Универзитет у Београду **27.6.2023.**

Класификациони испит из математике за упис на Грађевински факултет

Шифра задатка: $\boxed{88222}$

Тест има 20 задатака на две странице. Задаци 1-3 вреде по 4 поена, задаци $4-17$ вреде по 5 поена и задаци $18-20$ вреде по 6 поена. Погрешан одговор доноси -10% поена од броја поена предвиђених за тачан одговор. Заокруживање Н не доноси ни позитивне, ни негативне поене. У случају заокруживања више од једног, као и у случају незаокруживања ниједног одговора, добија се -1 поен.

1. Ако је $f\left(\dfrac{x+2}{2-3x}\right)=x$, онда је $f(2^{-1})$ једнако:

А) $-\dfrac{5}{2}$ $\boxed{\text{Б)}}$ $-\dfrac{2}{5}$ В) $\dfrac{5}{2}$ Г) $\dfrac{2}{5}$ Д) $\dfrac{3}{4}$ Н) Не знам

2. $2^{\log_2 3+\log_4 81}$ једнако је:

А) 6 Б) 8 В) 9 $\boxed{\text{Г)}}$ 27 Д) 36 Н) Не знам

3. Вредност израза $\left(\dfrac{a^{-1}}{b^{-1}}+\dfrac{b^{-2}}{a^{-2}}\right)^{-1}\cdot\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}-1\right)$ једнака је:

А) $\dfrac{a}{a+b}$ $\boxed{\text{Б)}}$ $\dfrac{b}{a+b}$ В) $\dfrac{a^2}{a+b}$ Г) $\dfrac{b^2}{a+b}$ Д) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ Н) Не знам

4. Скуп решења неједначине $\dfrac{x^2-5x+5}{x^2-9x+14}<1$ је облика:

А) $(-\infty,a]\cup[b,\infty)$ Б) $(-\infty,a)$ В) $[b,\infty)$ Г) $[a,b)$ $\boxed{\text{Д)}}$ $(-\infty,a)\cup(b,c)$ Н) Не знам

5. Производ решења једначине $(\sqrt{3})^{x^2-2}=27^x$ је:

А) 3 Б) 2 В) 0 $\boxed{\text{Г)}}$ -2 Д) -3 Н) Не знам

6. Ако је (a_n) аритметички низ такав да је збир првих 5 чланова 20 и збир првих 9 чланова 27, онда је a_{25} једнако:

А) 7 $\boxed{\text{Б)}}$ -7 В) 5 Г) -5 Д) 4 Н) Не знам

7. Збир свих вредности параметра m таквих да једначина $x^2-(m+1)x+m^2=0$ има једно решење једнак је :

$\boxed{\text{А)}}$ $\dfrac{2}{3}$ Б) $\dfrac{4}{3}$ В) 4 Г) 3 Д) 1 Н) Не знам

8. Иван је после припрема изабрао 12 најспремнијих голубова за такмичење, 3 бела и 9 шарених. На колико начина може да направи екипу од 7 голубова за такмичење тако да су у њој бар два бела голуба?

А) 84 Б) 378 $\boxed{\text{В)}}$ 504 Г) 630 Д) 2200 Н) Не знам

9. Полином $P(x)=x^{2023}+ax^2+bx+5$ је дељив полиномом $Q(x)=x^2-1$. Онда је $a+b$ једнако:

А) 36 Б) 15 В) -2 $\boxed{\text{Г)}}$ -6 Д) -24 Н) Не знам

Шифра задатка: $\boxed{88222}$

10. $\cos 2023°$ је једнак:

$\boxed{\text{А)}}$ $-\cos 43°$ Б) $\cos 43°$ В) $\sin 43°$ Г) $-\sin 43°$ Д) $-\sin 23°$ Н) Не знам

11. Права $y = kx + n$ је паралелна са правом $y = -2x + 6$ и садржи тачку $A(1, 2)$. Онда је $n - k$ једнако :

$\boxed{\text{А)}}$ 6 Б) 5 В) 4 Г) 3 Д) 2 Н) Не знам

12. Збир решења једначине $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ која припадају интервалу $(0, 4\pi)$ једнак је:

