

**Класификациони испит из математике за упис на
Грађевински факултет**Шифра задатка: 25025

Тест има 20 задатака на две странице. Задаци 1-3 вреде по 4 поена, задаци 4 – 17 вреде по 5 поена и задаци 18 – 20 вреде по 6 поена. Погрешан одговор доноси -10% поена од броја поена предвиђених за тачан одговор. Заокруживање Н не доноси ни позитивне, ни негативне поене. У случају заокруживања више од једног, као и у случају незаокруживања ниједног одговора, добија се -1 поен.

1. Ако је $f\left(\frac{2x+3}{x-1}\right) = x$, онда је $f(3)$ једнако:

- A) $\frac{1}{3}$ B) 3 B) 6 Г) 9 Д) -3 Н) Не знам

2. Ако је $\log_5 4 = a$, онда је $\log_4 500$ једнак:

- A) $1 + \frac{3}{a}$ B) $1 + \frac{2}{a}$ B) $\frac{a}{a+3}$ Г) $\frac{a}{a+1}$ Д) $a+2$ Н) Не знам

3. Вредност израза $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3} - \sqrt{6} + \sqrt{24}}$ једнака је:

- A) $\sqrt{3} - 3$ B) $2 - \sqrt{2}$ B) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ Г) $3 + \sqrt{3}$ Д) $\sqrt{2} + 2$ Н) Не знам

4. Скуп решења неједначине $\frac{x^2}{x^3 - 1} < \frac{1}{x}$ је облика:

- A) $(-\infty, a] \cup [b, \infty)$ B) $\emptyset$ B) $[b, \infty)$ Г) (a, b) Д) $(-\infty, a) \cup (b, c)$ Н) Не знам

5. Збир решења једначине $2^{2x+1} - 36 \cdot 2^x + 64 = 0$ је:

- A) 3 B) 5 B) 10 Г) 12 Д) 13 Н) Не знам

6. Ако је (a_n) аритметички низ такав да је збир првих 10 чланова 50 и $a_2 + a_5 = 6$, онда је a_2 једнако:

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{5}{2}$ Г) 5 Д) 7 Н) Не знам

7. Број решења једначине $\sqrt{x+6} - \sqrt{x+1} = \sqrt{x-2}$ је:

- A) 0 B) 1 B) 2 Г) 3 Д) ∞ Н) Не знам

8. Иван је после припрема изабрао 12 најспремнијих голубова за такмичење, 3 сива и 9 шарених. На колико начина може да направи екипу од 7 голубова за такмичење тако да су у њој два сива голуба?

- A) 84 B) 378 B) 504 Г) 630 Д) 2200 Н) Не знам

9. Полином $P(x) = x^4 + ax^2 + bx + 2$ је дељив полиномом $Q(x) = x^2 + x - 2$. Онда је остатак при дељењу полинома $P(x)$ са $x - 2$ једнак:

- A) 6 B) 5 B) 4 Г) 2 Д) 1 Н) Не знам

Шифра задатка: 25025

10. Ако је $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{8}$ и $\alpha \in [0, \pi]$, онда је $\cos \alpha$ једнако:

- А) $1 - \frac{1}{\sqrt{8}}$ Б) $\frac{1}{7}$ В) $-\frac{1}{3}$ Г) $\frac{1}{3}$ Д) $\frac{2}{3}$ Н) Не знам

11. Ако су $A(a_1, a_2)$ и $B(b_1, b_2)$ тачке преска праве $2x + y = 1$ и круга $(x - 3)^2 + y^2 = 25$, онда је $a_1 + a_2 + b_1 + b_2$ једнако:

- А) 5 Б) -5 В) -1 Г) 1 Д) 0 Н) Не знам

12. Збир најмање и највеће вредности функције $f(x) = x^2 - 4x + 8$ на интервалу $[0, 3]$ једнак је:

- А) 5 Б) 8 В) 9 Г) 10 Д) 12 Н) Не знам

13. Ако је $z = x + iy$ комплексан број такав да је $\bar{z} + |z + 2i| = 1 - 3i$, онда је $x + 3y$ једнако:

- А) -3 Б) -2 В) -1 Г) 1 Д) 2 Н) Не знам

14. Реални део комплексног броја $\frac{(1+i)^8}{(1-i)^8}$ једнак је:

- А) $2i$ Б) 2 В) 0 Г) 1 Д) 2 Н) Не знам

15. Скуп решења неједначине $\log_{0,5} \frac{2x-4}{x-3} < -2$ је облика:

- А) (a, b) Б) $(-\infty, a) \cup (b, c)$ В) $(a, b) \cup (c, d)$ Г) $(a, b) \cup (c, \infty)$ Д) $\emptyset$ Н) Не знам

16. Ако су x_1, x_2 решења једначине $x^2 - \sqrt{8}x + \sqrt{2} = 0$, онда је $\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)^2$ једнако:

