac{16 + 16i^{2021}}{(1+i)^9} = \frac{16 + 16i}{16(1+i)} = 1$$

$\boxed{\mathbf{15.}}$

$$\log_x(x+6) = 2$$

$$x > 0, x \neq 1$$

$$x^2 = x + 6$$

Решења ове квадратне једначине су $x_1 = 3$ и $x_2 = -2$ али само прво испуњава услов $x > 0$.

16. Висина пирамиде је $H^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{6a^2}{9}$, $H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

$$B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$V = \frac{B \cdot H}{3} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

$$V = \frac{6^3\sqrt{2}}{12} = 18\sqrt{2}$$

17. $x^2 - |x| - 2 = 0$
Ако $x \geq 0$, онда $x^2 - x - 2 = 0$ и решење је $x = 2$.
Ако $x < 0$, онда $x^2 + x - 2 = 0$ и решење је $x = -2$.
Дакле једначина има два решења.

18.

$$6(5^x)^2 - 19 \cdot 5^x \cdot 3^x + 10(3^x)^2 = 0 / : (3^x)^2$$

$$6\left(\left(\frac{5}{3}\right)^x\right)^2 - 19\left(\frac{5}{3}\right)^x + 10 = 0$$

Смена је $t = \left(\frac{5}{3}\right)^x$

$$6t^2 - 19t + 10 = 0$$

$$t_1 = \frac{5}{2}, t_2 = \frac{2}{3}$$

$$x_1 = \log_{\frac{5}{3}} \frac{5}{2}, x_2 = \log_{\frac{5}{3}} \frac{2}{3}$$

$$x_1 + x_2 = \log_{\frac{5}{3}} \frac{5}{2} + \log_{\frac{5}{3}} \frac{2}{3} = \log_{\frac{5}{3}} \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{3} = \log_{\frac{5}{3}} \frac{5}{3} = 1$$

19. Локални минимум функције је у тачки $x = \frac{1}{2}$,$f_{min} = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{25}{4}$. На крајевима интервала је $f(0) = -6$ и $f(4) = 6$. Најмања вредност је $-\frac{25}{4}$ а највећа 6 и њихов збир је $-\frac{1}{4}$.

20.

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4}$$

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \frac{3}{4}$$

$$1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{3}{4}$$

$$\sin^2 2x = \frac{1}{2}$$

$$\sin 2x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$2x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ или $2x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$ или $2x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ или $2x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$

$x = \frac{\pi}{8} + k\pi$ или $x = \frac{7\pi}{8} + k\pi$ или $x = \frac{3\pi}{8} + k\pi$ или $x = \frac{5\pi}{8} + k\pi$

$$x_1 = \frac{\pi}{8}, x_2 = \frac{\pi}{8} + \pi, x_3 = \frac{7\pi}{8}, x_4 = \frac{7\pi}{8} + \pi, x_5 = \frac{3\pi}{8}, x_6 = \frac{3\pi}{8} + \pi, x_7 = \frac{5\pi}{8}, x_8 = \frac{5\pi}{8} + \pi$$

Збир ових решења је 8π.