А) 12π Б) 10π $\boxed{\text{В)}}$ 8π Г) 6π Д) 4π Н) Не знам

13. Ако је $z = x + iy$ комплексан број такав да је $z + |\overline{z} + i| = 4 + 3i$, онда је $2xy$ једнако:

А) -2 Б) 0 В) 4 Г) 6 $\boxed{\text{Д)}}$ 9 Н) Не знам

14. Имагинарни део комплексног броја $(1 + i)^{2023} - (1 - i)^{2023}$ једнак је:

А) 2^{1012} $\boxed{\text{Б)}}$ -2^{1012} В) -2^{1011} Г) 2^{1011} Д) 0 Н) Не знам

15. Збир квадрата решења једначине $\log_x 2x \cdot \log_{x^2} 4x = \log_{\sqrt[3]{x}} 2$ је:

А) 5 Б) 9 $\boxed{\text{В)}}$ 20 Г) $\frac{65}{16}$ Д) 4 Н) Не знам

16. Ако су x_1, x_2 решења једначине $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{5})x + 3 = 0$, онда је $\frac{x_1 \cdot x_2}{x_1 + x_2}$ једнако:

А) $2(\sqrt{2} - \sqrt{5})$ Б) $\sqrt{2} - \sqrt{5}$ $\boxed{\text{В)}}$ $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ Г) $2(\sqrt{5} - \sqrt{2})$ Д) 3 Н) Не знам

17. У коцку ивице $a = 13\,cm$ је уписана лопта а затим у ту лопту је уписана коцка ивице b. Онда је површина коцке ивице b једнака:

А) $1014\,cm^2$ Б) $1352\,cm^2$ В) $676\,cm^2$ $\boxed{\text{Г)}}$ $338\,cm^2$ Д) $264\,cm^2$ Н) Не знам

18. Скуп решења неједначине $\sqrt{2x^2 + 3x - 2} < 1 - x$ је облика:

А) $(-\infty, a) \cup (b, c) \cup (d, e) \cup (f, \infty)$ Б) $(-\infty, a)$ В) $(a, b] \cup (c, d]$ Г) (a, b) $\boxed{\text{Д)}}$ $(a, b] \cup [c, d)$ Н) Не знам

19. Ако је права $y = kx + n$ тангента кружнице $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ у тачки $A(3, 1)$ онда је $n - k$ једнако:

А) -3 Б) -2 В) 1 Г) 2 $\boxed{\text{Д)}}$ 3 Н) Не знам

20. Збир решења једначине $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ која припадају интервалу $[0, 2\pi]$ једнак је:

А) 11π Б) 9π $\boxed{\text{В)}}$ 7π Г) 5π Д) 3π Н) Не знам

РЕШЕЊЕ

1. $\frac{x+2}{2-3x} = \frac{1}{2}$

$$2(x + 2) = 2 - 3x$$

$$5x = -2, x = -\frac{2}{5.}$$

$\boxed{\textbf{2.}}$

$$2^{\log_2 3 + \log_4 81} = 2^{\log_2 3} \cdot 2^{\log_{2^2} 9 =}$$
$$3 \cdot 2^{2 \cdot \frac{1}{2} \log_2 9} = 3 \cdot 2^{\log_2 9} = 3 \cdot 9 = 27.$$

$\boxed{\textbf{3.}}$

$$\left(\frac{a^{-1}}{b^{-1}} + \frac{b^{-2}}{a^{-2}}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 1\right) =$$
$$\left(\frac{b}{a} + \frac{a^2}{b^2}\right)^{-1} \cdot \frac{a^2 + b^2 - ab}{ab} =$$
$$\left(\frac{b^3 + a^3}{ab^2}\right)^{-1} \cdot \frac{a^2 + b^2 - ab}{ab} =$$
$$\frac{ab^2}{(a+b)(a^2 + b^2 - ab)} \cdot \frac{a^2 + b^2 - ab}{ab} =$$
$$\frac{b}{a+b}.$$