- А) 0 Б) 2 В) 4 Г) 8 Д) 32 Н) Не знам

17. У лопту полупречника $R = 10\text{cm}$ је уписан ваљак чија је висина једнака пречнику основе. Онда је запремина ваљка једнака:

- А) $500\sqrt{2}\pi\text{cm}^3$ Б) $250\sqrt{2}\pi\text{cm}^3$ В) $225\pi\sqrt{2}\text{cm}^3$ Г) $150\sqrt{2}\pi\text{cm}^3$ Д) $100\sqrt{2}\pi\text{cm}^3$ Н) Не знам

18. Ако је $z = 1 + i$, онда је реални део суме $1 + z + z^2 + \dots + z^{2025}$ једнак:

- А) -2^{2024} Б) 2^{2024} В) -2^{1013} Г) 2^{1013} Д) -2^{1023} Н) Не знам

19. Ако тачке $A\left(\sqrt{3}, \frac{3}{2}\right)$ и $B\left(\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ припадају елипси $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, онда је $a^2 + b^2$ једнако:

- А) 25 Б) 13 В) 10 Г) 5 Д) 2 Н) Не знам

20. Збир решења једначине $2\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = 0$ која припадају интервалу $[0, 2\pi]$ једнак је:

- А) $\frac{7\pi}{3}$ Б) $\frac{5\pi}{3}$ В) 4π Г) 5π Д) 7π Н) Не знам

РЕШЕЊА

1. $\frac{2x+3}{x-1} = 3$, дакле $2x+3 = 3(x-1)$ и коначно $x = 6$.

2. $\log_4 500 = \log_4 5^3 \cdot 4 = \log_4 5^3 + \log_4 4 = 3\log_4 5 + 1 = 3\frac{1}{\log_5 4} + 1 = \frac{3}{a} + 1$.

$$\boxed{3.} \quad \sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = 2\sqrt{6}$$

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3} + \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{6} - \sqrt{3})}{(\sqrt{3} + \sqrt{6})(\sqrt{6} - \sqrt{3})} = \frac{6 - \sqrt{18}}{6 - 3} = \frac{6 - 3\sqrt{2}}{3} = 2 - \sqrt{2}.$$

4.

$$\frac{x^2}{x^3 - 1} - \frac{1}{x} < 0$$

$$\frac{x^2 \cdot x - (x^3 - 1)}{x(x^3 - 1)} < 0$$

$$\frac{1}{x(x^3 - 1)} < 0$$

$$x(x^3 - 1) < 0$$

$x < 0, x^3 > 1$ или $x > 0, x^3 < 1$. Дакле $x > 0, x < 1$ тј. решење је $x \in (0, 1)$.

5.

$$2 \cdot (2^x)^2 - 36 \cdot 2^x + 64 = 0$$

Смена је $t = 2^x$

$$2t^2 - 36t + 64 = 0$$

$$t^2 - 18t + 32 = 0$$

Решења ове квадратне једначине су $t_1 = 2, t_2 = 16$ односно $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$.

6. Збир n чланова низа је $S_n = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2}$ и $a_n = a_1 + (n-1)d$. Дакле $a_2 + a_5 = a_1 + d + a_1 + 4d = 2a_1 + 5d$ и тако добијамо једначину $2a_1 + 5d = 6$.

$S_{10} = \frac{10(2a_1 + 9d)}{2} = 5(2a_1 + 9d)$ па је друга једначина $5(2a_1 + 9d) = 50$. Решавањем овог система од две једначине добијамо $d = 1$ и $a_1 = \frac{1}{2}$. Онда је $a_2 = a_1 + d = \frac{3}{2}$.

7. $x \geq -6, x \geq -1, x \geq 2$ дакле $x \geq 2$.

$$\sqrt{x+6} = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-2}/^2$$

$$x+6 = (x+1) + 2\sqrt{(x+1)(x-2)} + (x-2)$$

$$7-x = 2\sqrt{(x+1)(x-2)}/^2$$

$7-x \geq 0$ тј. $x \leq 7$.

$$(7-x)^2 = 4(x+1)(x-2)$$

$$49 - 14x + x^2 = 4(x^2 - x - 2)$$

$$3x^2 + 10x - 57 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{784}}{6} = \frac{-10 \pm 28}{6}$$

$x_1 = 3$ и $x_2 = -\frac{38}{6}$. Само x_1 испуњава услов да је $x \geq 2$ и $x \leq 7$. Дакле има једно решење.

8. У екипи треба да су два сива голуба и пет шарених и они се могу изабрати на $\binom{3}{2} = 3$ и $\binom{9}{5} = 126$ начина што је укупно $3 \cdot 126 = 378$.

9. $Q(x) = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$. По Безуовом ставу, пошто $x-1$ дели $P(x)$ мора бити $P(1) = 0$ и из истих разлога $P(-2) = 0$.

$P(1) = 1 + a + b + 2 = a + b + 3$ и тако добијамо једначину $a + b = -3$.

$P(-2) = 16 + 4a - 2b + 2 = 4a - 2b + 18$ па добијамо другу једначину $4a - 2b = -18$.

Решавањем система од ове две једначине добијамо $a = -4$ и $b = 1$.

Дакле $P(x) = x^4 - 4x^2 + x + 2$. Остатак придељењу овог полинома са $x-2$ је $P(2) = 16 - 16 + 2 + 2 = 4$.

10. Пошто је тангенс овог угла позитиван онда је он оштар угао тј. $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{9}$$

Дакле, $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

11. Ако $y = -2x + 1$ заменимо у једначину круга, добијамо

$$(x - 3)^2 + (-2x + 1)^2 = 25$$

$$5x^2 - 10x + 10 = 25$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$x_1 = -1$, $x_2 = 3$. Онда је $y_1 = -2x_1 + 1 = 3$, $y_2 = -5$. Збир је 0.

12. Локални минимум ове функције је у тачки $x = \frac{-b}{2a} = 2$ где су a, b коефицијенти квадратне функције. Минимум је $f(2) = 4$. Вредности функције на крајевима интервала су $f(0) = 8$ и $f(3) = 5$. Дакле, најмања вредност функције на овом интервалу је 4 а највећа 8 и њихов збир 12.

13. $\bar{z} = x - iy$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$|z + 2i| = |x + i(y + 2)| = \sqrt{x^2 + (y + 2)^2}$$

$$x - iy + \sqrt{x^2 + (y + 2)^2} = 1 - 3i$$

$$-yi = -3i \text{ и } x + \sqrt{x^2 + (y + 2)^2} = 1$$

$y = 3$. Заменом у другу једначину добијамо $x + \sqrt{x^2 + 25} = 1$.

$$\sqrt{x^2 + 25} = 1 - x/2$$

Мора бити $1 - x \geq 0$ тј $x \leq 1$

$$x^2 + 25 = (1 - x)^2$$

$$x = -12.$$

На крају $x + 3y = -12 + 9 = -3$.

14. $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$ јер $i^2 = -1$. Исто $(1 - i)^2 = -2i$.

$$\frac{(1 + i)^8}{(1 - i)^8} = \frac{((1 + i)^2)^4}{((1 - i)^2)^4} = \frac{(2i)^4}{(-2i)^4} = 1$$

15.

$$\frac{2x - 4}{x - 3} > (0, 5)^{-2}$$

$$\frac{2x - 4}{x - 3} > 4$$

$$\frac{2x - 4}{x - 3} - 4 > 0$$

$$\frac{8 - 2x}{x - 3} > 0$$

$$x \in (3, 4).$$

16. Према Виетовим везама $x_1 + x_2 = \sqrt{8}$ и $x_1 \cdot x_2 = \sqrt{2}$.

$$\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)^2 = \left(\frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}\right)^2 = 4.$$

17. За уписани ваљак у лопту важи да је $(2R)^2 = (2r)^2 + H^2$ где је r полупречник основе ваљка а H његова висина. У овом случају $H = 2r$. Онда

$$(2R)^2 = (2r)^2 + (2r)^2$$

$$R^2 = 2r^2$$

$$100 = 2r^2$$

Тако добијамо да је $r = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$. Онда је $H = 10\sqrt{2}$.

Запремина ваљка је $V = r^2 \pi H$ па је $V = 50\pi \cdot 10\sqrt{2} = 500\sqrt{2}\pi$.

18. $1 + z + z^2 + \dots + z^{2025} = \frac{1 - z^{2026}}{1 - z}$ као сума геометријског низа чији је први члан $a_1 = 1$ а количник $q = z = 1 + i$.

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{2025} = \frac{1 - (1 + i)^{2026}}{1 - (1 + i)}$$

$$(1 + i)^{2026} = ((1 + i)^2)^{1013} = (2i)^{1013} = 2^{1013}i$$

Па је тражена сума

$$\frac{1 - 2^{1013}i}{-i} = i(1 - 2^{1013}i) = i + 2^{1013}.$$

19. Пошто тачке припадају елипси, биће $\frac{3}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1$ и $\frac{2}{a^2} + \frac{18}{4b^2} = 1$. Ако прву једначину помножимо са -2 и додамо другој добијамо $-\frac{4}{a^2} = -1$ тј. $a^2 = 4$. Заменом a^2 у једну једначину добијамо $b^2 = 9$. Дакле, $a^2 + b^2 = 13$.

20. $\operatorname{tg} 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x - 1}$

$$\frac{2 \sin x}{\cos x} + \frac{2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x - 1} = 0$$

$$\frac{2 \sin x (3 \cos^2 x - 1)}{\cos x (2 \cos^2 x - 1)} = 0$$

$\sin x = 0$ или $3 \cos^2 x - 1 = 0$.

$\sin x = 0$ или $\cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ или $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Решења прве једначине су $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$ и $x_3 = 2\pi$.

Решења друге су $x_4 = \alpha$ и $x_5 = 2\pi - \alpha$ где је $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Решења треће су $x_6 = \pi - \alpha$ и $x_7 = \pi + \alpha$. Сума свих решења је 7π .