$\boxed{\textbf{4.}}$

$$\frac{x^2 - 5x + 5}{x^2 - 9x + 14} < 1$$
$$\frac{x^2 - 5x + 5}{x^2 - 9x + 14} - 1 < 0$$
$$\frac{x^2 - 5x + 5 - x^2 + 9x - 14}{x^2 - 9x + 14} < 0$$
$$\frac{4x - 9}{x^2 - 9x + 14} < 0$$
$$\frac{4x - 9}{(x-2)(x-7)} < 0$$

$$x \in (-\infty, 2) \cup (\frac{9}{4}, 7)$$

$\boxed{\textbf{5.}}$ $(\sqrt{3})^{x^2 - 2} = 27^x$

$$(3^{\frac{1}{2}})^{x^2 - 2} = (3^3)^x$$
$$3^{\frac{x^2 - 2}{2}} = 3^{3x}$$
$$x^2 - 2 = 6x$$

Из Виетове везе

$$x_1 x_2 = -2.$$

$\boxed{\textbf{6.}}$ $S_5 = 20, S_9 = 27$

$$S_n = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2}$$
$$S_5 = 20 = \frac{5(2a_1 + (5-1)d)}{2}$$

$40 = 5(2a_1 + 4d)$ па је $2a_1 + 4d = 8$

$$S_9 = 27 = \frac{9(2a_1 + (9-1)d)}{2}$$

$54 = 9(2a_1 + 8d)$ па је $2a_1 + 8d = 6$ Из $2a_1 + 4d = 8$ и $2a_1 + 8d = 6$ добијамо да је $d - = \frac{1}{2}$. Замнеом d у било коју једначину добијамо $2a_1 + 4\left(-\frac{1}{2}\right) = 8$, $2a_1 = 10, a_1 = 5$. $a_n = a_1 + (n-1)d$ па је $a_{25} = 5 + 24\left(-\frac{1}{2}\right) = -7$.

7. Квадратна једначина има једно (два иста) решење када је дискриминанта нула.

$$D = (m+1)^2 - 4m^2 = 0$$
$$-3m^2 + 2m + 1 = 0$$

Из Виетове везе
$$m_1 + m_2 = \frac{2}{3}.$$

8. Пошто у екипи мора бити бар један бели, значи може бити један бели и 6 шарених или два бела и 5 шарених. То је

$$\binom{3}{1} \cdot \binom{9}{6} + \binom{3}{2} \cdot \binom{9}{5} = 504$$

Биномни коефицијенти се рачунају $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$.

9. $Q(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Пошто је полином $P(x)$ дељив полиномом $Q(x)$ онда је дељив са $x-1$ и $x+1$ што по Безуовом ставу значи да је $P(1) = 0$ и $P(-1) = 0$.

$$P(1) = 1 + a + b + 5 = 0$$

па је $a + b = -6$.

10. $\cos 2023° = \cos(5 \cdot 360° + 223°) = \cos 223°$ јер је $360°$ период косинусне функције.

$$\cos 223° = \cos(180° + 43°) = -\cos 43°$$

11. Паралелне праве имају исти коефицијент k, па је $k = -2$. Пошто права $y = -2x + n$ садржи тачку $A(1,2)$ биће $2 = -2 + n$, тј. $n = 4$. Онда је $n - k = 6$.

12. $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ на интервалу $(0, 2\pi)$ има решења $x_1 = \dfrac{5\pi}{6}$ и $x_2 = \dfrac{7\pi}{6}$. На интервалу $(2\pi, 4\pi)$ решења су $x_3 = x_1 + 2\pi$ и $x_4 = x_2 + 2\pi$. Збир решења је 8π.

13. Ако је $z = x + iy$ онда је $|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\overline{z} = x - iy$. Онда је $|\overline{z} + i| = |x - iy + i| = |x + (1-y)i| = \sqrt{x^2 + (1-y)^2}$. Једначина је онда:

$$x + iy + \sqrt{x^2 + (1-y)^2} = 4 + 3i$$

Изједначимо реални део са леве стране са оним са десне и исто за имагинарни део.

$$x + \sqrt{x^2 + (1-y)^2} = 4$$
$$y = 3$$

Заменимо $y = 3$ у прву једначину и добијамо $x + \sqrt{x^2 + 4} = 4$. Квадрирамо једначину и добијамо
$$x^2 + 4 = (4 - x)^2$$
$$x = \frac{3}{2}$$

Дакле $2xy = 9$.

14. $(1+i)^2 = 2i$ и $(1-i)^2 = -2i$

$$(1+i)^{2023} - (1-i)^{2023} = ((1+i)^2)^{1011}(1+i) - ((1-i)^2)^{1011}(1-i) =$$
$$(2i)^{1011}(1+i) - (-2i)^{1011}(1-i)$$

$i^{1011} = i^{4 \cdot 252 + 3} = i^3 = -i$ онда је наш израз

$$-2^{1011}i(1+i) - 2^{1011}i(1-i) = -2 \cdot 2^{1011} i$$

Имагинарни део је $-2 \cdot 2^{1011} = -2^{1012}$.

15. $\log_x 2x \cdot \log_{x^2} 4x = \log_{\sqrt[3]{x}} 2$

$$(\log_x 2 + \log_x x)\frac{1}{2}\log_x 4x =$$

$$(\log_x 2 + \log_x x)\frac{1}{2}(\log_x 2^2 + \log_x x) = 3\log_x 2$$

$$(\log_x 2 + \log_x x)\frac{1}{2}(2\log_x 2 + \log_x x) = 3\log_x 2$$

Уведимо смену $t + \log_x 2$. Добијамо једначину:

$$(t+1)(2t+1) = 6t$$

$$2t^2 - 3t + 1$$

Решења су $t_1 = \frac{1}{2} = 2^{-1}$ и $t_2 = 1$. Онда $\log_{x_1} 2 = 2^{-1}$ тј. $x_1 = 4$ и $\log_{x_2} 2 = 1$ тј. $x_2 = 2$. Дакле збир квадрата решења једначине је 20

$\boxed{\textbf{16.}}$ Из Виетових веза $x_1 + x_2 = \sqrt{2} + \sqrt{5}$ и $x_1 x_2 = 3$. Онда је

$$\frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} = \frac{3}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} =$$

$$\frac{3(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})} = \sqrt{5} - \sqrt{2}.$$

$\boxed{\textbf{17.}}$ Лопта уписана у коцку странице a је $R = \frac{a}{2} = \frac{13}{2}$. Када у ту лопту упишемо коцку њена велика дијагонала d је пречник лопте, $d = 13$. Ако је b ивица те коцке онда је $d^2 = 3b^2$. Површина коцке је $P = 6b^2 = 2d^2 = 2 \cdot 13^2 = 338$.

$\boxed{\textbf{18.}}$

$$\sqrt{2x^2 + 3x - 2} < 1 - x$$

Онда: $2x^2 + 3x - 2 \geq 0$ и $1 - x \geq 0$ и $2x^2 + 3x - 2 < (1-x)^2$. Последња неједначина је $x^2 + 5x - 3 < 0$.
Решење прве неједначине је $x \in (-\infty, -2] \cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$.
Решење друге неједначине је $x \in (-\infty, 1]$.
Решење треће неједначине је $x \in \left(\frac{-\sqrt{37} - 5}{2}, \frac{\sqrt{37} - 5}{2}\right)$. Пресек ова три интервала је $x \in \left(\frac{-\sqrt{37} - 5}{2}, -2\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{37} - 5}{2}\right)$.

$\boxed{\textbf{19.}}$ Једначина кружнице је $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$. Центар кружнице је $C(2, -1)$. Права кроз две тачке има једначину $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$. Права кроз тачке $A(3, 1)$ и $C(2, -1)$ је

$$\frac{x - 3}{2 - 3} = \frac{y - 1}{-1 - 1}$$

$$y = 2x - 5$$

Тангента је нормална на пречник AC па је коефицијент $k = -\frac{1}{2}$. Тангента садржи тачку $A(3, 1)$ па је $1 = k \cdot 3 + n$ одакле је $n = \frac{5}{2}$. Дакле, $n - k = 3$.

$\boxed{\textbf{20.}}$ Формула за збир синуса је

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

Онда је $\sin x + \sin 3x = 2\sin 2x \cos x$.

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 2\sin 2x \cos x + \sin 2x = \sin 2x(2\cos x + 1)$$

$\sin 2x = 0$ или је $\cos x = -\frac{1}{2}$. На интервалу $[0, 2\pi]$ $\sin 2x = 0$ за $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$. $\cos x = -\frac{1}{2}$ за $x = \frac{2\pi}{3}$ и $x = \frac{4\pi}{3}$. Збир ових решења је 7π.